

Векторный и координатный методы в решении стереометрических задач

Работу подготовили:
Голованов Илья
Шитова Ксения

Преподаватель:
Рычкова Т.В.

ВСТУПЛЕНИЕ

- ❖ Векторный и координатный методы часто применяются в решении различных стереометрических и планиметрических задач.
- ❖ Многие задачи про куб, прямоугольный параллелепипед, пирамиду, тетраэдр решаются данным методом.
- ❖ В задачах на отношение отрезков, площадей, объемов используется единственность разложения любого вектора в пространстве по трем некомпланарным векторам; в метрические задачи - свойства скалярного произведения векторов.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Координатный метод в пространстве:

- Декартова прямоугольная система координат.
- Декартовы прямоугольные координаты точки.
- Задание фигур уравнениями и неравенствами. Уравнение плоскости. Расстояние от точки до плоскости.
- Уравнение сферы.
- Прямая в пространстве в координатах. Взаимное расположение прямой и плоскости в координатах.

Векторный метод в стереометрии (комбинированные задачи):

- Конус.
- Сфера и трехгранный угол.
- Сфера и куб.

КООРДИНАТНЫЙ МЕТОД В ПРОСТРАНСТВЕ

Декартова прямоугольная система координат в пространстве

Базис $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, который образуют три некопланарных попарно взаимно перпендикулярных единичных вектора $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, называется декартовым прямоугольным базисом векторов в пространстве.

В разложении $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ вектора $\vec{r}$ тройка чисел (x, y, z) называется декартовыми координатами вектора $\vec{r}$ в базисе $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

Для базисных векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ выполняются следующие равенства :

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1 \Rightarrow \vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1;$$

$$\vec{i} \perp \vec{j}, \vec{j} \perp \vec{k}, \vec{k} \perp \vec{i} \Rightarrow \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0;$$

Если даны векторы :

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} \quad \text{и} \quad \vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k},$$

то :

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j} + (z_1 + z_2)\vec{k};$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2)\vec{i} + (y_1 - y_2)\vec{j} + (z_1 - z_2)\vec{k};$$

$$\lambda\vec{a} = (\lambda x_1)\vec{i} + (\lambda y_1)\vec{j} + (\lambda z_1)\vec{k}; \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2;$$

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

- Признак коллинеарности двух векторов :

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = t;$$

- признак перпендикулярности двух векторов :

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0;$$

- длина вектора $\vec{r}(x, y, z)$ находится по формуле :

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

- угол φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ находится с помощью формулы :

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}};$$

Скалярное произведение векторов :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b});$$

Уравнение прямой в пространстве :

$$\frac{x - x_0}{q_1} = \frac{y - y_0}{q_2} = \frac{z - z_0}{q_3} \text{ (каноническое уравнение прямой)}$$

$M(x; y; z)$ – произвольная точка прямой;

$M_0(x_0; y_0; z_0)$ – фиксированная точка прямой;

$\vec{q}(q_1; q_2; q_3)$ – направляющий вектор прямой.

Уравнение прямой, проходящей через точки $(x_1; y_1; z_1)$ и $(x_2; y_2; z_2)$, имеет вид :

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 2. Точка M – центр грани $A_1 B_1 C_1 D_1$. Точки E и H взяты соответственно на отрезках BB_1 и AC так что $BE:BB_1=1:2$, $AH:AC=1:4$.

Задача:

Выбрать ортонормированный базис в пространстве и, пользуясь разложением вектора в этом базисе, найти:

1. длину отрезка: а) AM ; б) EH ; в) MH ;

2. угол между векторами: а) $\overrightarrow{BC_1}$ и $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{A_1 D}$ и $\overrightarrow{BD_1}$; в) $\overrightarrow{HM}$ и $\overrightarrow{CB_1}$;

Решение. Введем ортогональный базис:

$$\vec{i} = \overrightarrow{AB}, \vec{j} = \overrightarrow{AD}, \vec{k} = \overrightarrow{AA_1}$$

при этом

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 2.$$

1. а) $AM = |\overrightarrow{AM}| = \sqrt{\overrightarrow{AM}^2}$. Находим:

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1 M} = \overrightarrow{AA_1} + 0,5 \overrightarrow{A_1 C_1} = \vec{k} + 0,5(\vec{i} + \vec{j}) = 0,5\vec{i} + 0,5\vec{j} + \vec{k}.$$

Учитывая, что $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 2$ и $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 4$,

$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$, получаем:

$$|\overrightarrow{AM}| = \sqrt{(0,5\vec{i} + 0,5\vec{j} + \vec{k})^2} = \sqrt{0,25\vec{i}^2 + 0,25\vec{j}^2 + \vec{k}^2} = \sqrt{0,25 \cdot 4 + 0,25 \cdot 4 + 4} = \sqrt{6}.$$

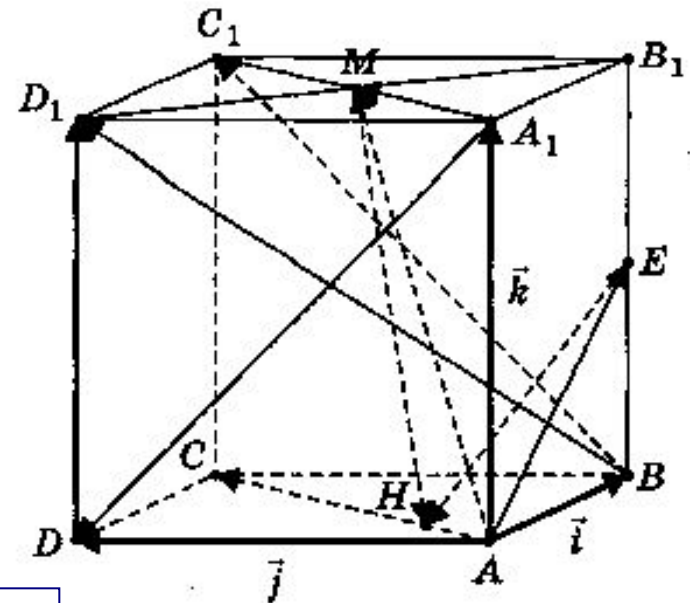
$$\begin{aligned} \text{б) } \overrightarrow{EH} &= \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AE} = 0,25 \overrightarrow{AC} - (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}) = \\ &= 0,25(\vec{i} + \vec{j}) - (\vec{i} + 0,5\vec{k}) = -0,75\vec{i} + 0,25\vec{j} - 0,5\vec{k}. \end{aligned}$$

Тогда

$$EH = |\overrightarrow{EH}| = \sqrt{\overrightarrow{EH}^2} = \sqrt{(-0,75\vec{i} + 0,25\vec{j} - 0,5\vec{k})^2} = \frac{\sqrt{14}}{2}.$$

в) Аналогично находим:

$$\overrightarrow{MH} = |\overrightarrow{MH}| = \sqrt{\overrightarrow{MH}^2} = \sqrt{(-0,25\vec{i} - 0,25\vec{j} - \vec{k})^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$



Продолжение
решения

2. а) Обозначим: $\angle(\overrightarrow{BC_1}; \overrightarrow{AC}) = \alpha$. Тогда :

$$\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{BC_1} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{BC_1}| \cdot |\overrightarrow{AC}|}.$$

Находим :

$$\overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{AD_1} = \vec{j} + \vec{k}; \overrightarrow{AC} = \vec{j} + \vec{i};$$

$$\overrightarrow{BC_1} \cdot \overrightarrow{AC} = (\vec{j} + \vec{k}) \cdot (\vec{j} + \vec{i}) = \vec{j} \cdot \vec{i} + \vec{j}^2 + \vec{k} \cdot \vec{i} + \vec{k} \cdot \vec{j} = \vec{j}^2 = |\vec{j}|^2 = 4;$$

$$|\overrightarrow{BC_1}| = \sqrt{|\overrightarrow{BC_1}|^2} = \sqrt{(\vec{j} + \vec{k})^2} = \sqrt{\vec{j}^2 + 2\vec{j}\vec{k} + \vec{k}^2} = 2\sqrt{2};$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{|\overrightarrow{AC}|^2} = \sqrt{(\vec{j} + \vec{i})^2} = \sqrt{\vec{j}^2 + 2\vec{j}\vec{i} + \vec{i}^2} = 2\sqrt{2}.$$

Получаем:

$$\cos \alpha = \frac{4}{2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}, \text{ откуда :}$$

$$\angle(\overrightarrow{BC_1}; \overrightarrow{AC}) = 60^\circ.$$

Аналогично можно найти углы между векторами $\overrightarrow{A_1D}$ и $\overrightarrow{BD_1}$, $\overrightarrow{HM}$ и $\overrightarrow{CB_1}$.

$$\text{ОТВЕТ : 1. а) } \sqrt{6}; \text{ б) } \frac{\sqrt{14}}{2}; \text{ в) } \frac{3\sqrt{2}}{2};$$

$$2. \text{ а) } 60^\circ.$$

ДЕКАРТОВЫ ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ ТОЧКИ

Базисными векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, отложенными от точки O , определяется декартова прямоугольная система координат. Декартовыми прямоугольными координатами точки M в системе координат $Oxyz$ называются координаты ее радиус-вектора $\vec{OM}$ в прямоугольном базисе $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Записывают: $M(x; y; z)$.

Если заданы точки $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$, то находятся: $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$.

- Расстояние между точками A и B :

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2};$$

- Длина вектора $\vec{AB}$:

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2};$$

- координаты точки $C(x; y; z)$, делящей отрезок AB в данном отношении $\lambda (\lambda \neq 1)$:

В частности, если точка C - середина отрезка AB ($\lambda = 1$), то:

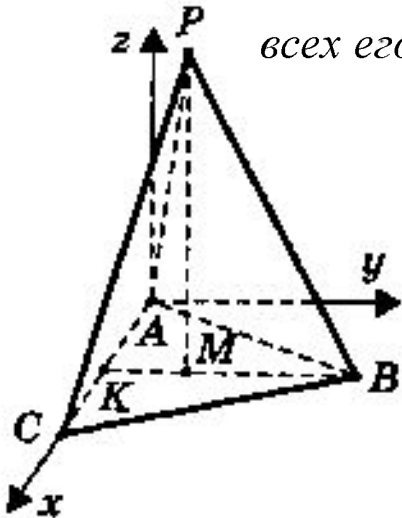
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}, z = \frac{z_1 + z_2}{2};$$

- координаты центра тяжести треугольника

ABC , где $C(x_3; y_3; z_3)$:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, z = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}.$$

Основание ABC правильного тетраэдра $PABC$ лежит в плоскости Oxy так, что вершины A и C имеют координаты $A(0;0;0)$, $C(4;0;0)$.
Найти координаты : а) остальных вершин тетраэдра; б) центроидов всех его граней.



Пусть M – центроид треугольника ABC . Находим :
 $K(2;0;0)$ – середина AC , $AC = 4$. Отрезок BK – медиана правильного треугольника ABC , следовательно, $BK \perp AC \Rightarrow BK \perp Ox$.

Значит, $BK \parallel Oy$, причем $BK = \frac{AC\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.

Тогда точка B имеет координаты $B(2;2\sqrt{3};0)$.

Известно, что для любой точки S пространства и центроида M треугольника ABC имеет место соотношение $\vec{SM} = \frac{1}{3}(\vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC})$.

Приняв в качестве S точку A , получаем :

$$\vec{AM} = \frac{1}{3}(\vec{AA} + \vec{AB} + \vec{AC}), \text{ значит, } \vec{AM} \left(2; \frac{2\sqrt{3}}{3}; 0\right),$$

откуда $M \left(2; \frac{2\sqrt{3}}{3}; 0\right)$ – центроид грани ABC .

Учитывая, что высота правильного тетраэдра

с ребром a равна $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ и $MP \perp Oxy$, находим :

$$MP = \frac{4\sqrt{6}}{3}, \text{ тогда } P \left(2; \frac{2\sqrt{3}}{3}; \frac{4\sqrt{6}}{3}\right).$$

Пусть M_1, M_2, M_3 – центроиды граней соответственно PAB, PBC, PAC . Применим соотношение

$$\vec{SM} = \frac{1}{3}(\vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC}), \text{ справедливое для любой точки } S$$

пространства и центроида M треугольника ABC , последовательно для пар : M_1 и треугольника

PAB, M_2 и треугольника PBC, M_3 и треугольника PAC , взяв вместо S точку A . Получим координаты центроидов M_1, M_2, M_3 :

$$M_1 \left(\frac{4}{3}; \frac{8\sqrt{3}}{9}; \frac{4\sqrt{6}}{9}\right), \quad M_2 \left(\frac{8}{3}; \frac{8\sqrt{3}}{9}; \frac{4\sqrt{6}}{9}\right), \\ M_3 \left(2; \frac{2\sqrt{3}}{9}; \frac{4\sqrt{6}}{9}\right).$$

ЗАДАНИЕ ФИГУР УРАВНЕНИЯМИ И НЕРАВЕНСТВАМИ.

УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ.

РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПЛОСКОСТИ.

- ❖ Для составления уравнения сферы достаточно знать или найти координаты ее центра и радиус.
- ❖ Для составления общего уравнения плоскости достаточно знать или найти координаты любой ее точки и координаты любого вектора, перпендикулярного к этой плоскости (вектор нормали к плоскости), при этом в качестве вектора нормали выбирается тот, координаты которого наиболее удобны при вычислениях, возникающих при составлении уравнения.

Расстояние d от точки M_0 до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ находится по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Пользуясь этой формулой, можно находить расстояние между параллельными плоскостями, между параллельными прямой и плоскостью, между скрещивающимися прямыми.

Если плоскость происходит через данную точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ параллельно данной плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, то ее уравнение можно записать в виде, $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$, затем преобразовать.

Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-1;2;1)$ и параллельной плоскости : а) Oxy ; , б) Oyz ; в) Oxz ; г) $2x - y + 3z + 5 = 0$.

а) Уравнение координатной плоскости Oxy имеет вид : $z = 0$. Вектором нормали к этой плоскости служит вектор $\vec{k}(0;0;1)$. Так как плоскость, проходящая через точку $M(-1;2;1)$, параллельна плоскости Oxy , то эта плоскость также перпендикулярна вектору $\vec{k}(0;0;1)$, который является оптимально удобным при выборе ее вектора нормали. Составляем уравнение этой плоскости :

$$0(x+1) + 0(y-2) + 1(z-1) = 0 \Leftrightarrow z-1 = 0.$$

Аналогично получаем уравнения : б) $x+1 = 0$; в) $y-2 = 0$.

г) Из уравнения плоскости $2x - y + 3z + 5 = 0$ следует, что вектор $\vec{n}(2;-1;3)$ является ее вектором нормали. Его принимаем в качестве вектора нормали плоскости β , проведенной через точку $M(-1;2;1)$ параллельно данной плоскости. Составляем уравнение плоскости β :

$$2(x+1) - 1(y-2) + 3(z-1) = 0,$$

$$2x - y + 3z + 1 = 0.$$

Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M(1;3;8)$ и $N(2;5;-1)$ перпендикулярной плоскости $2x - y + z = 0$.

Так как плоскость α проходит через точки $M(1;3;8)$, $N(2;5;-1)$ и перпендикулярна плоскости $2x - y + z = 0$, для которой вектор $\vec{p}(2;-1;1)$ является вектором нормали, то в качестве вектора $\vec{n}(a;b;c)$ нормали плоскости α можно принять вектор, перпендикулярный векторам $\vec{MN}(1;2;-9)$ и $\vec{p}(2;-1;1)$. Имеем :

$$\vec{n} \perp \vec{MN}, \vec{n} \perp \vec{p} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{MN} = 0, \vec{n} \cdot \vec{p} = 0,$$

поэтому координаты a, b и c вектора $\vec{n}$ получаем, решая систему уравнений

$$\begin{cases} a + 2b - 9c = 0, \\ 2a - b + c = 0. \end{cases}$$

Пусть $c = 1$, тогда получаем систему уравнений

$$\begin{cases} a + 2b = 9, \\ 2a - b = -1, \end{cases} \text{ решением которой является } b = \frac{19}{5}, a = \frac{7}{5}.$$

Значит, вектор $\vec{n}$ имеет координаты $\vec{n}(\frac{7}{5}; \frac{19}{5}; 1)$.

Заменим этот вектор коллинеарным вектором $\vec{n}_1(7;9;5)$ с целыми координатами и составим уравнение плоскости α :

$$7(x-1) + 19(y-3) + 5(z-8) = 0,$$

$$x + 19y + 5z - 104 = 0.$$

Угол между двумя плоскостями α и β , заданными уравнениями соответственно $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, взаимосвязан с углом между их векторами нормалей $\vec{n}_1(A_1; B_1; C_1)$ и $\vec{n}_2(A_2; B_2; C_2)$ и находится с помощью формулы :

$$\cos \angle(\alpha; \beta) = \left| \cos \angle(\vec{n}_1; \vec{n}_2) \right| = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

УРАВНЕНИЕ СФЕРЫ

Сфера (поверхность шара) задается уравнением:

Задача:

Найти геометрическое место точек, удаленных от плоскости $x+2y-2z-5=0$ на расстояние, равное 2.

Пусть уравнением $x+2y-2z-5=0$ задана плоскость α , $M(a;b;c)$ – любая точка искомого множества точек. Тогда имеем :

$$\rho(M;\alpha) = 2 \Leftrightarrow \frac{|a+2b-2c-5|}{3} = 2, \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+2b-2c-5=6 \\ a+2b-2c-5=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+2b-2c=11; \\ a+2b-2c=-1. \end{cases}$$

При $b=c=1$ получаем $a=-1$ или $a=11$. Значит, искомому множеству точек принадлежат точки $M_1(-1;1;1)$ и $M_2(11;1;1)$.

Так как множество всех точек пространства, равноудаленных от данной плоскости, представляет собой две плоскости, параллельные данной, то одна из них происходит через точку M_1 и имеет уравнение

$$(x+1)+2(y-1)-2(z-1)=0 \Leftrightarrow x+2y-2z+1=0,$$

а другая проходит через точку M_2 ; ей соответствует уравнение

$$(x-11)+2(y-1)-2(z-1)=0 \Leftrightarrow x+2y-2z-11=0.$$

ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ В КООРДИНАТАХ. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ В КООРДИНАТАХ.

При решении задач на взаимное расположение двух прямых a и b в пространстве учащиеся должны научиться видеть направляющие векторы соответственно $\vec{p}_1(a_1; a_2; a_3)$ и $\vec{p}_2(b_1; b_2; b_3)$ этих прямых из их параметрических уравнений и определять, параллельны ли они (используя признак: $a \parallel b \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$), а также перпендикулярны ли эти прямые (используя признак: $a \perp b \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$). Если прямые не параллельны и не перпендикулярны, то угол между ними находится с помощью формулы

$$\cos \varphi = \frac{|a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

Аналогично, зная направляющий вектора $\vec{p}(a; b; c)$ прямой l и вектор $\vec{n}(A; B; C)$ нормали плоскости α , можно определить, параллельны ли они (с помощью признака $l \parallel \alpha \Leftrightarrow a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C = 0$), а также перпендикулярны ли (с помощью признака $l \perp \alpha \Leftrightarrow \frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C}$). Если данная прямая и плоскость не параллельны и не перпендикулярны, то угол между ними находится с помощью формулы

$$\sin \angle(l; \alpha) = \left| \cos \angle(\vec{p}; \vec{n}) \right| = \frac{|a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Найти координаты точки, равноудаленной от всех вершин тетраэдра, $PABC$, заданных координатами: $A(0;0;0)$, $B(8;0;0)$, $C(0;-2;0)$, $P(0;0;-6)$.

Заметим, что расстояние от данной точки до вершин тетраэдра будет являться радиусом описанной около него окружности.

Множеством всех точек пространства, равноудаленных от точек A и B , является плоскость серединных перпендикуляров отрезка AB .

Поэтому искомой является точка пересечения плоскостей серединных перпендикуляров трех любых ребер тетраэдра, не лежащих в одной плоскости.

Пусть α , β , γ – плоскости серединных перпендикуляров ребер соответственно AB , BC , AP тетраэдра $ABCP$; K , H , M – середины соответственно этих ребер.

Находим: $\overrightarrow{AB}(8;0;0)$, $\overrightarrow{CB}(8;2;0)$ и $\overrightarrow{PA}(0;0;6)$ – векторы, перпендикулярные соответственно плоскостям α , β и γ ; $K(4;0;0)$, $H(4;-1;0)$, $M(0;0;-3)$.

Для составления уравнений плоскостей α , β и γ в качестве векторов нормалей стоит взять векторы

$$\vec{n}_1(1;0;0) \parallel \overrightarrow{AB}, \quad \vec{n}_2(4;1;0) \parallel \overrightarrow{CB}, \quad \vec{n}_3(0;0;1) \parallel \overrightarrow{PA}.$$

Тогда уравнения плоскостей α , β и γ соответственно таковы:

$$x - 4 = 0, \quad 4x + y - 15 = 0, \quad z + 3 = 0.$$

Решением этой системы является тройка чисел: $x = 4$, $y = -1$, $z = -3$.

Значит, равноудаленной от всех вершин тетраэдра $PABC$ является точка $T(4;-1;3)$.

Причем удалена эта точка от вершин на расстояние, равное $TA = \sqrt{16+1+9} = \sqrt{26}$.

ВЕКТОРНЫЙ МЕТОД В СТЕРЕОМЕТРИИ

Стереометрические задачи, основанные на применении векторов, встречаются достаточно часто и в ЕГЭ по математике, и во вступительных экзаменах в различные вузы, на олимпиадах и конкурсах.

На ребрах DA , DB и DC тетраэдра $ABCD$ взяты точки M , N и K так, что $DM = 1/3DA$, $DN = 1/4DB$, $DK = 3/5DC$. Пусть G – точка пересечения медиан треугольника ABC . В каком соотношении плоскость MNK делит отрезок DG ?

Задача:

Пусть $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$. Плоскость MNK пересекает DG в точке P , $\overrightarrow{DP} = \lambda \overrightarrow{DG}$.

Выразим $\overrightarrow{DG}$ через $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Если Q – середина BC , то

$\overrightarrow{AQ} = 1/2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$. Значит, $\overrightarrow{AG} = 2/3\overrightarrow{AQ} = 1/3(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

Находим $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AG} = \vec{a} + 1/3((\vec{b} - \vec{a}) + (\vec{c} - \vec{a})) = 1/3(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

Значит, $\overrightarrow{DP} = \lambda/3(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$. Поскольку точка P принадлежит плоскости

MNK , $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$, то $\overrightarrow{MP}$ можно разложить по векторам $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{MK}$,

$\overrightarrow{MP} = x\overrightarrow{MN} + y\overrightarrow{MK}$. Следовательно,

$\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MP} = 1/3\vec{a} + x(\overrightarrow{DN} - \overrightarrow{DM}) + y(\overrightarrow{DK} - \overrightarrow{DM}) = 1/3\vec{a} + x(1/4\vec{b} - 1/3\vec{a}) + y(3/5\vec{c} - 1/3\vec{a}) = 1/3(1 - x - y)\vec{a} + 1/4x\vec{b} + 3/5y\vec{c}$.

Приравняем друг к другу два полученных представления $\overrightarrow{DP}$:

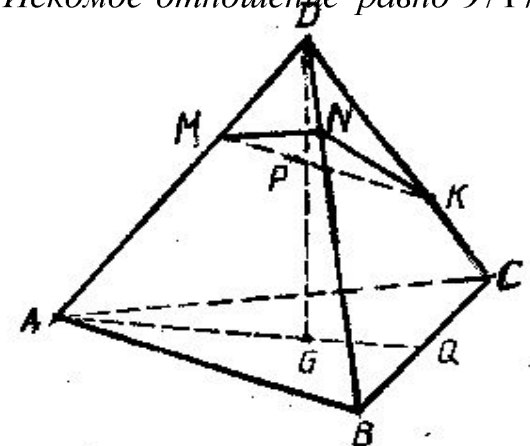
$\lambda/3(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = 1/3(1 - x - y)\vec{a} + 1/4x\vec{b} + 3/5y\vec{c}$.

Ввиду единственности разложения любого вектора по трем некопланарным векторам будем иметь систему

$$\lambda = (1 - x - y), \quad \frac{\lambda}{3} = \frac{x}{4}, \quad \frac{\lambda}{3} = \frac{3}{5}y,$$

откуда $y = 9/26$.

Искомое отношение равно $9/17$.



КОНУСЫ

Заметим, что оси симметрии двух касающихся конусов и образующая, по которой они касаются, лежат в одной плоскости (это следствие того, что плоскость, задаваемая двумя осями OA и OB , является плоскостью симметрии для каждого из двух конусов).

Введем теперь в качестве базисных три вектора $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$, принадлежащие осям симметрии конусов и такие, что $|\vec{l}_1| = |\vec{l}_2| = |\vec{l}_3| = 1$. Таблица умножения векторов базиса в данном случае будет иметь вид :

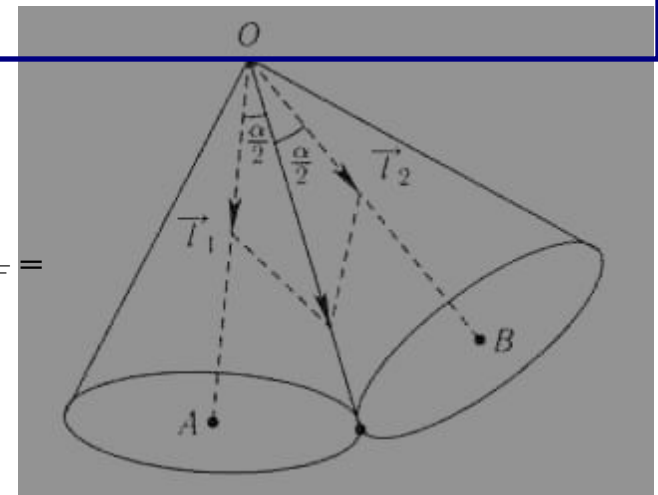
	$\vec{l}_1$	$\vec{l}_2$	$\vec{l}_3$
$\vec{l}_1$	1	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$
$\vec{l}_2$	$\cos \alpha$	1	$\cos \alpha$
$\vec{l}_3$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	1

Векторы $\vec{a} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2$, $\vec{b} = \vec{l}_2 + \vec{l}_3$, $\vec{c} = \vec{l}_1 + \vec{l}_3$, как легко видеть, принадлежат образующим, по которым касаются конусы. Тогда косинус искомого угла φ может быть вычислен

$$\begin{aligned} \text{следующим образом : } \cos \varphi &= \cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{(\vec{l}_1 + \vec{l}_2) \cdot (\vec{l}_2 + \vec{l}_3)}{\sqrt{((\vec{l}_1 + \vec{l}_2)^2)} \sqrt{(\vec{l}_3 + \vec{l}_2)^2}} = \\ &= \frac{3 \cos \alpha + 1}{\sqrt{2 + 2 \cos \alpha} \sqrt{2 + 2 \cos \alpha}} = \frac{3 \cos \alpha + 1}{2 \cos \alpha + 2} \Rightarrow \varphi = \arccos \frac{3 \cos \alpha + 1}{2 \cos \alpha + 2}. \end{aligned}$$

Ответ : $\varphi = \arccos \frac{3 \cos \alpha + 1}{2 \cos \alpha + 2}.$

Три прямых круговых конуса с углом α при вершине осевого сечения имеют общую вершину и попарно касаются друг друга. Найдите углы между образующими, по которым касаются эти конусы.



ЗАДАЧИ СО СФЕРОЙ.

СФЕРА И ТРЕХГРАННЫЙ УГОЛ (СФЕРА, КАСАЮЩАЯСЯ РЕБЕР ТЕТРАЭДРА ИЛИ ТРЕУГОЛЬНОЙ ПИРАМИДЫ).

В треугольной пирамиде $DABC$ известны углы при вершине D :

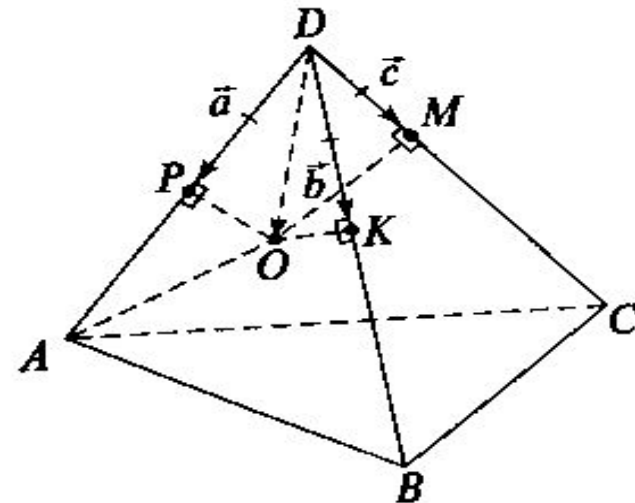
$$\angle ADB = \angle ADC = \frac{\pi}{2}, \angle BDC = \frac{\pi}{3}. \text{ Длина ребра } DA \text{ равна } 2/3.$$

Сфера с центром O касается ребер DA , DB и DC пирамиды.

Расстояние от вершины A пирамиды до центра O сферы равно $2/3$. Найти радиус сферы.

Пусть сфера касается ребер DA , DB , DC пирамиды в точках P , K , M соответственно. Тогда $DP = DK = DM$ (как отрезки касательных, проведенных к сфере из одной точки – вершины D пирамиды). Пусть $DP = l$ ($l > 0$). Выберем в качестве базисные векторы $\overrightarrow{DP} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DK} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DM} = \vec{c}$ и составим таблицу умножения векторов базиса:

	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$
$\vec{a}$	l^2	0	0
$\vec{b}$	0	l^2	$l^2/2$
$\vec{c}$	0	$l^2/2$	l^2



[Продолжение
решения](#)

2. Пусть $\overrightarrow{DO} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$. Заметим, что $\overrightarrow{OP} = \vec{a} - \overrightarrow{DO}$,

$\overrightarrow{OK} = \vec{b} - \overrightarrow{DO}$, $\overrightarrow{OM} = \vec{c} - \overrightarrow{DO}$. Так как $\overrightarrow{OP} \perp \vec{a}$, получаем

$\overrightarrow{OP} \cdot \vec{a} = 0$, $\overrightarrow{OK} \cdot \vec{b} = 0$, $\overrightarrow{OM} \cdot \vec{c} = 0$. Таким образом, имеем систему :

$$\begin{cases} (\vec{a} - \overrightarrow{DO})\vec{a} = 0, & \vec{a} \cdot \overrightarrow{DO} = \vec{a}^2, \\ (\vec{b} - \overrightarrow{DO})\vec{b} = 0, & \Leftrightarrow \vec{b} \cdot \overrightarrow{DO} = \vec{b}^2, \\ (\vec{c} - \overrightarrow{DO})\vec{c} = 0. & \vec{c} \cdot \overrightarrow{DO} = \vec{c}^2. \end{cases}$$

Используя таблицу умножения базисных векторов и сокращая на l^2 , получим систему :

$$\begin{cases} y + 1/2z = 1, \\ 1/2y + z = 1, \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 2/3, \\ z = 2/3. \end{cases}$$

Следовательно, $\overrightarrow{DO} = 1/3(3\vec{a} + 2\vec{b} + 2\vec{c})$. Далее, $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DO}$,

но $\overrightarrow{DA} = \frac{2\vec{a}}{3l}$, поэтому $\overrightarrow{OA} = \frac{2\vec{a}}{3l} - 1/3(3\vec{a} + 2\vec{b} + 2\vec{c}) = 1/3[(2/l - 3)\vec{a} - 2\vec{b} - 2\vec{c}]$

Значит, $\overrightarrow{OA}^2 = \frac{l^2}{9}[(2/l - 3)^2 + 4 + 4 + 4]$ по условию $\overrightarrow{OA}^2 = \frac{4}{9}$.

Поэтому $l^2(\frac{4}{l^2} - \frac{12}{l} + 21) = 4 \Rightarrow 21l^2 - 12l = 0 \Rightarrow l = \frac{4}{7}$.

Тогда из теоремы Пифагора следует, что :

$$OP = \sqrt{OA^2 - AP^2} = \sqrt{4/9 - (DA - DP)^2} = \sqrt{\frac{4}{9} - (\frac{2}{3} - \frac{4}{7})^2} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{22}{7}}.$$

ЗАДАЧИ СО СФЕРОЙ. СФЕРА, ОПИСАННАЯ ВОКРУГ ТЕТРАЭДРА ИЛИ ТРЕУГОЛЬНОЙ ПИРАМИДЫ.

*В треугольной пирамиде ребра DA, DB, DC, BC равны между собой и равны 2, $AC = \sqrt{6}$, $AB = 2\sqrt{2}$.
Найти радиус сферы, описанной вокруг этой пирамиды.*

Найдем сначала плоские углы (их косинусы) при вершине D .

Так как $DB = DC = BC$, то $\angle BDC = \frac{\pi}{3}$. Так как $DA^2 + DB^2 =$

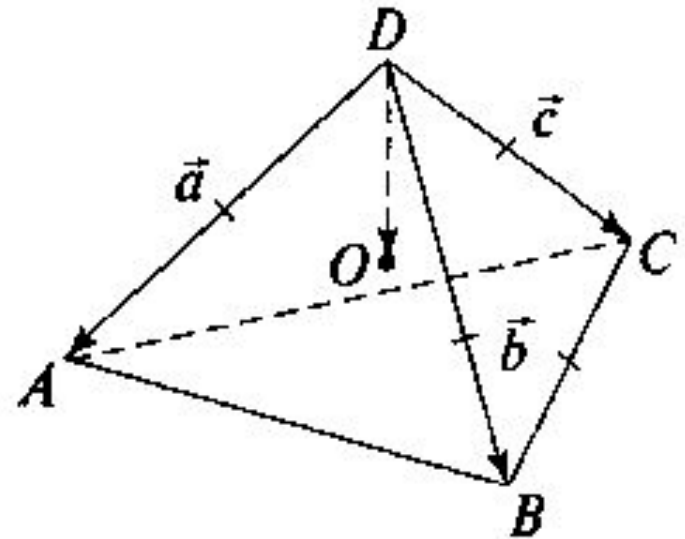
$4 + 4 = 8 = AB^2$, то $\angle ADB = \frac{\pi}{2}$ (по теореме, обратной теореме

Пифагора). По следствию из теоремы косинусов для треугольника ABC имеем

$$\cos \angle ADC = \frac{DA^2 + DC^2 - AC^2}{2DA \cdot DC} = \frac{4 + 4 - 6}{2 \cdot 2 \cdot 2} = 1/4.$$

Выберем в качестве базисных векторы $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$ и составим таблицу умножения векторов базиса:

	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$
$\vec{a}$	4	0	1
$\vec{b}$	0	4	2
$\vec{c}$	1	2	4



Продолжение
решения

Пусть точка O – центр описанной около тетраэдра $DABC$ сферы, R – ее радиус, и пусть $\overrightarrow{DO} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$.

Система в данном случае имеет вид:

$$\begin{cases} \vec{a}(x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}) = 2 \\ \vec{b}(x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}) = 2 \\ \vec{c}(x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}) = 2, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} 4x + z = 2, \\ 4y + 2z = 2, \\ x + 2y + 4z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z, \\ y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z, \\ 1 - z + 1/2 - 1/4z + 4z = 2. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z, \\ y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z, \\ z = \frac{2}{11}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{11}, \\ y = \frac{9}{22}, \\ z = \frac{2}{11}. \end{cases}$$

Следовательно, $\overrightarrow{DO} = \frac{1}{22}(10\vec{a} + 9\vec{b} + 4\vec{c})$ и

$$R = |\overrightarrow{DO}| = \sqrt{\overrightarrow{DO}^2} = \frac{1}{22} \sqrt{(10\vec{a} + 9\vec{b} + 4\vec{c})^2} = \frac{1}{22} \sqrt{1012} = \frac{\sqrt{253}}{11}.$$

ЗАДАЧИ СО СФЕРОЙ. СФЕРА И КУБ.

Задача:

Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 1. Найти радиус сферы, проходящей через вершину A , середины ребер DC и BB_1 и центр грани $A_1 B_1 C_1 D_1$.

Введем систему координат с началом в вершине A , выбрав оси так, чтобы вершины B , D и A_1 имели соответственно координаты $(1;0;0)$, $(0;1;0)$ и $(0;0;1)$.

Координаты середин ребер DC и BB_1 соответственно $(0,5;1;0)$, $(1;0;0,5)$, центра грани $A_1 B_1 C_1 D_1$ – $(0,5;0,5;1)$.

Уравнение сферы с центром $(x_0; y_0; z_0)$ и радиусом r имеет вид $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$.

Поскольку сфера содержит начало координат, то $d = 0$. Для a , b и c легко получить систему уравнений

$$\begin{cases} 5/4 + 1/2a + b = 0, \\ 5/4 + a + 1/2c = 0, \\ 3/2 + 1/2a + 1/2b + c = 0. \end{cases}$$

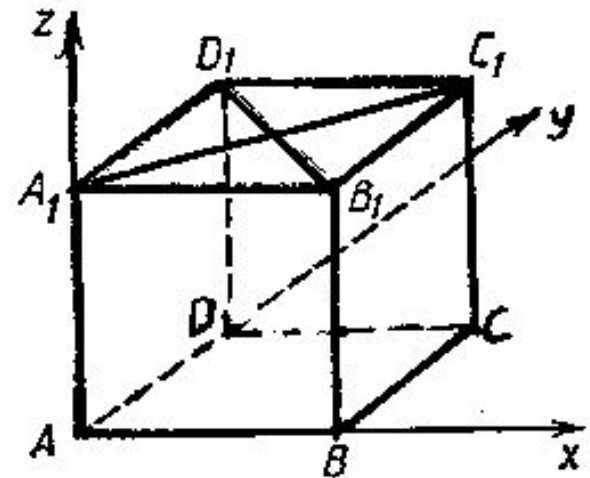
$$\Rightarrow a = -\frac{13}{14}, b = -\frac{11}{14}, c = -\frac{9}{14}.$$

Таким образом, уравнение сферы имеет вид:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 13/14x - 11/14y - 9/14z = 0,$$

$$(x - 13/28)^2 + (y - 11/28)^2 + (z - 9/28)^2 = 371/28^2.$$

Искомый радиус равен $\sqrt{371}/28$.



ВЫВОДЫ

- ❖ **Координатный и векторный методы удобно применять в решении задач, в которых трудно построить расстояние от точки до прямой или от точки до плоскости, и в задачах с многогранниками, к которым естественно привязать прямоугольную систему координат (куб, параллелепипед, пирамида).**
- ❖ **Использование данных методов позволяет найти нужную величину с наименьшими затратами времени и найти оригинальное решение для сложных задач (например, в которых вокруг многогранника или трехгранного угла описана сфера или шар).**

***Спасибо
за внимание!***

[Использованная литература](#)