

# Векторы и операции над НИМИ

Выполнила: студентка 1 курса «Б»  
Гавриленко Елена

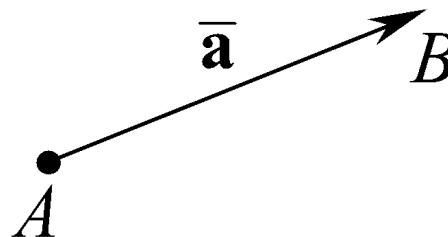
# Определение



*Вектором* называется направленный отрезок (т.е. отрезок, у которого одна из ограничивающих его точек принимается за начало, а вторая – за конец).

Обозначают:  $\overline{AB}$  (где  $A$  – начало вектора, а  $B$  – его конец),  
 $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и т. д.

Изображают:



Расстояние от начала вектора до его конца называется *длиной* (или *модулем*) вектора.

Обозначают:  $|\overline{AB}|$  или  $|\vec{a}|$

- Вектор, длина которого равна единице, называется *единичным*.
- Вектор, начало и конец которого совпадают, называется *нулевым*. Нулевой вектор не имеет определенного направления и имеет длину, равную нулю. Обозначают:  $|\vec{0}|$
- Векторы, лежащие на одной или параллельных прямых, называются *коллинеарными* (*параллельными*).

Записывают:  $\vec{a} \parallel \vec{b}$  - если векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  коллинеарные,

$\vec{a} \nparallel \vec{b}$  - если векторы неколлинеарные.

Векторы, лежащие на перпендикулярных прямых называются перпендикулярными (ортогональными)

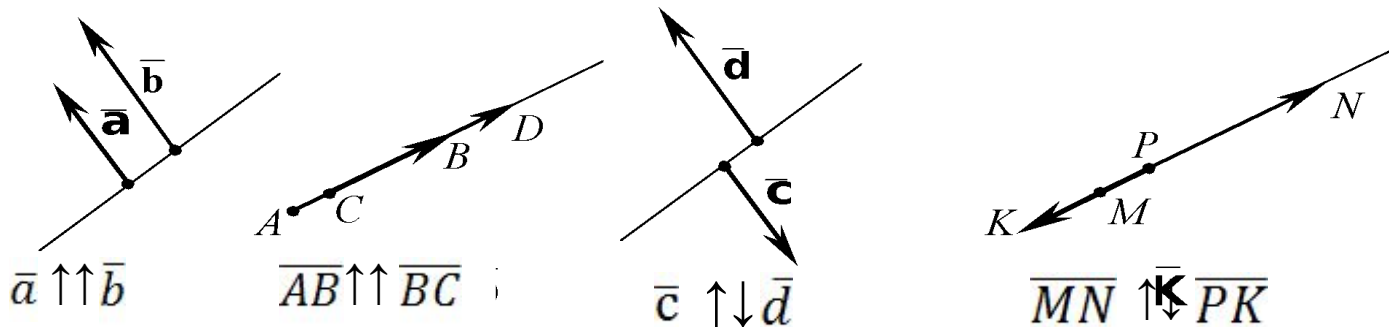
Векторы, лежащие в одной плоскости (или в параллельных плоскостях) называются компланарными.

Если векторы  $\overline{AB}$  и  $\overline{BC}$  - коллинеарные и их концы лежат по одну сторону от прямой, соединяющей их начала (для векторов лежащих на параллельных прямых) или один из лучей,  $AB$  или  $CD$ , целиком содержит в себе другой (для векторов лежащих на одной прямой), то векторы называются *сонаправленными*. В противном случае коллинеарные векторы называются *противоположно направленными*.

Записывают:

$\bar{a} \uparrow \uparrow \bar{b}$  - если векторы  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$  сонаправленные,

$\bar{a} \uparrow \downarrow \bar{b}$  - если векторы противоположно направленные.



# Линейные операции над векторами



К линейным операциям относятся операции сложения, вычитания и умножения вектора на число.

## Сложение векторов

Суммой векторов  $\overline{AB}$  и  $\overline{BC}$  называется вектор  $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$ ; началом в точке A и концом в точке C (правило треугольника) (рис.1).

## Вычитание векторов

$$\overline{a} - \overline{b} = \overline{a} + (-\overline{b})$$

## Умножение вектора на число

Произведением вектора  $\overline{a}$  и действительного числа  $a$  называется вектор  $a \overline{a}$ , модуль которого равен  $|a| |\overline{a}|$ , направление совпадает с направлением вектора  $\overline{a}$ , при  $a > 0$ , и противоположно направлению вектора  $\overline{a}$  при  $a < 0$ . При  $a = 0$ ,  $a \overline{a} = \overline{0}$  (рис. 2)

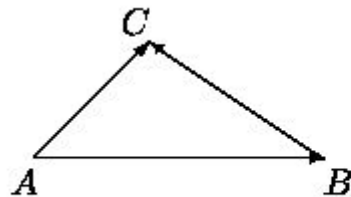


Рис. 1

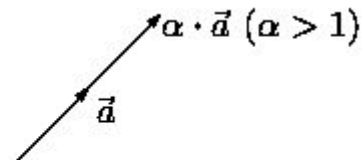


Рис. 2

# Свойства линейных операций над векторами

- 1.  $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$ ,
- 2.  $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$ ,
- 3.  $\bar{a} + \bar{0} = \bar{a}$ ,
- 4.  $\bar{a} + (-\bar{a}) = 0$ ,
- 5.  $\lambda_1(\lambda_2 \cdot \bar{a}) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \bar{a}$ ,
- 6.  $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \bar{a} = \lambda_1 \bar{a} + \lambda_2 \bar{a}$ ,
- 7.  $\lambda(\bar{a} + \bar{b}) = \lambda \bar{a} + \lambda \bar{b}$ ,
- 8.  $1 \cdot \bar{a} = \bar{a}$

В линейной алгебре множество элементов произвольной природы, на котором определены операции сложения и умножения на число, а также справедливы утверждения (1-8), называют **линейным пространством**, а сами элементы - векторами (в широком смысле) этого пространства. Таким образом, введенные векторы, как направленные отрезки, образуют линейное пространство.

*Линейной комбинацией* векторов  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_r$  называют вектор

$$\bar{y} = \alpha_1 \bar{x}_1 + \alpha_2 \bar{x}_2 + \dots + \alpha_r \bar{x}_r = \sum_{k=1}^r \alpha_k \bar{x}_k,$$

где  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \in R(C)$  - коэффициенты линейной комбинации. Если  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_r = 0$ , - комбинация называется тривиальной, если  $\exists \alpha_i \neq 0$ , - нетривиальной.

Для того чтобы векторы  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_r$  ( $r > 1$ ) были *линейно зависимы*, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один из этих векторов являлся линейной комбинацией остальных.

# Свойства линейной зависимости

- **Свойство 1.** Если среди векторов есть нулевой вектор, то эти векторы линейно зависимы.
  - **Свойство 2.** Если к системе линейно зависимых векторов добавить один или несколько векторов, то полученная система тоже будет линейно зависима.
  - **Свойство 3.** Система векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда один из векторов раскладывается в линейную комбинацию остальных векторов.
  - **Свойство 4.** Любые 2 коллинеарных вектора линейно зависимы и, наоборот, любые 2 линейно зависимые вектора коллинеарны.
  - **Свойство 5.** Любые 3 компланарных вектора линейно зависимы и, наоборот, любые 3 линейно зависимые вектора компланарны.
  - **Свойство 6.** Любые 4 вектора линейно зависимы.
- 

## Размерность линейного пространства

Линейное пространство  $V$  называется  $n$ -мерным (имеет размерность  $n$ ), если в нем:

- 1) существует  $n$  линейно независимых векторов;
- 2) любая система  $n + 1$  векторов линейно зависима.
- Обозначения :  $n = \dim V$ ;  $V_n$  .

## Базис пространства $V_n$ Координаты вектора

Базис - любая упорядоченная система  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$  из  $n$  линейно независимых векторов пространства  $V_n$

Обозначение:  $(\bar{e}) = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n)$ .

Для каждого вектора существуют числа такие что:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 + \dots + x_n \bar{e}_n = \sum_{k=1}^n x_k \bar{e}_k = \\ &= (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\bar{e})(\bar{x}).\end{aligned}$$

Числа  $x_1, x_2, \dots, x_n$  называются координатами вектора  $\bar{x}$  в базисе  $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n)$  (определяются однозначно),  $X = (x)$  - координатный столбец вектора  $\bar{x}$  в этом базисе. Употребляется запись:  $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Любой вектор линейного пространства можно представить и при том единственным образом в виде линейной комбинации базисных векторов.

**Ортонормированным (декартовым) базисом** называется базис из попарно **ортогональных** (попарно перпендикулярных) векторов, **длина** каждого из которых равна **единице**.

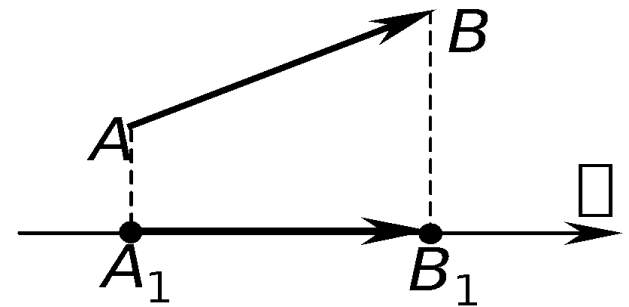
- Базисные векторы декартова базиса называют **ортами** и в **трёхмерном пространстве обозначают  $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$** .
- Орты с общим началом в точке  **$\theta$**  образуют **декартову систему координат**.
- Если **базис не ортонормирован**, то система координат называется **аффинной**.

Коэффициенты в разложении вектора по базису называются координатами этого вектора в данном базисе.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ координат свободных векторов в декартовом прямоугольном базисе:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Прямую, на которой выбрано направление, называют осью.*

Пусть  $\square$  — ось,  $\overline{\mathbf{AB}}$  — некоторый вектор,  $A_1$  и  $B_1$  — ортогональные проекции на ось  $\square$  точек  $A$  и  $B$  соответственно.

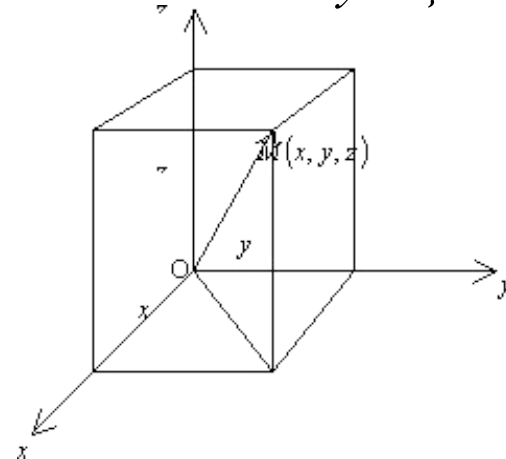


Вектор  $\overline{\mathbf{A_1B_1}}$  назовем *векторной проекцией* вектора  $\overline{\mathbf{AB}}$  на ось  $\square$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Проекцией (ортогональной проекцией) вектора  $\overline{\mathbf{AB}}$  на ось  $\square$  называется длина его векторной проекции  $\overline{\mathbf{A_1B_1}}$  на эту ось, взятая со знаком плюс, если вектор  $\overline{\mathbf{A_1B_1}}$  и ось  $\square$  сонаправлены, и со знаком минус — если вектор  $\overline{\mathbf{A_1B_1}}$  и ось  $\square$  противоположно направлены.

Обозначают:  $\text{Pr}_{\square}^{\perp} \overline{\mathbf{AB}}$ ,  $\text{Pr}_{\square} \overline{\mathbf{AB}}$ .

Координаты вектора  $\bar{\mathbf{a}} \in V^{(2)} (V^{(3)})$  в декартовом прямоугольном базисе  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  ( $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ) есть проекции этого вектора на соответствующие координатные оси.



# Нелинейные операции над векторами



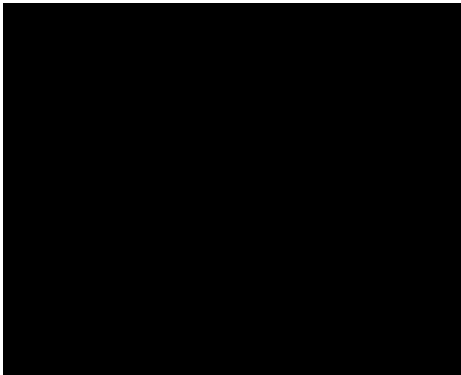
- 1. Скалярное произведение векторов
- 2. Векторное произведение векторов
- 3. Смешанное произведение векторов



# Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними.

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$$



*Если  $\vec{a} = \vec{0}$  или  $\vec{b} = \vec{0}$ , то скалярное произведение векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  полагают равным нулю.*

# Свойства скалярного произведения векторов

Для любых векторов  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  и любого числа  $\lambda$  справедливы равенства:

$$\square \vec{a}^2 = (\vec{a}, \vec{a}) \geq 0, \text{ причем } \vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}.$$

$$\square \vec{a} \vec{b} = \vec{b} \vec{a} \quad (\text{переместительный закон}).$$

$$\square (\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c}) \quad (\text{распределительный закон}).$$

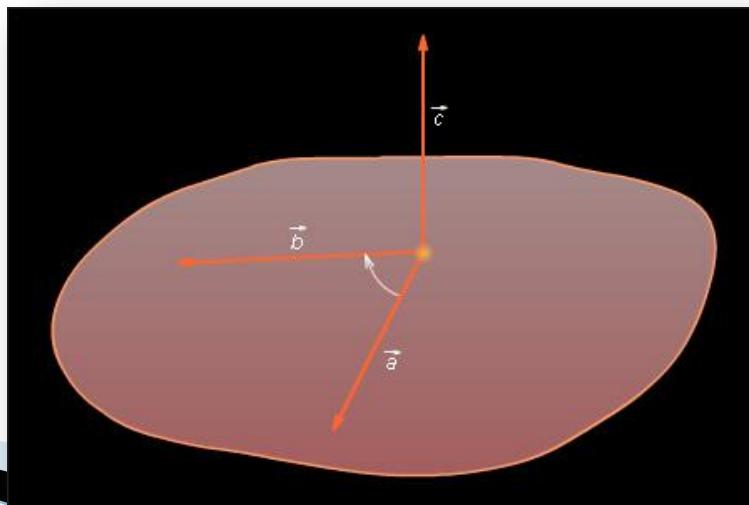
$$\square \lambda (\vec{a}, \vec{b}) = (\lambda \vec{a}, \vec{b}) \quad (\text{сочетательный закон}).$$

# Векторное произведение векторов

Векторным произведением вектора  $\vec{a}$  на вектор  $\vec{b}$  называется третий вектор  $\vec{c}$ , который обладает следующими свойствами:

- Его длина равна  $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b})$ .
- Вектор  $\vec{c}$ , перпендикулярен к плоскости, в которой лежат вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$
- Вектор  $\vec{c}$ , направлен так, что поворот от вектора  $\vec{a}$  к вектору  $\vec{b}$  осуществляется против часовой стрелки, если смотреть из конца вектора  $\vec{c}$ , (в этом случае, говорят, что тройка векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$ , — правая).

Векторное произведение обозначается квадратными скобками:  $\vec{c} = [\vec{a} \times \vec{b}]$ .



# Свойства векторного произведения векторов

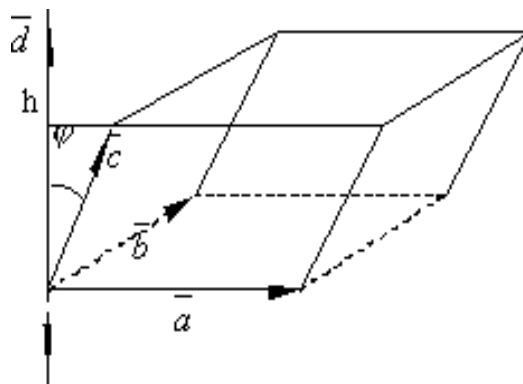
- векторное произведение произвольного вектора на нулевой вектор равно нулевому вектору;
- векторное произведение двух коллинеарных векторов равно нулевому вектору;
- координаты векторного произведения  $\vec{c}$  векторов  $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$  и  $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$  следующие:  $\vec{c} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$ .
- $[\vec{a} \times \vec{b}] = -[\vec{b} \times \vec{a}]$ .

## Смешанное произведение векторов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Смешанным произведением трех векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  называется число, равное скалярному произведению вектора  $\vec{a}$  на векторное произведение векторов  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$ , т.е.  $(\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}])$ .

### Свойства смешанного произведения векторов

- Геометрический смысл смешанного произведения. Смешанное произведение 3-х векторов с точностью до знака равно объёму параллелепипеда, построенного на этих векторах, как на рёбрах, т.е.  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \pm V_{\text{пар}}$ . Смешанное произведение также равно 1/6 объема образованной векторами треугольной пирамиды. Таким образом  $V_{\text{пар}} = \frac{1}{6} |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$  и  $V = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$ .



- Для любых векторов  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  справедливо равенство:

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

- При перестановке любых двух сомножителей смешанное произведение меняет знак.
- Смешанное произведение  $(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = 0$  тогда и только тогда, когда один из сомножителей равен нулю или векторы  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  – компланарны.
- Т.о., необходимым и достаточным условием компланарности 3-х векторов является равенство нулю их смешанного произведения. Кроме того, отсюда следует, что три вектора  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  образуют базис в пространстве, если  $(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) \neq 0$ .
- Если векторы заданы в координатной форме  

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}, \quad \vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}, \quad \vec{c} = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}$$
то можно показать, что их смешанное произведение находится по формуле:

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

- Т. о., смешанное произведение равно определителю третьего порядка, у которого в первой строке стоят координаты первого вектора, во второй строке – координаты второго вектора и в третьей строке – третьего вектора.

