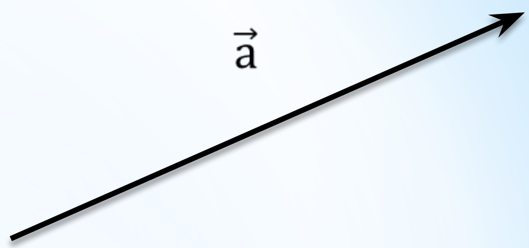
Векторы в пространстве

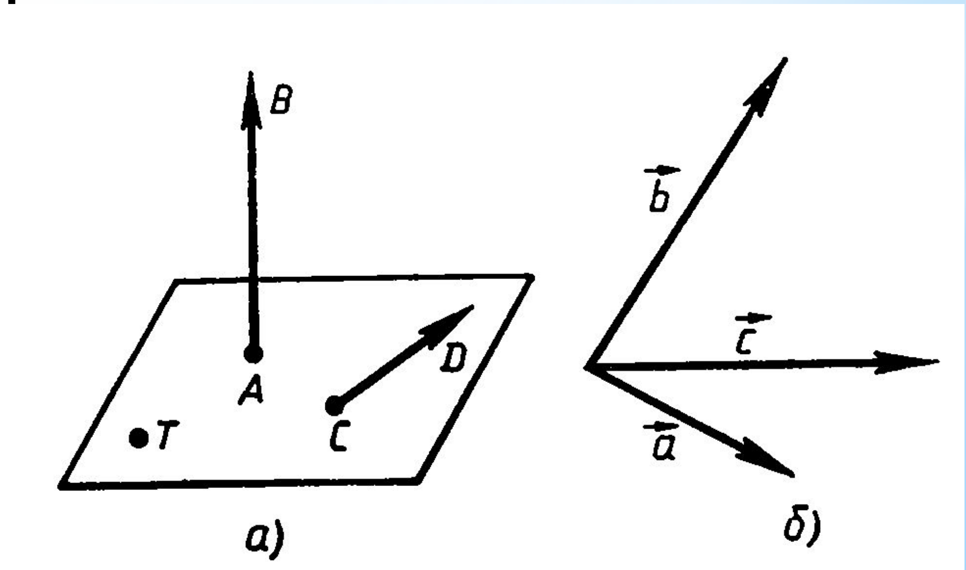
*Содержание темы

1. Понятие вектора. Равенство векторов
2. Сложение и вычитание векторов.
3. Сложение нескольких векторов
4. Умножение вектора на число
5. Компланарные вектора. Правило параллелепипеда
6. Разложение вектора по трём некомпланарным векторам
7. Решение задач

Опред: Отрезок, для которого указано, какой из его концов считается началом, а какой — концом, называется вектором.



точка пространства также может рассматриваться как вектор. Такой вектор называется нулевым.

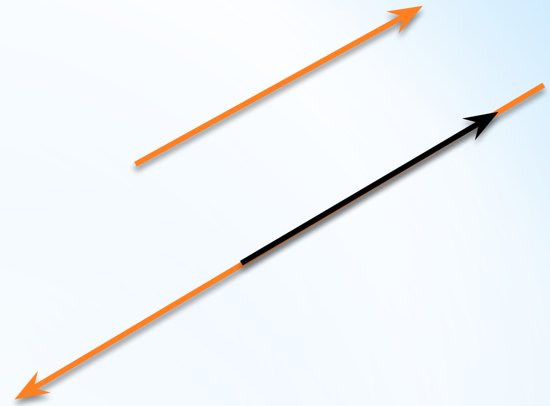


Длиной ненулевого вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка АВ.

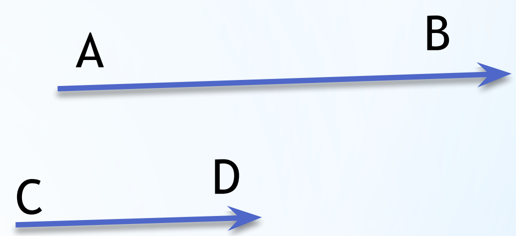
Длина вектора $\overrightarrow{AB}$ А (вектора а) обозначается так lABl (lal).

Длина нулевого вектора считается равной нулю: |0|=0.

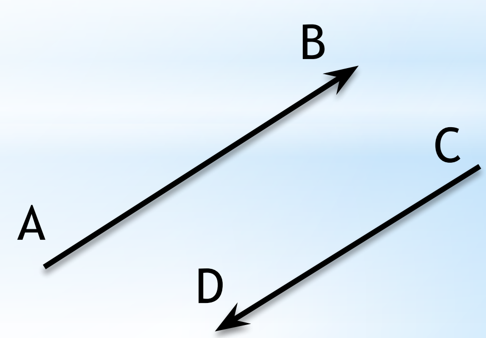
Два ненулевых вектора называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.



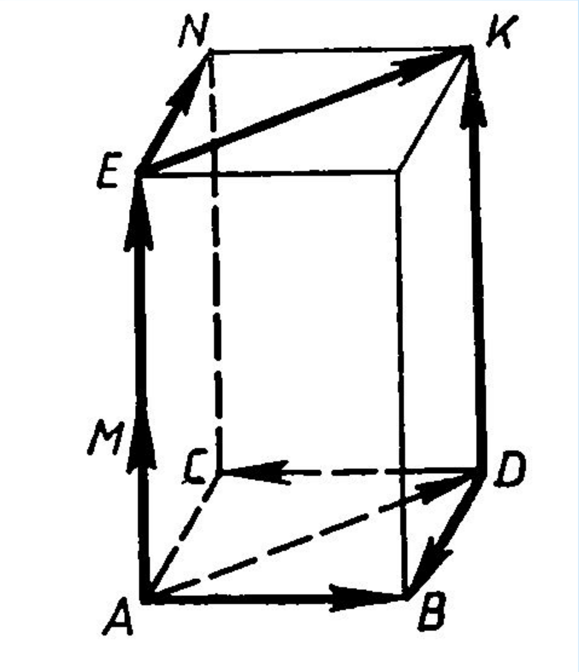
Если два ненулевых вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны и если при этом лучи AB и CD сонаправлены, то векторы AB и CD называются сонаправленными,



а если эти лучи не являются сонаправлемными, то векторы AB и CD называются противоположно направленными.



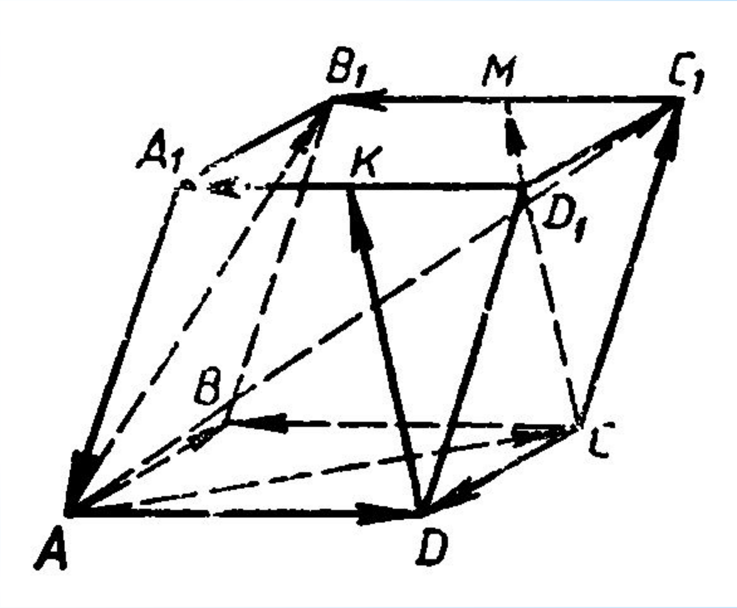
Векторы называются равными, если они сонаправлены и их длины равны.



На рисунке $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DK}$, так как $\overrightarrow{AE} \uparrow\uparrow \overrightarrow{DK}$ и $\left|\overrightarrow{AE}\right| = \left|\overrightarrow{DK}\right|$, а $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{DC}$, так как $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{DC}$.

Решение задач

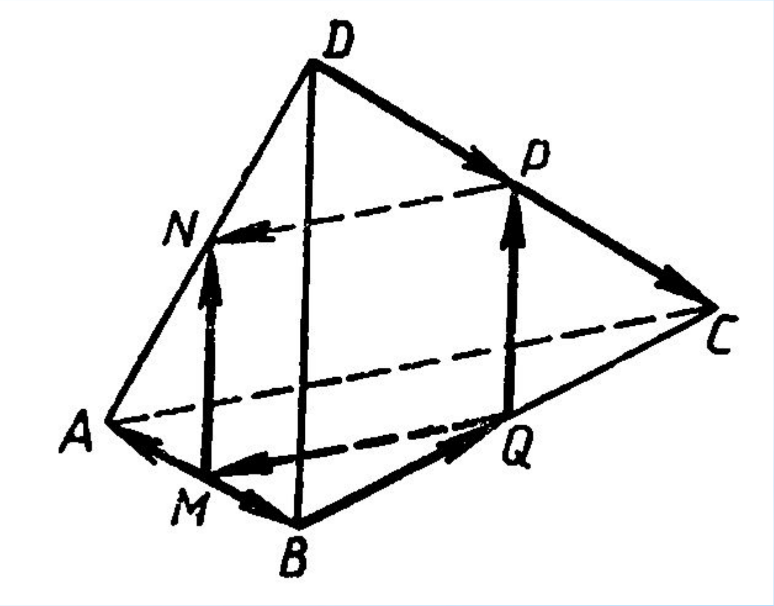
На рисунке изображён параллелепипед **$ABCDA_1B1C1D1$**.
Точки М и К — середины ребер В1С1, и А1D1. Укажите на
этом рисунке все пары:
а) сонаправленных векторов;
б) противоположно направленных векторов;
в) равных векторов.



На рисунке изображён тетраэдр ABCD, ребра которого
равны. Точки M, N, P и Q — середины сторон AB, AD, DC, BC.

а) Выпишите все пары равных векторов, изображённых
на этом рисунке,

б) Определите вид четырёхугольника MNPQ.



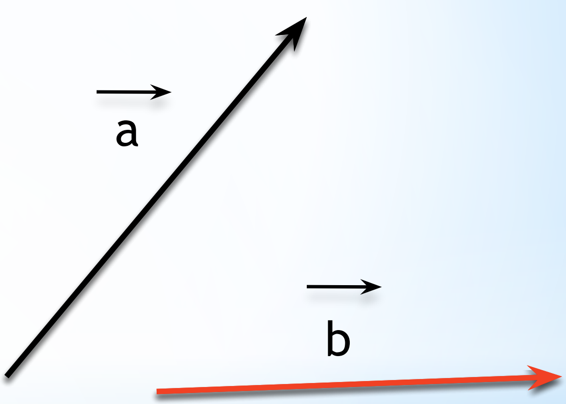
* Измерения прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ таковы: AD=8 см, AB=9 см и AA_1=12 см. Найдите длины векторов: а) CC_1, CB, CD; б) DC_1, DB, DB_1

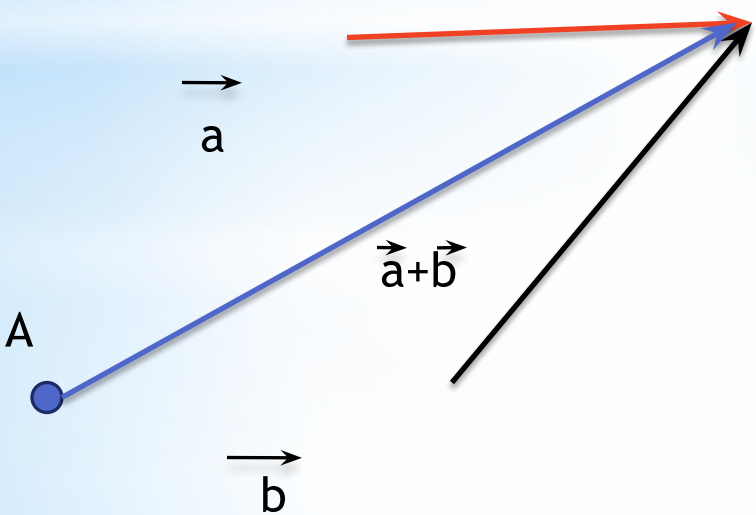
Сложение векторов

- Сложение двух свободных векторов можно осуществлять как по правилу параллелограмма, так и по правилу треугольника.

*Правило параллелограмма

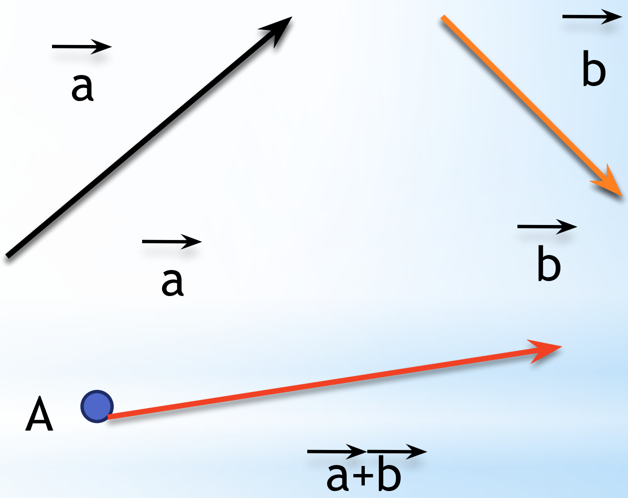
Для сложения двух неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, нужно отложить от какой- либо точки А векторы равные данным и построить параллелограмм. Тогда диагональ и будет суммой двух векторов.





*Правило треугольника

Для сложения двух векторов по правилу треугольника оба эти вектора переносятся параллельно самим себе так, чтобы начало одного из них совпадало с концом другого. Тогда вектор суммы задаётся третьей стороной образовавшегося треугольника, причём его начало совпадает с началом первого вектора, а конец с концом второго вектора.



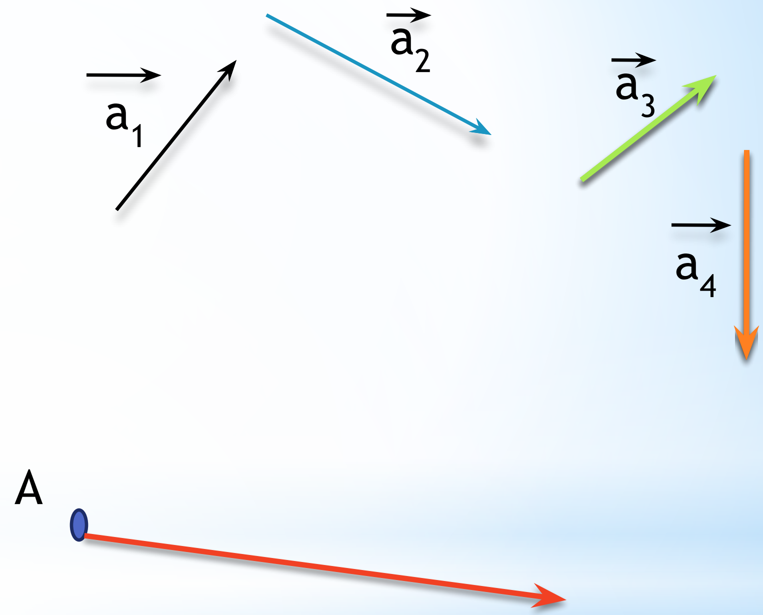
*ПРАВИЛО МНОГОУГОЛЬНИКА

1) От конца вектора a_1 отложить вектор a_2 ,равный вектору a_2;

2) Повторить откладывание векторов столько раз , сколько векторов нужно отложить;

3) Провести вектор из конца вектора a_n в начало а.

ВЫВОД: полученный вектор в и будет суммой векторов a_1 , a_2 , a_3 ,… и a_n



*ЗАКОНЫ СЛОЖЕНИЯ ВЕКТОРОВ

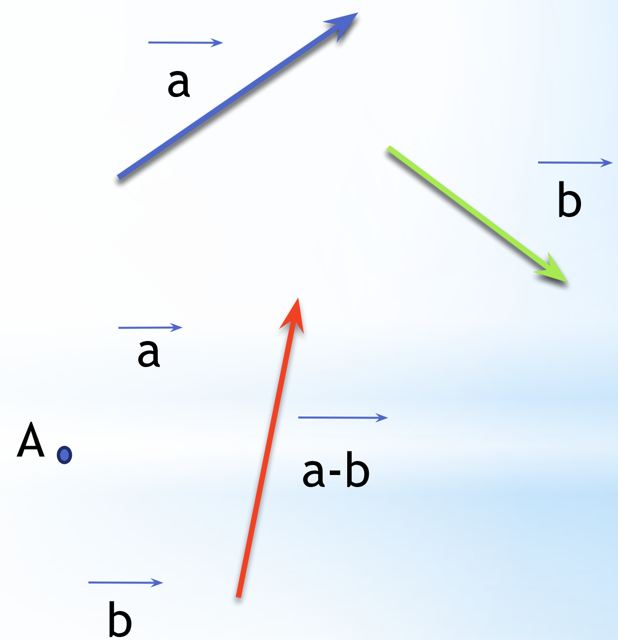
Для любых векторов а , в и с справедливы равенства:

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ - переместительный закон

2) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ -сочетательный закон

*ВЫЧИТАНИЕ ВЕКТОРОВ

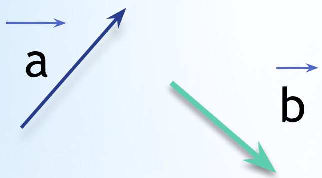
Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор , сумма которого с вектором $\vec{b}$ равна вектору $\vec{a}$



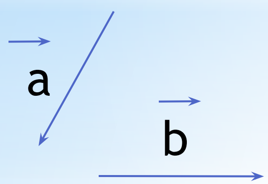
*Задачи

используя правило треугольника , параллелограмма постройте векторы $\vec{OA} = \vec{a} + \vec{в}$

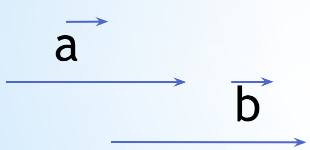
а)



б)



с)

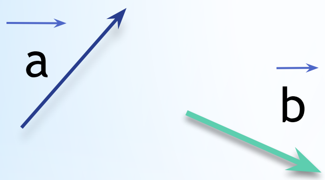


Задачи

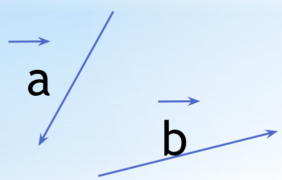
используя треугольника, постройте векторы

$\overrightarrow{OA} = \vec{a} - \vec{в}$

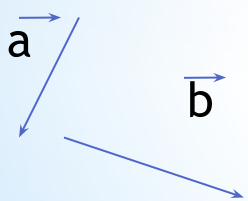
а)



б)



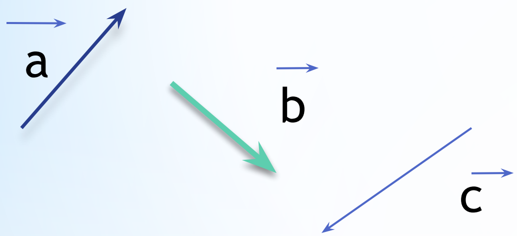
с)



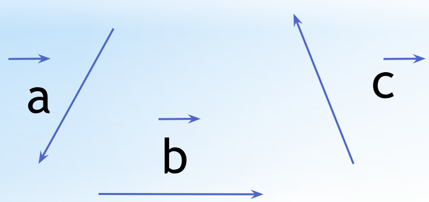
Задачи

используя правило треугольника , постройте векторы $\vec{OA} = \vec{a} + \vec{в} + \vec{c}$

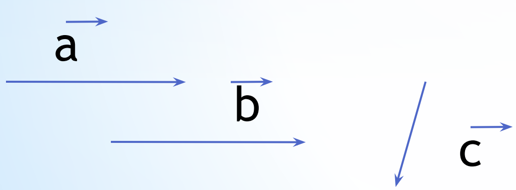
а)



б)



с)



Найдите:

$а)\ \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=$

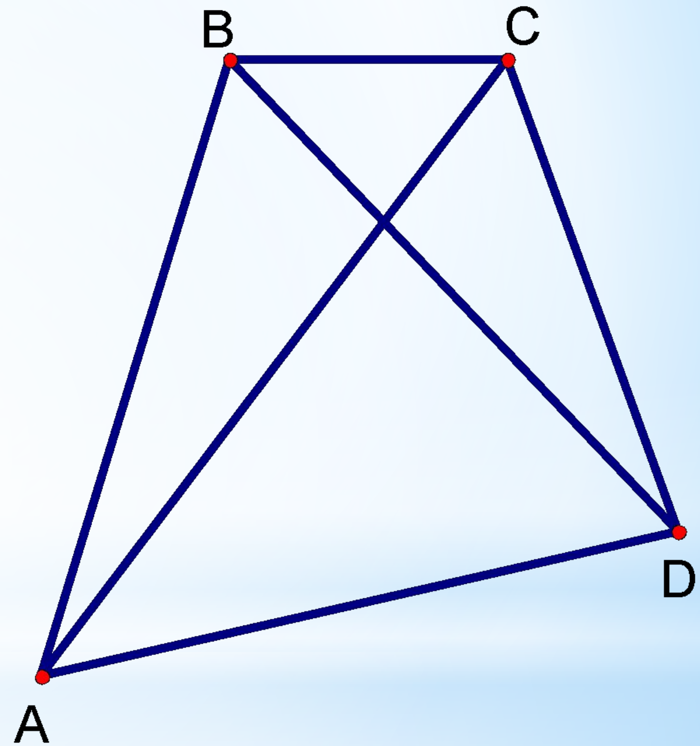
$б)\ \overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=$

$в)\ \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DA}=$

$г)\ \overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AB}=$

$д)\ \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=$

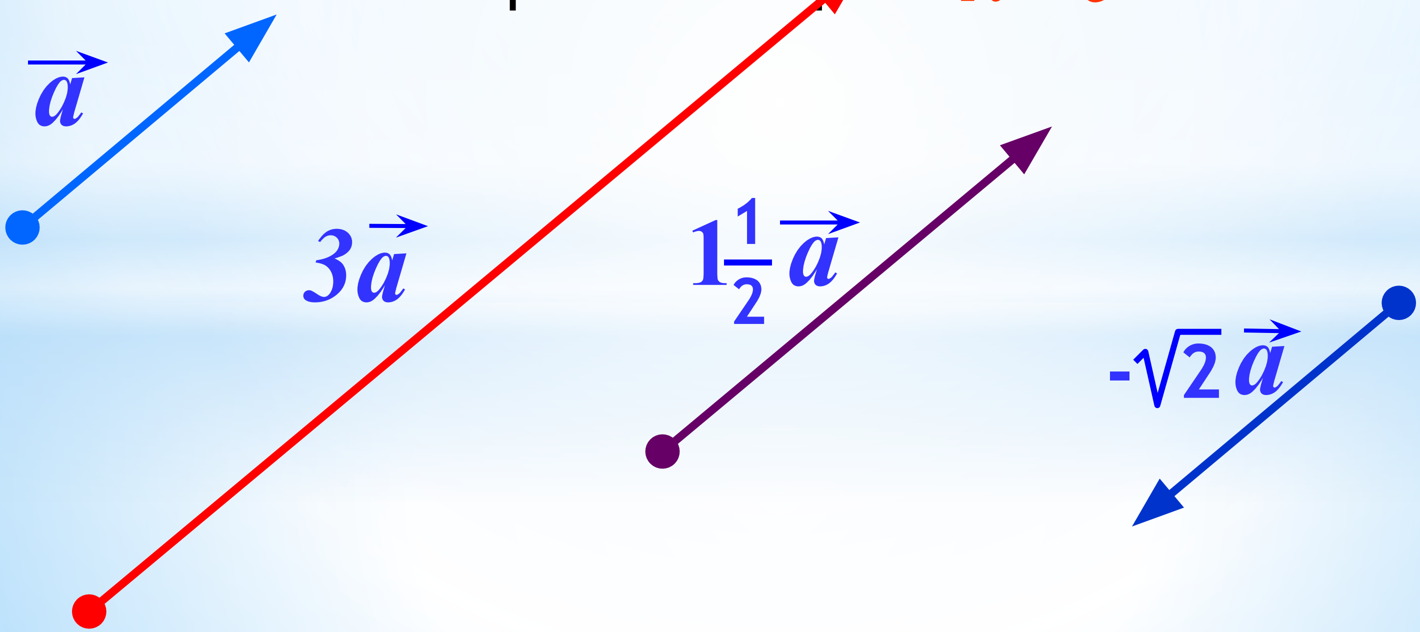
$е)\ \overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DC}=$



Умножение вектора на число.

Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на число k называется такой вектор $\vec{b}$, длина которого равна $|k|\cdot|\vec{a}|$,

причем векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены при $k \geq 0$ и противоположно направлены при $k<0$.



Умножение вектора на число обладает следующими основными свойствами.

Для любых $\vec{a}$, $\vec{b}$ и любых чисел k, l справедливы равенства:

$$(kl)\vec{a} = k\,(l\,\vec{a})$$

Сочетательный закон

$$(k+l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$$

Первый распределительный закон

$$k\,(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$$

Второй распределительный закон

Пусть $\vec{x} = \vec{m} + \vec{n}$, $\vec{y} = \vec{m} - \vec{n}$

Выразите через $\vec{m}$ и $\vec{n}$ векторы

$2\vec{x} - 2\vec{y}$

$2\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y}$

$-\vec{x} - \frac{1}{3}\vec{y}$

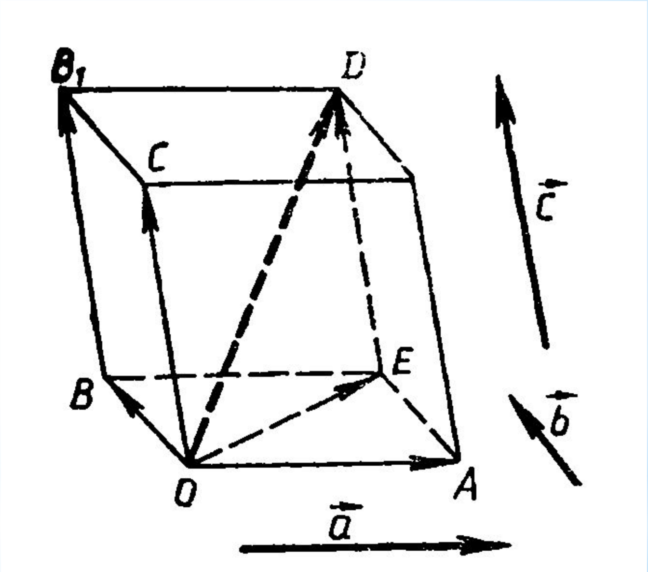
*Математический диктант

1 вариант	2 вариант
1. Опред. равных векторов (чертеж) 2. Опред. противоположно направленных векторов (четреж) 3. Начертить два произвольных вектора и покажите сумму и разность этих векторов 4. Начертить пять произвольных векторов и показать их сумму 5. Упростить выражение: 2(m+n)-3(4m-n)+m	1. Опред. сонаправленных векторов (чертеж) 2. Опред. коллинеарных векторов (чертеж) 3. Начертить два произвольных вектора и покажите сумму и разность этих векторов 4. Начертить пять произвольных векторов и показать их сумму 5. Упростить выражение: m-3(n-2m+p)+5(p-4m)

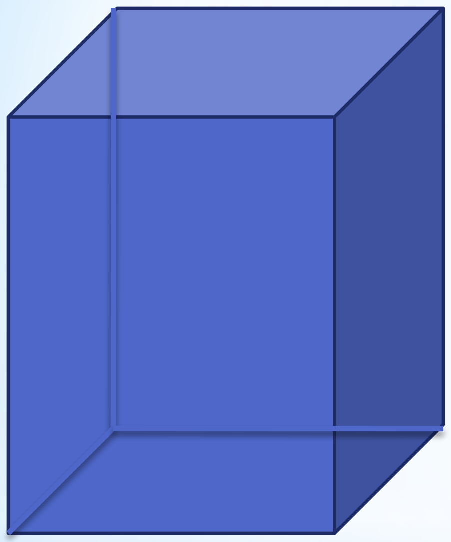
Задача: Пусть ABCD — параллелограмм, а O — произвольная точка пространства. Докажите, что: а) $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$; б) $\overrightarrow{0B} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{DA}$.

*КОМПЛАНАРНЫЕ ВЕКТОРЫ

Векторы называются компланарными, если при откладывании их от одной и той же точки они будут лежать в одной плоскости. Другими словами, векторы называются компланарными, если имеются равные им векторы, лежащие в одной плоскости.



Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Какие из следующих трех векторов компланарны: а) AA_1, CC_1, BB_1 б) AB, AD, AA_1; в) B_1B, AC, DD_1 г) AD, CC_1 и A_1B_1,?



Если вектор $\vec{c}$ можно разложить по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т. е. представить в виде $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$, где x и y — некоторые числа, то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны.

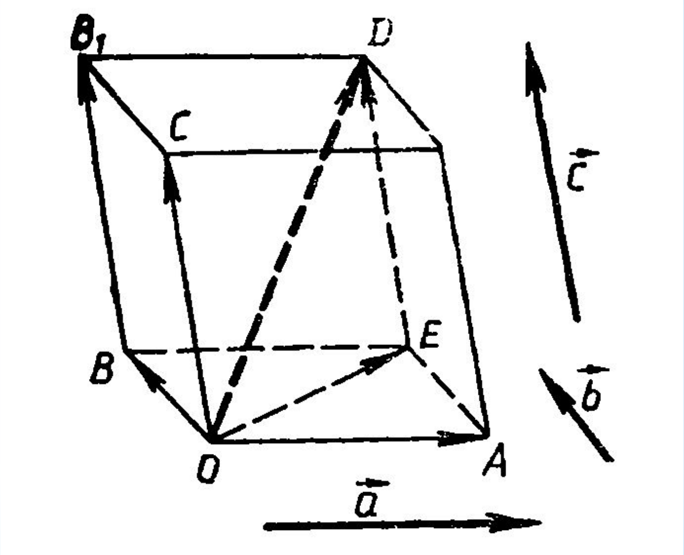
Справедливо и обратное утверждение: если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны, а векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то вектор $\vec{c}$ можно разложить по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, причем коэффициенты разложения (т. е. числа x, y)

определяются единственным образом.

*Правило параллелепипеда.

Для сложения трех некомпланарных векторов можно пользоваться так называемым правилом параллелепипеда.

Пусть $\vec{a}$, $\vec{\text{Ь}}$, $\vec{c}$ — некомпланарные векторы. Отложим от произвольной точки O пространства векторы $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{\text{Ь}}$, $\overrightarrow{OC}$ —$\vec{c}$ и построим параллелепипед так, чтобы отрезки O A, OB и OC были его ребрами. Тогда диагональ OD этого параллелепипеда изображает сумму векторов $\vec{a}$, $\vec{\text{Ь}}$ и $\vec{c}$: $\overrightarrow{OD} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.



Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Назовите вектор, начало и конец которого являются вершинами параллелепипеда, равный сумме векторов: а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}$; б) $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DD_1}$; в) $\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{C_1B_1}+\overrightarrow{BB_1}$; г) $\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{A_1D_1}+$ $+\overrightarrow{AB}$; д) $\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{BC}$.

Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. а) Разложите вектор $\overrightarrow{BD_1}$ по векторам $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BB_1}$. б) Разложите вектор $\overrightarrow{B_1D_1}$ по векторам $\overrightarrow{A_1A}$, $\overrightarrow{A_1B}$ и $\overrightarrow{A_1D_1}$.

*Разложение вектора по трем некомпланарным векторам.

Если вектор $\vec{p}$ представлен в виде $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$, где x, y и z — некоторые числа, то говорят, что вектор $\vec{p}$ разложен по векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Числа x, y, z называются коэффициентами разложения.

Теорема. Любой вектор можно разложить по трем данным некомпланарным векторам, причем коэффициенты разложения определяются единственным образом.

366. Докажите, что если M — точка пересечения медиан треугольника ABC, а O — произвольная точка пространства, то

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}). \qquad (4)$$

Решение. По теореме о точке пересечения медиан треугольника $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MA_1}$, где AA_1 — медиана треугольника ABC (рис. 110). Согласно задаче 349

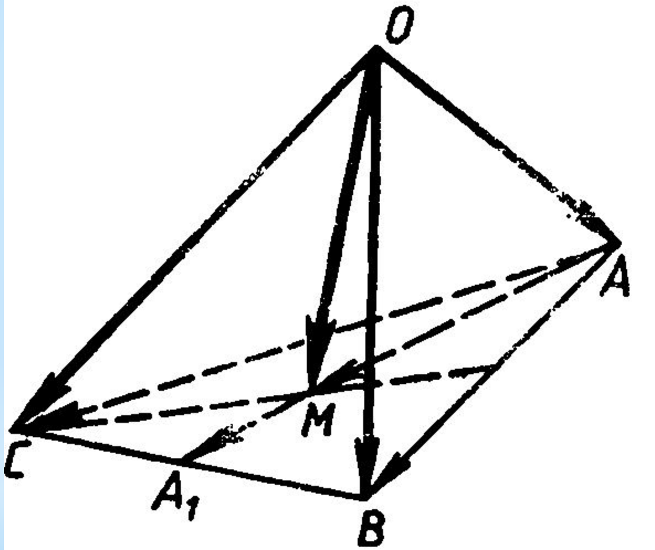


Рис. 110.

$$\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OA_1}}{1+2}=\frac{\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OA_1}}{3}.$$

Но $OA_1=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$ (объясните почему), поэтому $\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}$.