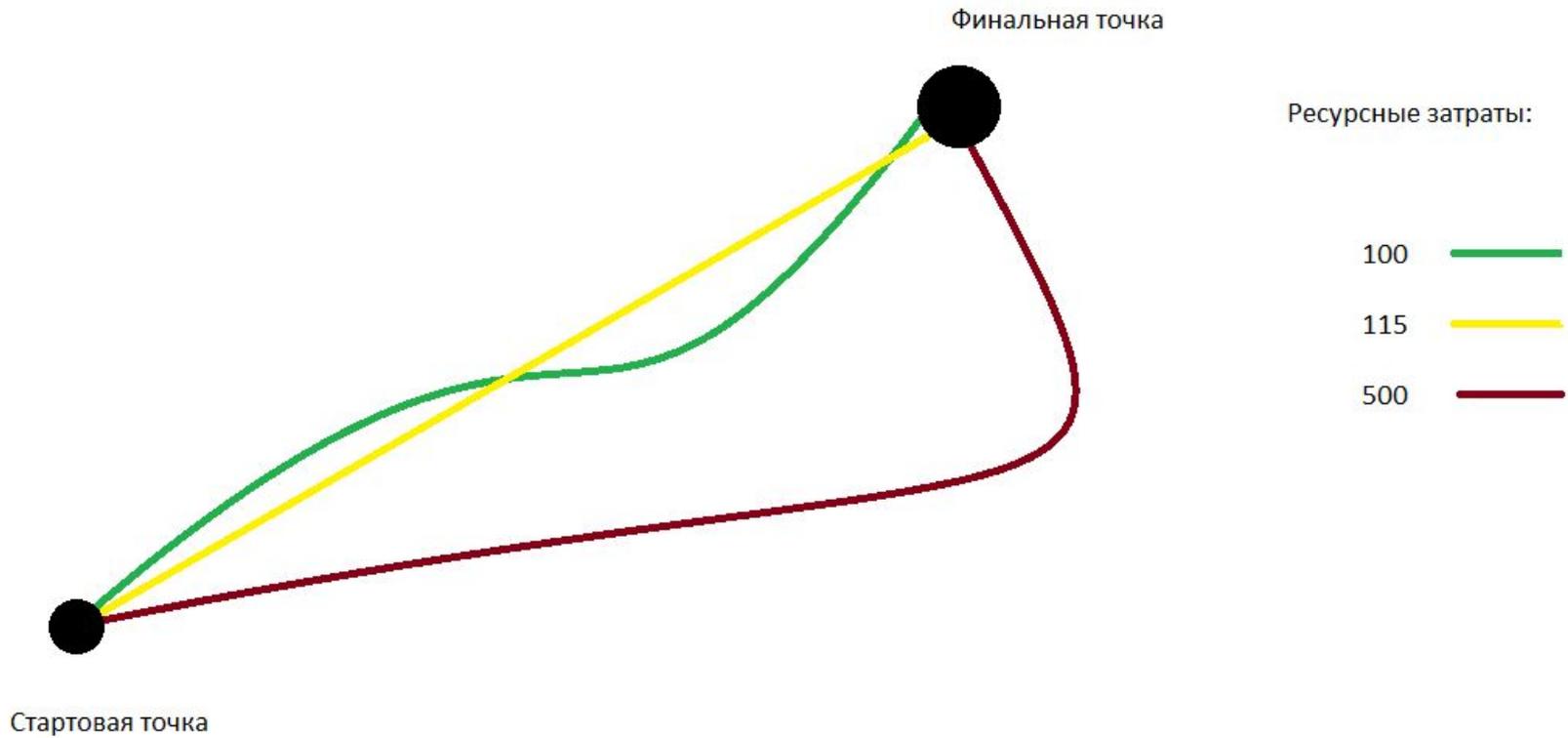


# Управление ракетой-носителем

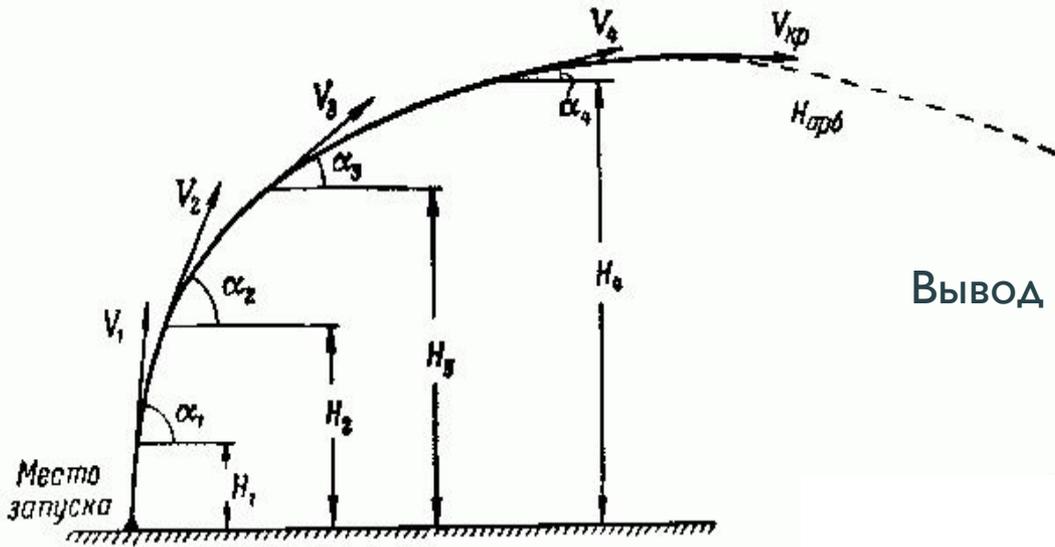
Ракетная техника глазами математика

# Задача оптимального управления

---

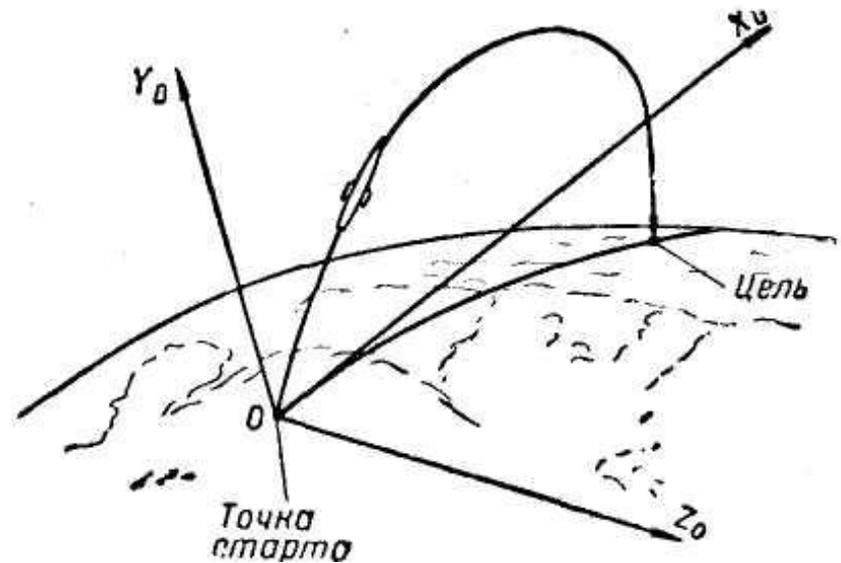


# Задача управления ракетой



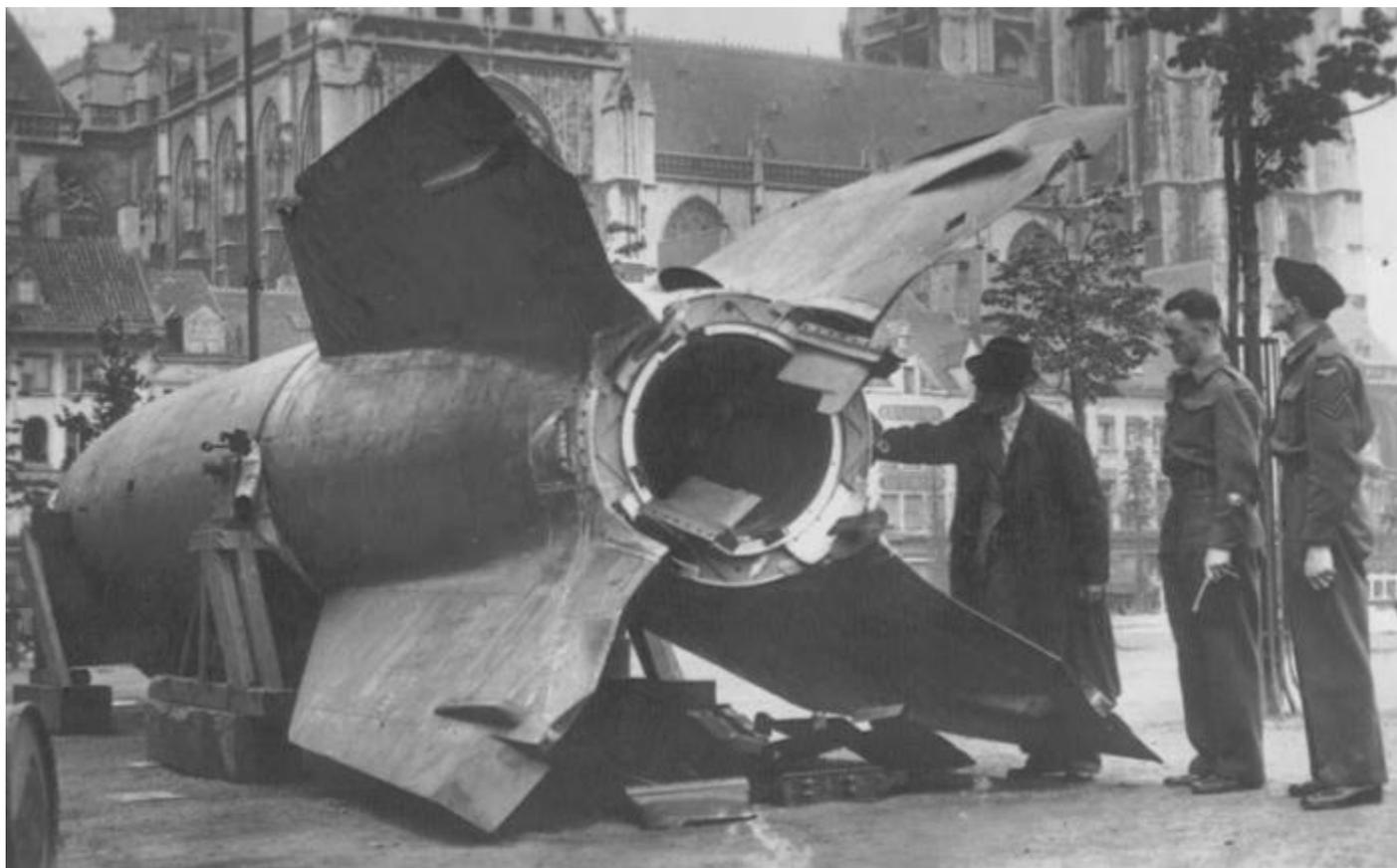
Вывод полезной нагрузки на орбиту

Максимальная дальность (МБР)



# Средства управления

---



ФАУ-2: графитовые рули в реактивной струе  
двигателя

---



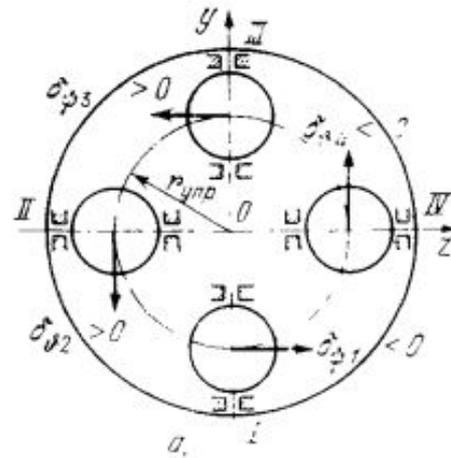


Space Shuttle: управляемый вектор тяги основных ЖРД

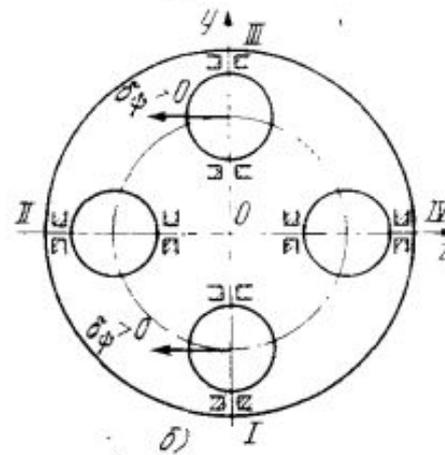


Сатурн-5: управление вектором тяги

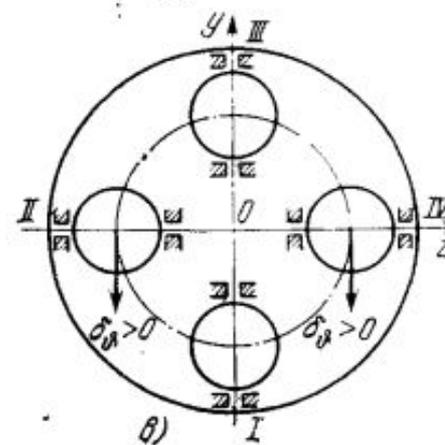




По крену



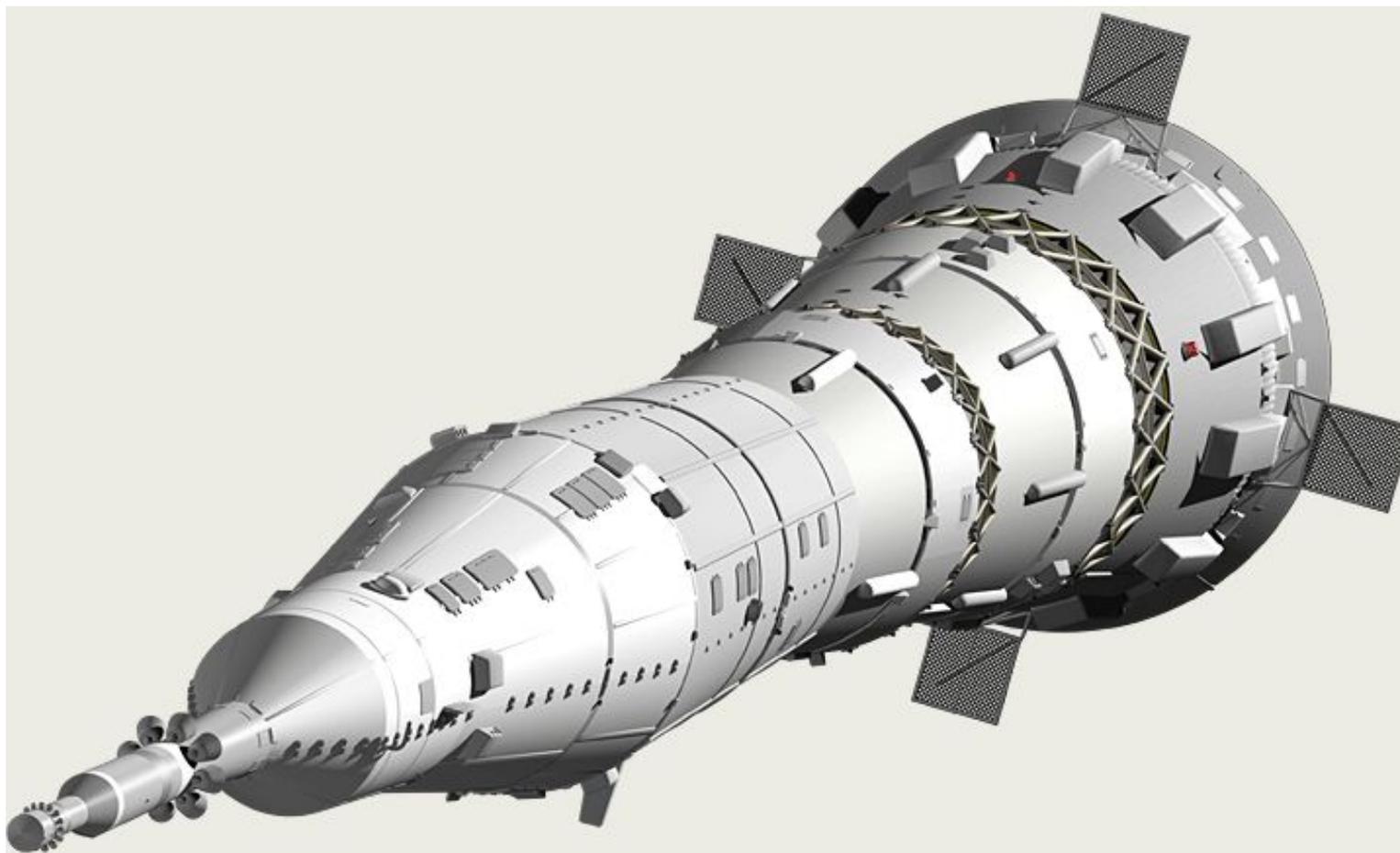
По тангажу



По рысканью

Создание управляющего момента:

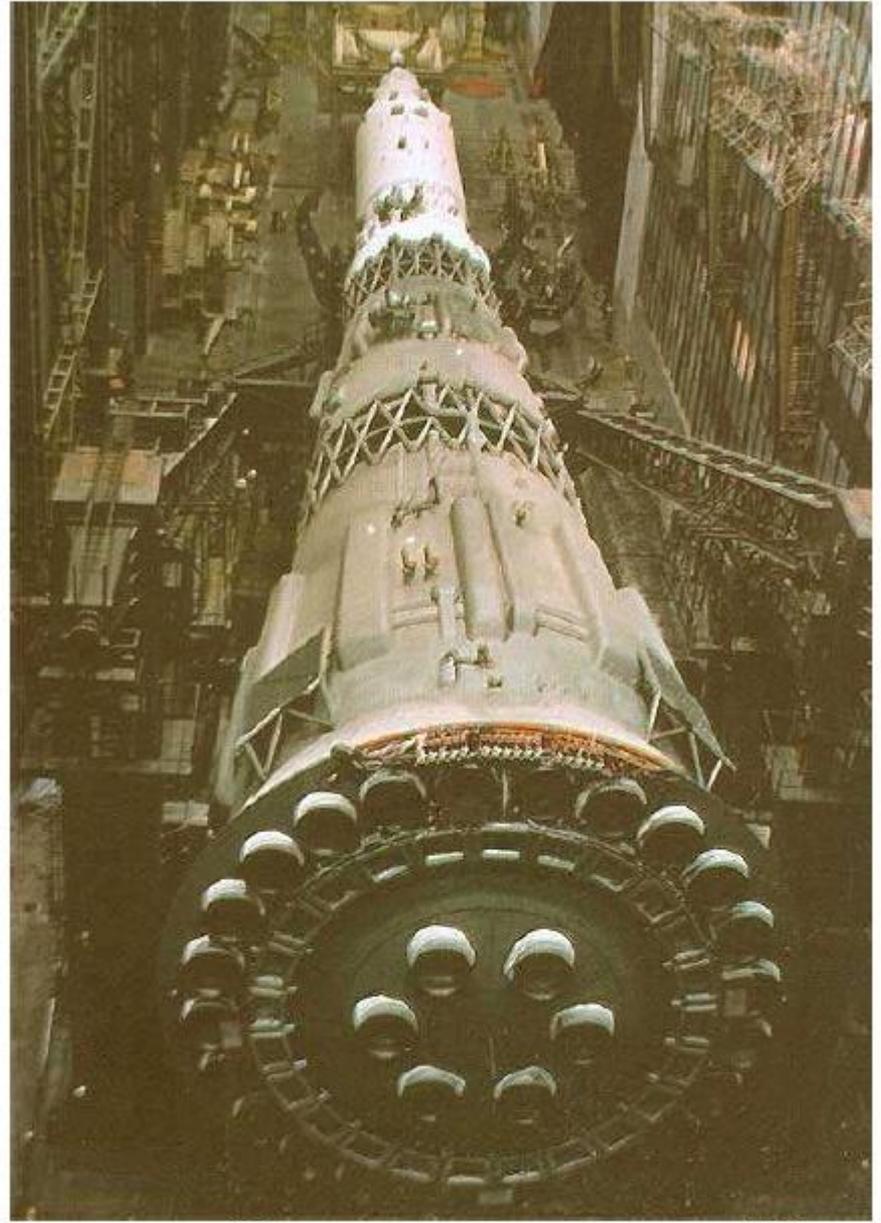




Н-1: решетчатые аэродинамические рули



Создание управляющего момента  
разностью двигателей по окружности



# Нестандартные схемы

---

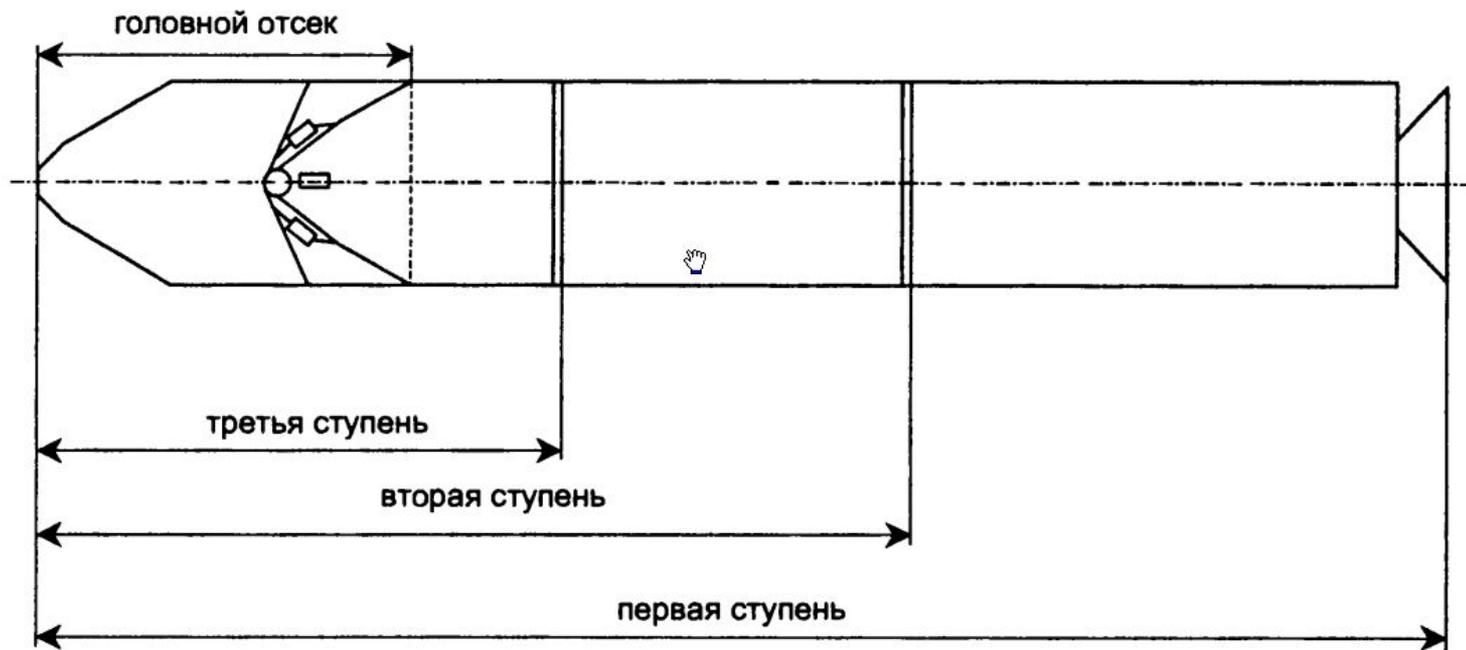


Рис. 6.2

15Ж60: управление отклонением головного отсека

---





Falcon-9: посадка первой ступени с решетчатыми АД-рулями



Ламбда-4s





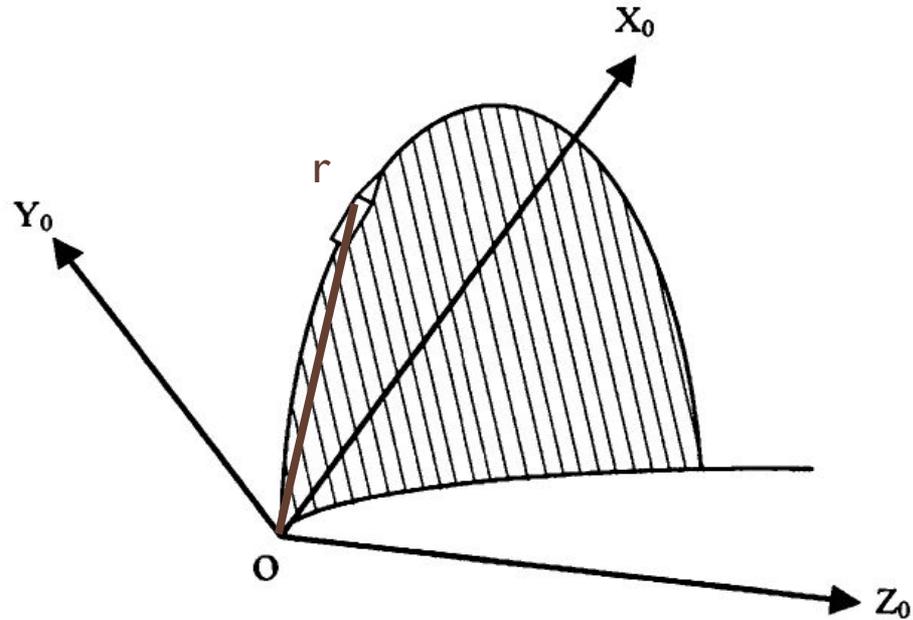
# Математическая модель центра масс ракеты

---

$$\bar{F} = m \cdot \bar{a}$$

$$\bar{F} = m \cdot \frac{d\bar{r}}{dt}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{F_x}{m} = \frac{d^2 x}{dt^2}; \\ \frac{F_y}{m} = \frac{d^2 y}{dt^2}; \\ \frac{F_z}{m} = \frac{d^2 z}{dt^2}; \end{array} \right.$$



# Система дифференциальных уравнений

---

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dV_x}{dt}$$

Ускорение есть скорость скорости

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dV_x}{dt} = \frac{F_x}{m} \\ \frac{dV_y}{dt} = \frac{F_y}{m} \\ \frac{dV_z}{dt} = \frac{F_z}{m} \\ \frac{dx}{dt} = V_x \\ \frac{dy}{dt} = V_y \\ \frac{dz}{dt} = V_z \end{array} \right.$$

Разделение уравнений



# Действующие силы: тяга

---

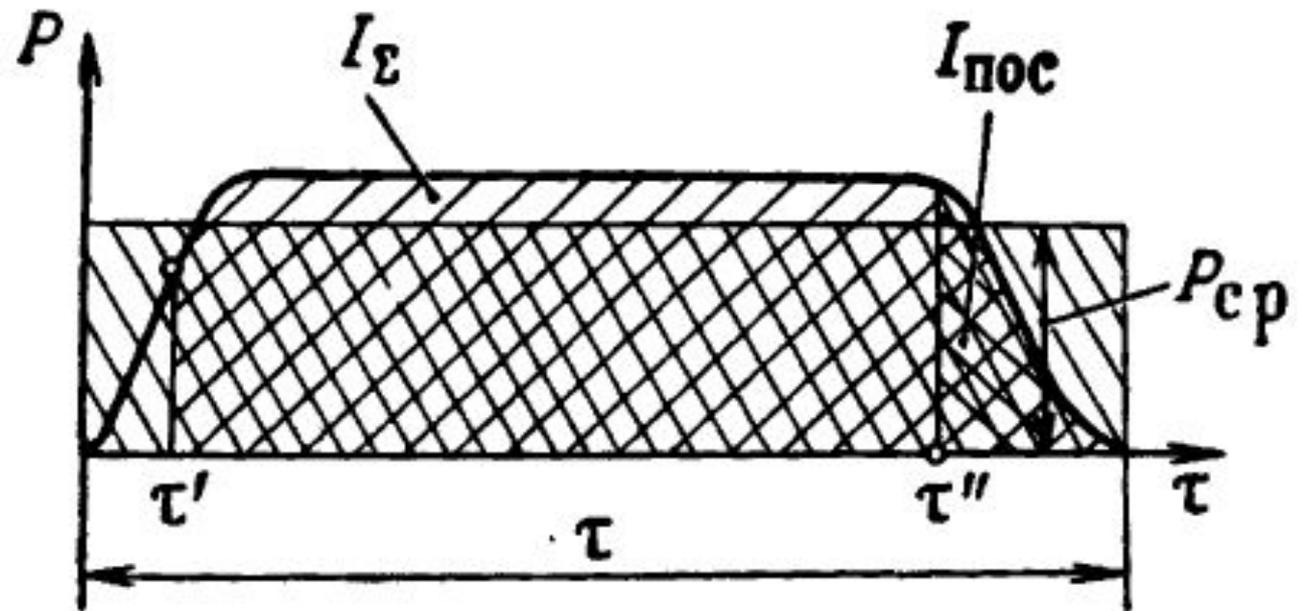
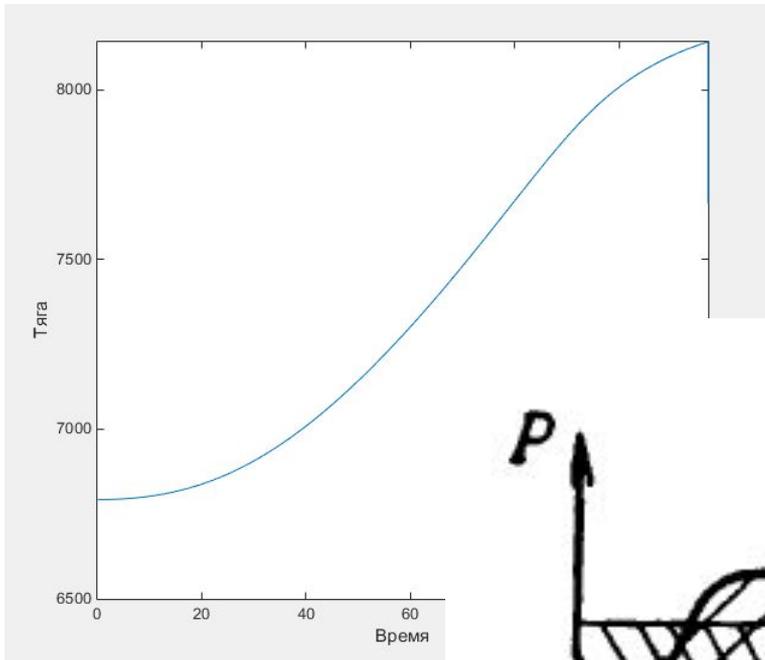


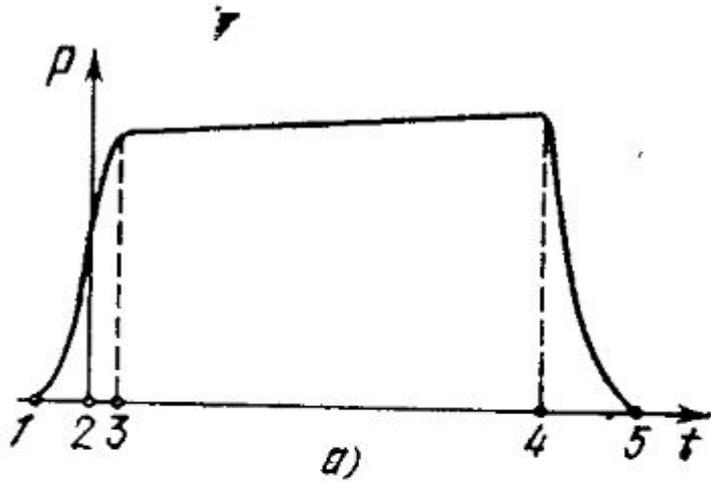
$$P = W_{\text{sec}} \cdot V_{\text{fl}}$$

$$P = W_{\text{sec}} \cdot g \cdot (I_v - (I_v - I_e) \cdot \frac{\rho_h}{\rho_0})$$

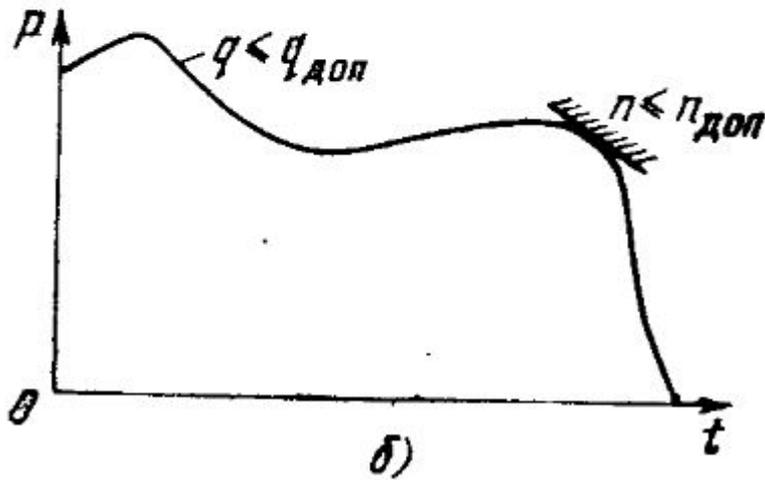


# Модельная тяга





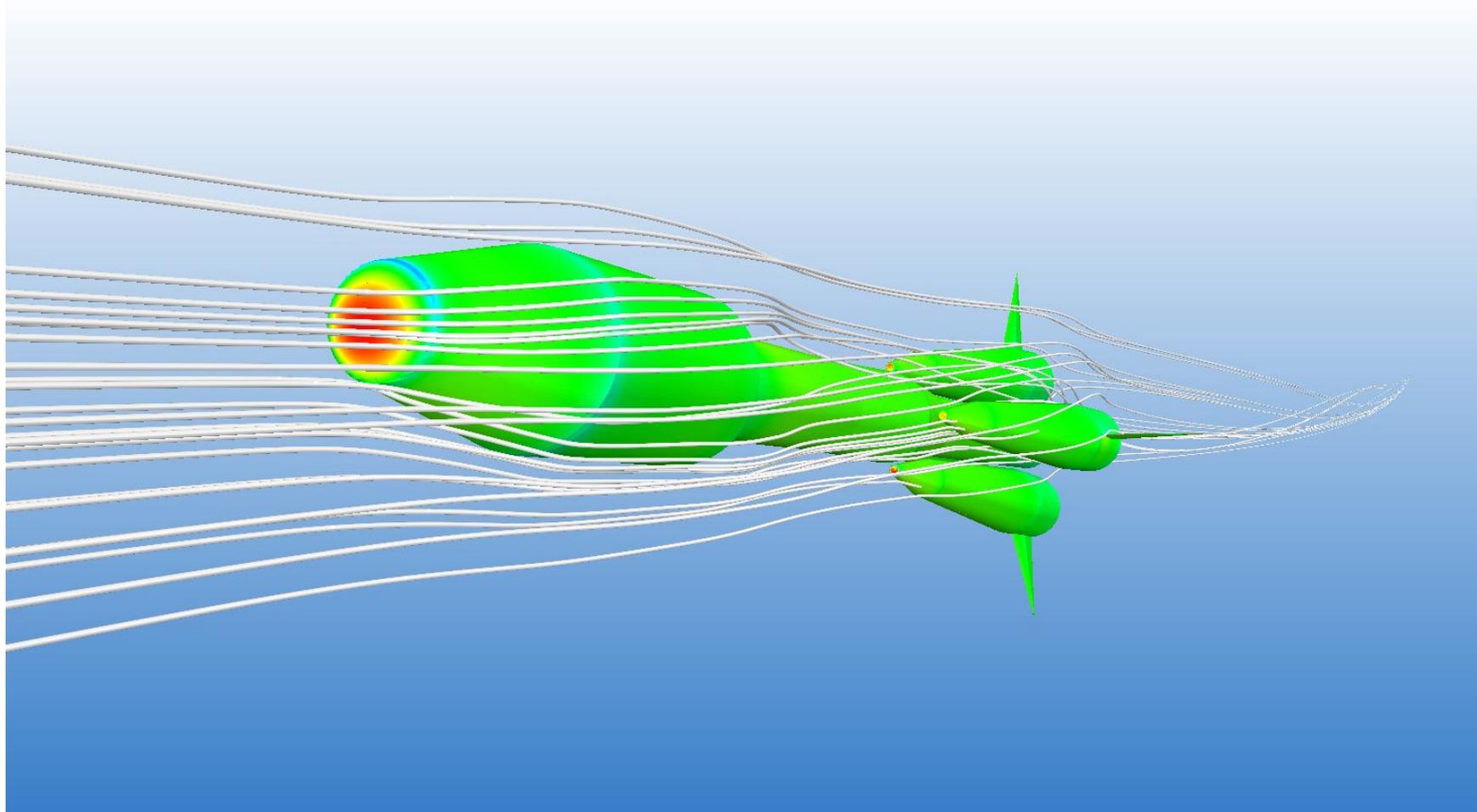
Без ограничений



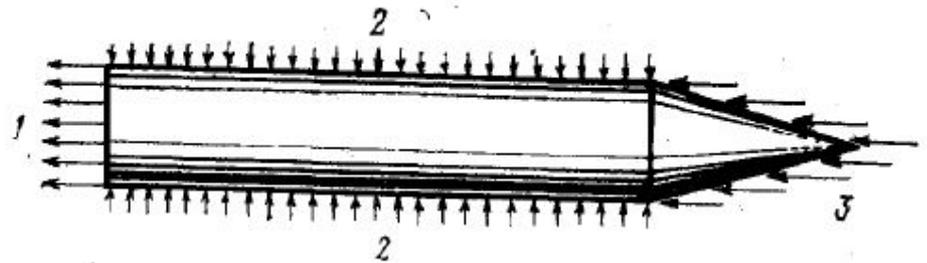
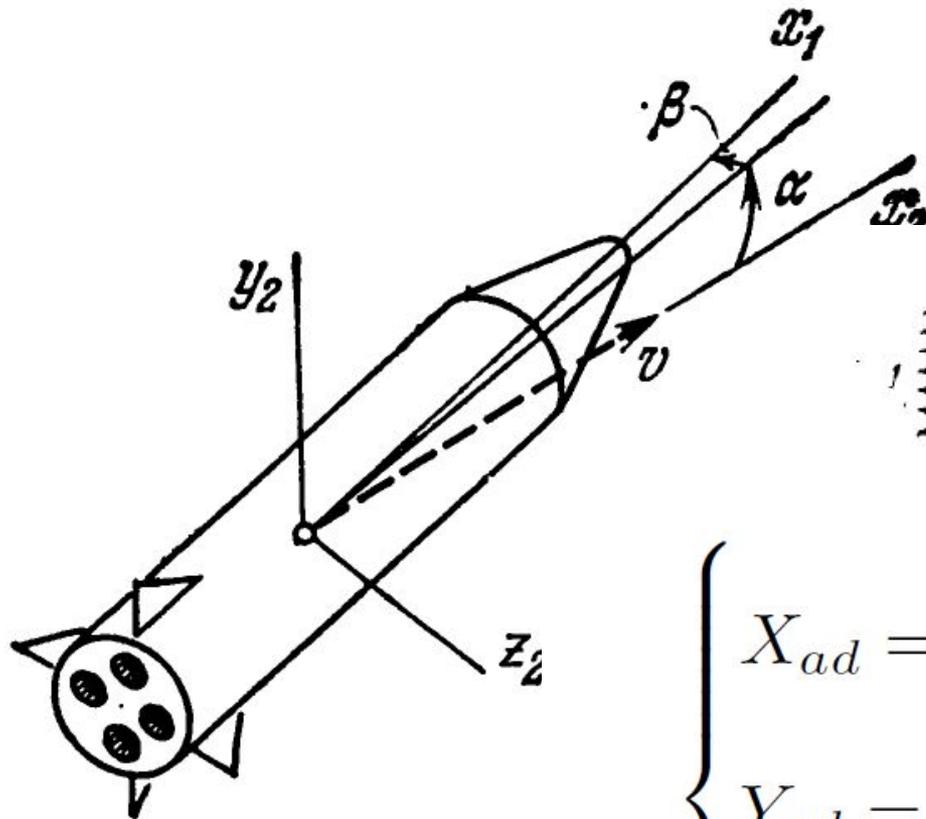
Скоростной напор и перегрузки ограничены

# Аэродинамические силы

---



# Угол атаки и скольжения



$$\left\{ \begin{array}{l} X_{ad} = 0.5 \cdot \rho \cdot V^2 \cdot S \cdot c_x \cdot \cos(\alpha) \\ Y_{ad} = 0.5 \cdot \rho \cdot V^2 \cdot S \cdot c_y \cdot \sin(\alpha) \\ Z_{ad} = 0.5 \cdot \rho \cdot V^2 \cdot S \cdot c_z \cdot \sin(\beta) \end{array} \right.$$



# Аэродинамическая труба

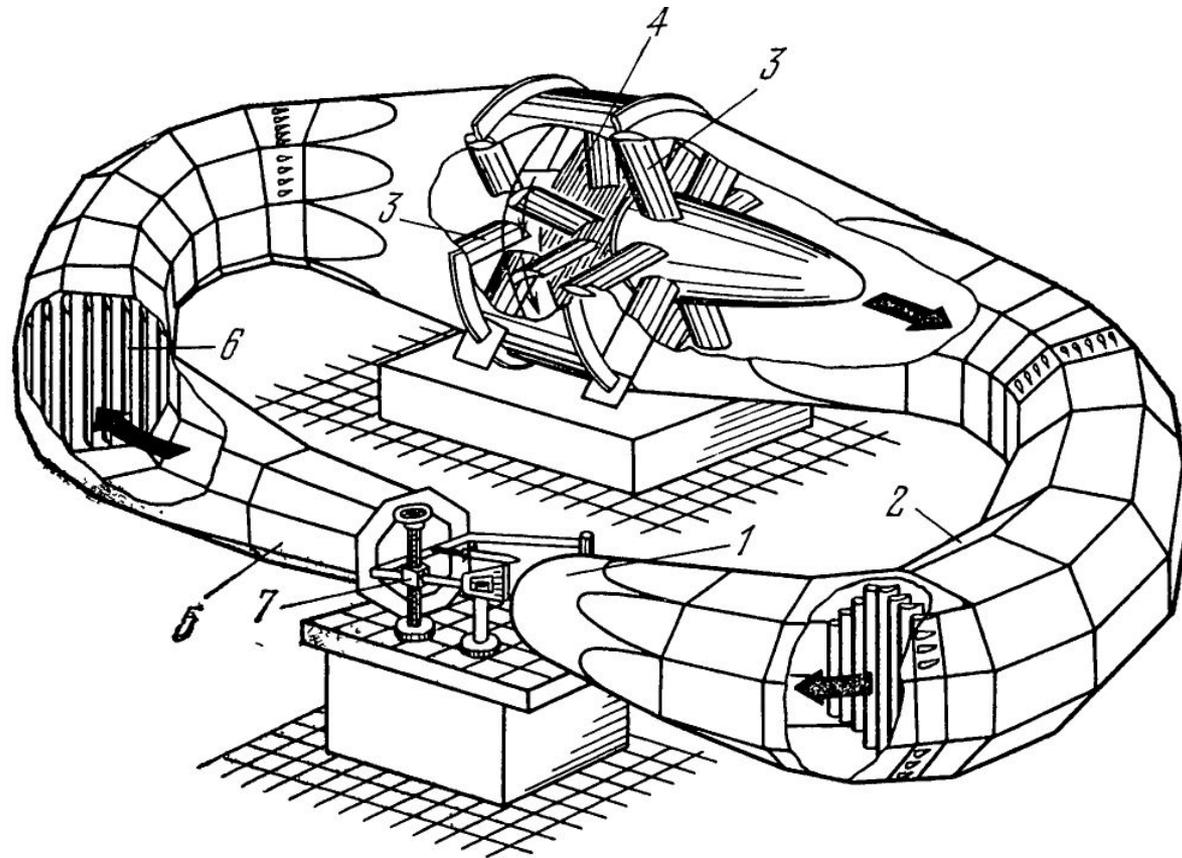
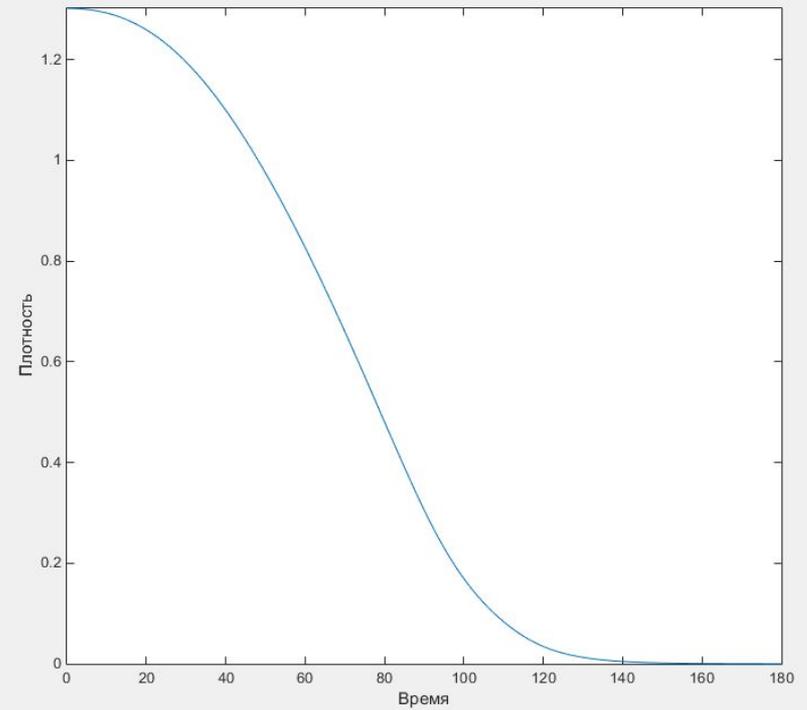
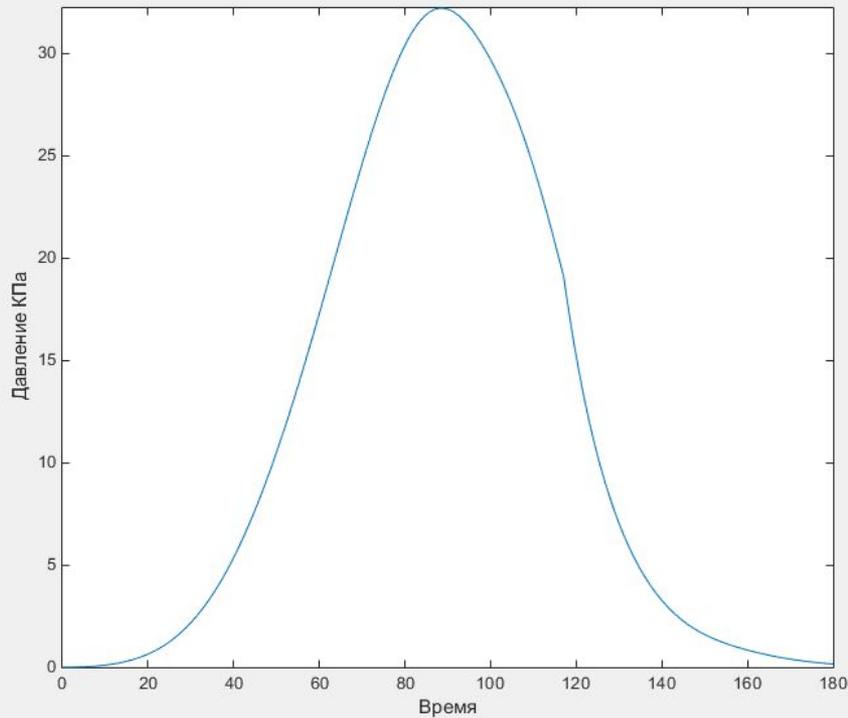


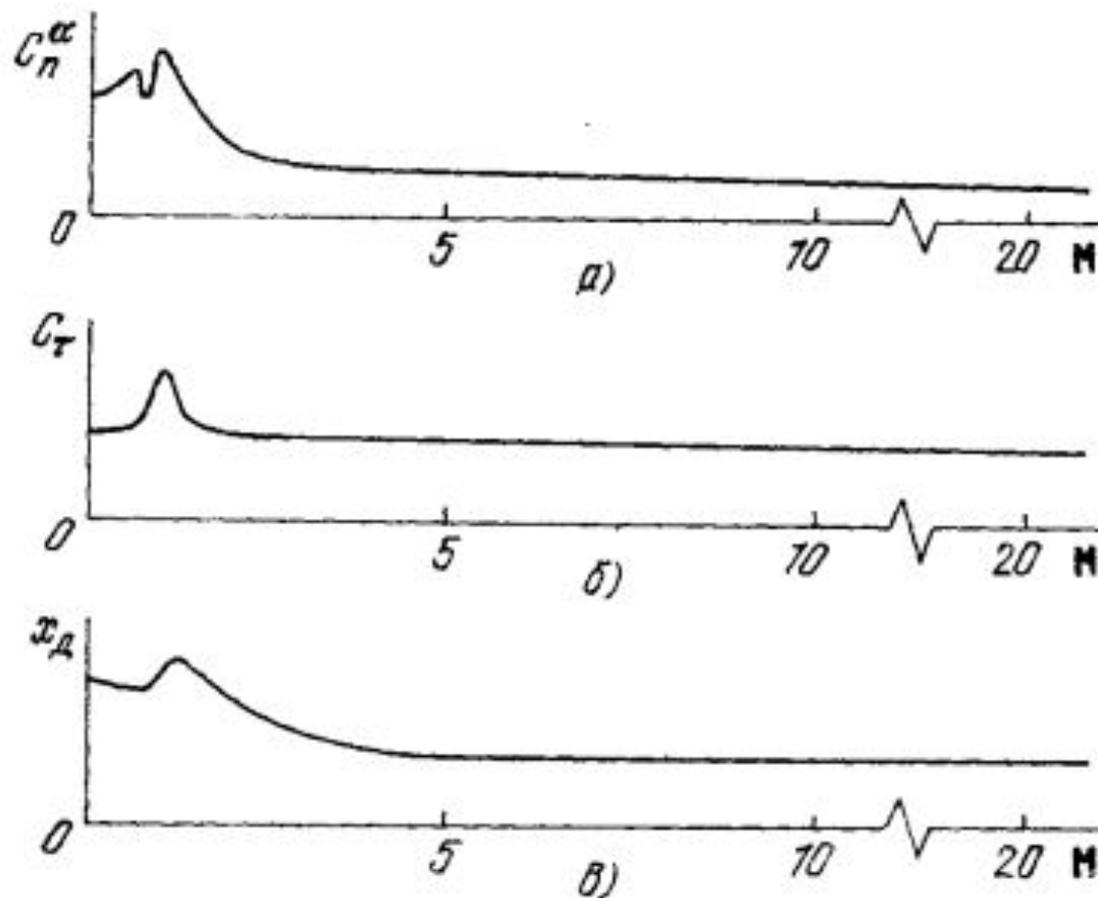
Рис. 6.29. Схема замкнутой дозвуковой аэродинамической трубы с открытой рабочей частью: 1—сопло, 2—обратный канал, 3—направляющий аппарат, 4—компрессор, 5—диффузор, 6—направляющие лопатки, 7—механизм углов атаки с моделью ракеты.

# Модельные аэродинамические силы

---

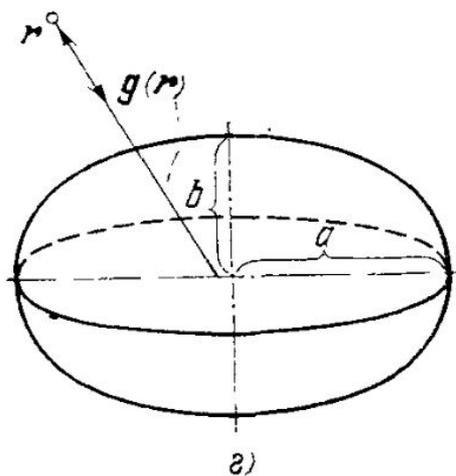
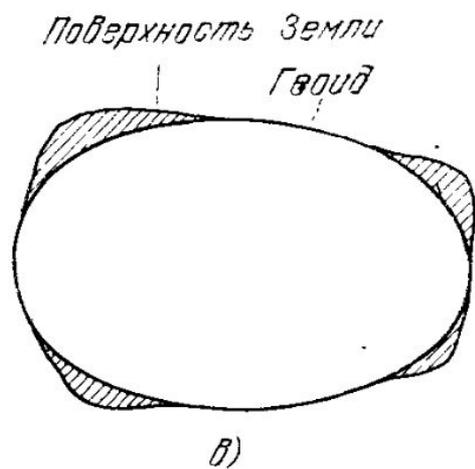
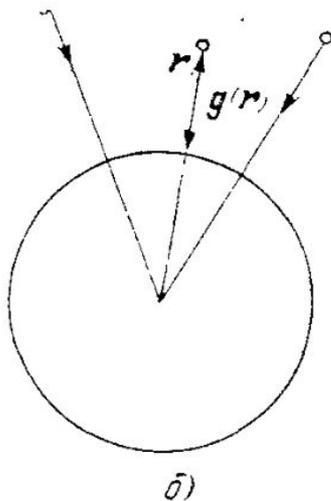
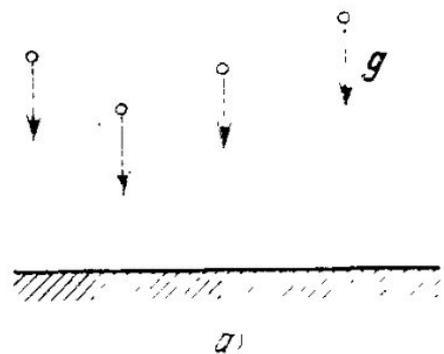


# Аэродинамические коэффициенты



1.11. Аэродинамические коэффициенты осесимметричной ракеты.

# Сила тяжести



$$\left\{ \begin{array}{l} G_x = 0 \\ G_y = -mg \\ G_z = 0 \end{array} \right.$$



# Итоговые уравнения

---

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dV_x}{dt} = \frac{(P+X_{ad}) \cdot \cos(\varphi)}{m} \\ \frac{dV_y}{dt} = \frac{(P+Y_{ad}) \cdot \sin(\varphi) - mg}{m} \\ \frac{dV_z}{dt} = 0 \\ \frac{dx}{dt} = V_x \\ \frac{dy}{dt} = V_y \\ \frac{dz}{dt} = V_z \\ \frac{dm}{dt} = -W \\ \frac{d\varphi}{dt} = \varphi_{prog} \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{Горизонтальная скорость} \\ \text{Вертикальная скорость} \\ \text{Боковая скорость} \\ \\ \\ \\ \text{Программа тангажа} \end{array}$$



# А на самом деле...

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{V}_x = \frac{1}{m} * (P_{x_s} + A_{x_s}) + G_{x_s} \\ \dot{V}_y = \frac{1}{m} * (P_{y_s} + A_{y_s}) + G_{y_s} \\ \dot{V}_z = \frac{1}{m} * (P_{z_s} + A_{z_s}) + G_{z_s} \\ \dot{X} = V_x \\ \dot{Y} = V_y \\ \dot{Z} = V_z \\ \dot{\theta} = \theta_{prog} \\ \dot{\psi} = \psi_{prog} \\ \dot{\gamma} = \gamma_{prog} \\ \dot{m} = W_{sec} \end{array} \right. \quad P_r = \begin{pmatrix} P_{x_r} \\ P_{y_r} \\ P_{z_r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{sec} * g * (ISP_v - (ISP_v - ISP_e) * \frac{\rho}{\rho_0}) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_r = \begin{pmatrix} A_{x_r} \\ A_{y_r} \\ A_{z_r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \rho C_x S_x V^2 \cos \alpha \\ \frac{1}{2} \rho C_y S_y V^2 \sin \alpha \\ \frac{1}{2} \rho C_z S_z V^2 \sin \beta \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} \cos \Delta \varphi \cos A & \sin \Delta \varphi & -\cos \Delta \varphi \sin A \\ -\sin \Delta \varphi \cos A & \cos \Delta \varphi & \sin \Delta \varphi \sin A \\ \sin A & 0 & \cos A \end{pmatrix}$$

$$g_r = -g_m * \left(\frac{R}{r}\right)^2 \left[ 1 + \left(\frac{R}{r}\right)^2 \left(a - \frac{q}{2}\right) (1 - 3 \sin^2 \varphi) \right]$$

$$g_\varphi = -g_m \left(\frac{R}{r}\right)^2 \left(a - \frac{q}{2}\right) \left(\frac{R}{r}\right)^2 \sin 2\varphi$$

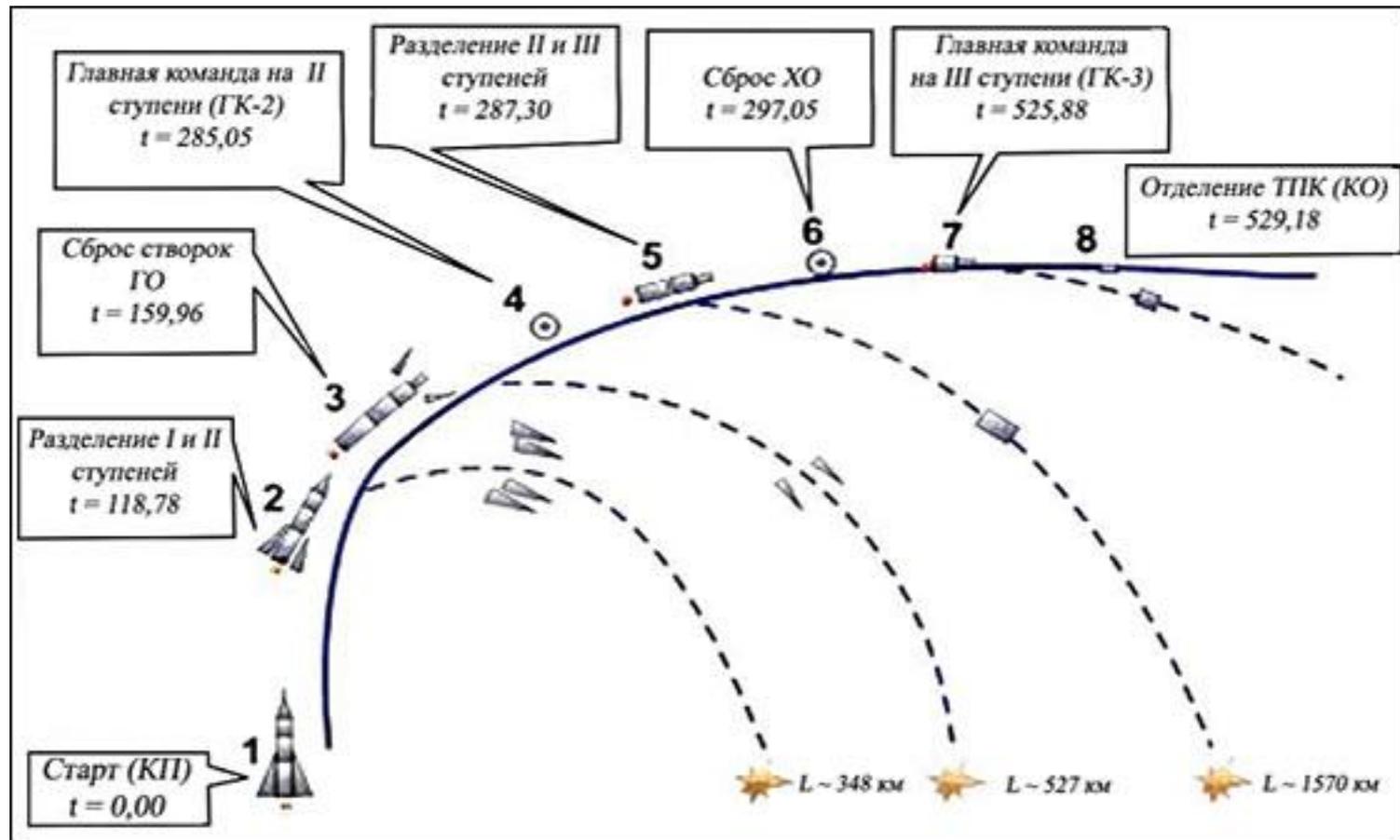
$$P_s + A_s = \begin{pmatrix} P_{x_s} + A_{x_s} \\ P_{y_s} + A_{y_s} \\ P_{z_s} + A_{z_s} \end{pmatrix} = L^{-1} * (P_r + A_r)$$

$$R = a \left(1 - \frac{a}{3}\right), \quad g_m = \frac{\mu}{R^2}, \quad q = \frac{\omega^2 a^3}{\mu}$$

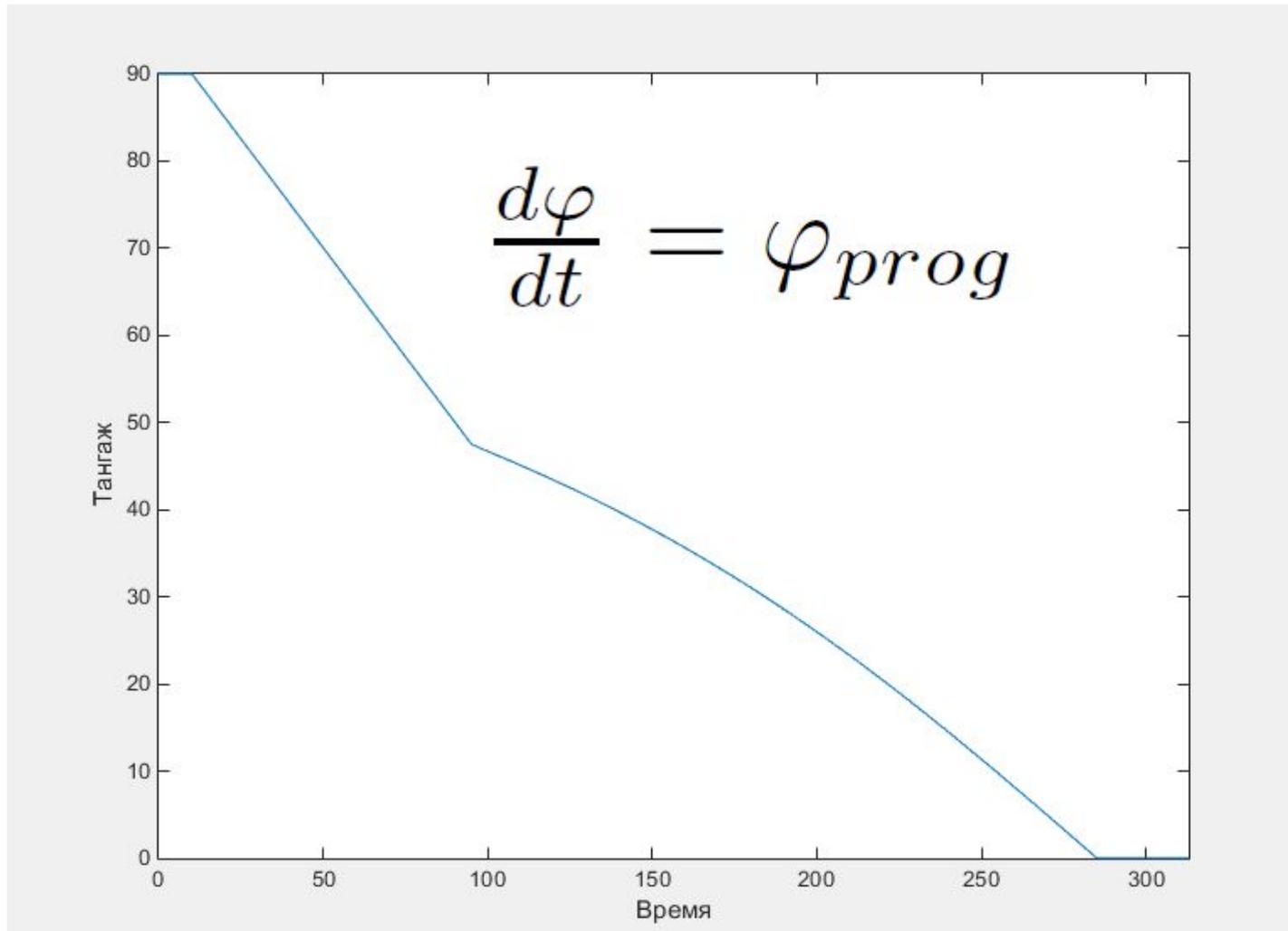
$$L = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \psi & \sin \theta & -\cos \theta \sin \psi \\ \sin \gamma \sin \psi - \cos \gamma \sin \theta \cos \psi & \cos \gamma \cos \theta & \sin \gamma \cos \psi + \cos \gamma \sin \theta \sin \psi \\ \cos \gamma \sin \psi + \sin \gamma \sin \theta \cos \psi & -\sin \gamma \cos \theta & \cos \gamma \cos \psi - \sin \gamma \sin \theta \sin \psi \end{pmatrix}$$



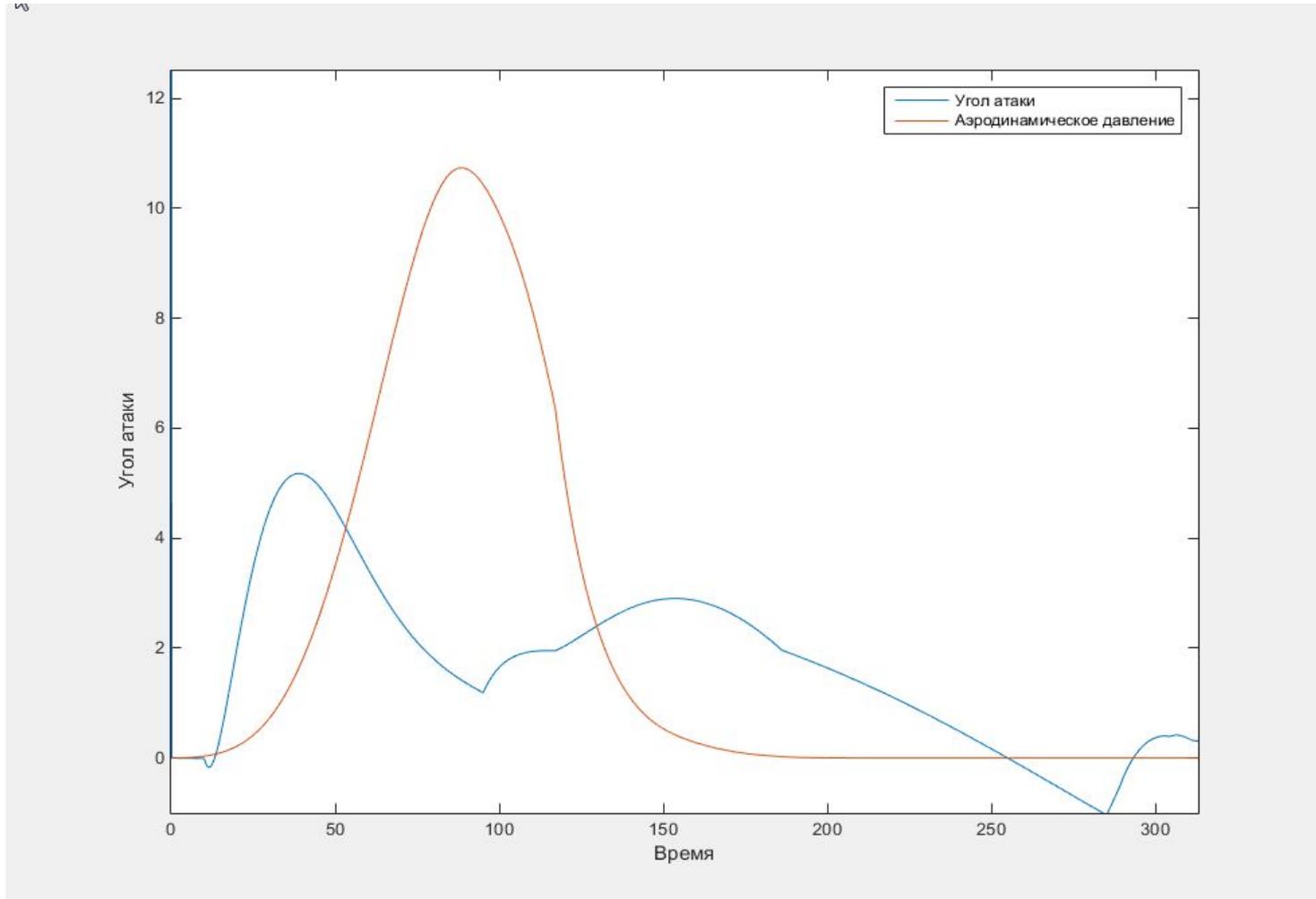
# Задача оптимальной траектории



# Программа тангажа



# Пример реализации ограничения



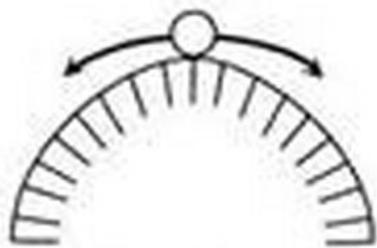
Уменьшить угол атаки при максимуме сопротивления



# Задача стабилизации и устойчивости

---

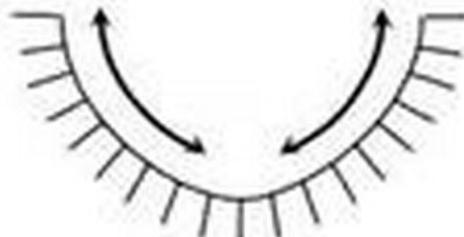
*a*



Неустойчивост

ь

*б*

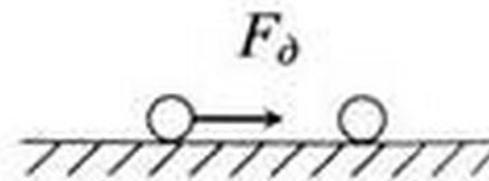


Асимптотическа

я

устойчивост

*в*



Устойчивост

ь



# Потребные моменты для управления

---

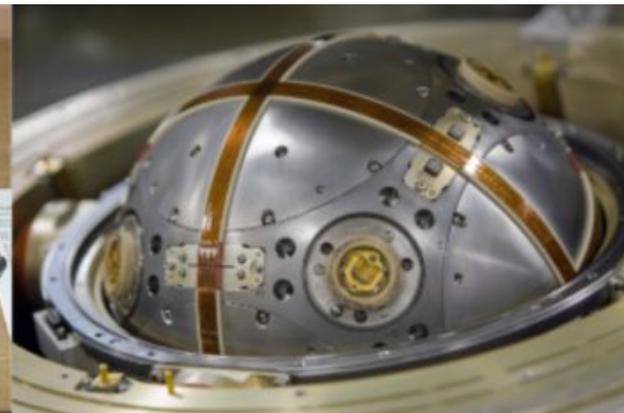
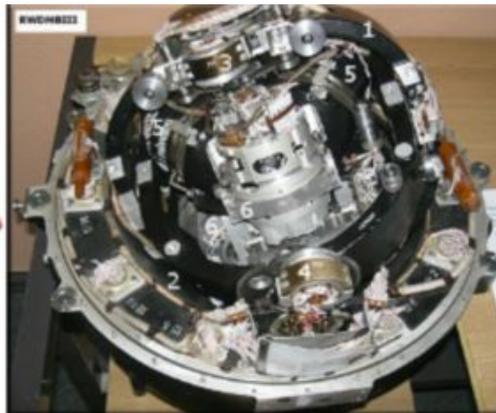
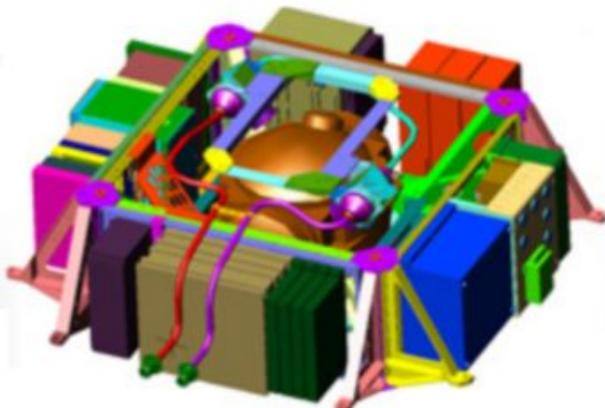
$$M_{упр} = M_{пр} + M_{воз} + M_{стб}.$$

$$(M_{упр})_{\max} > (|M_{пр}| + |M_{воз}| + |M_{стб}|)_{\max}.$$

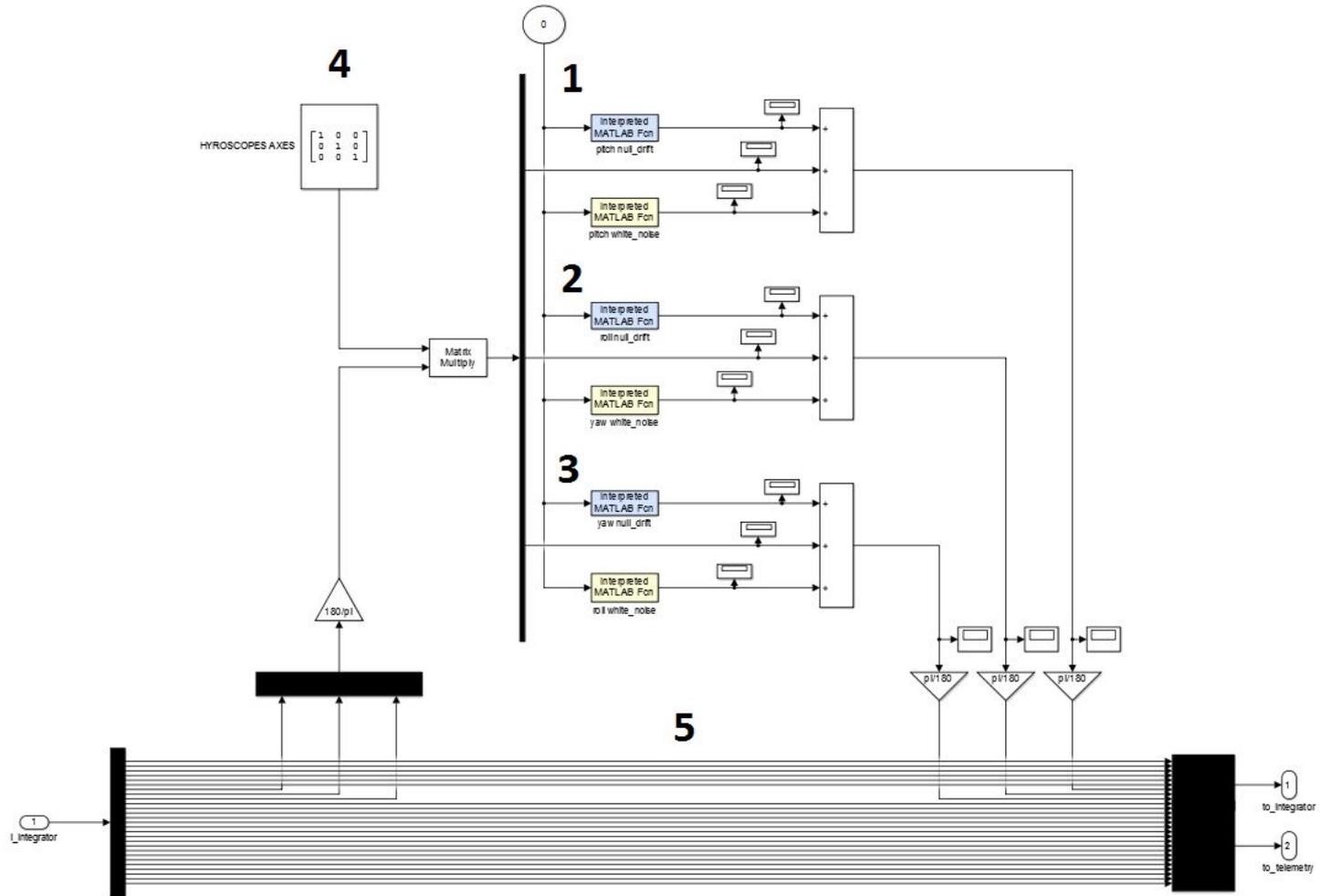


# Инерциальная система навигации

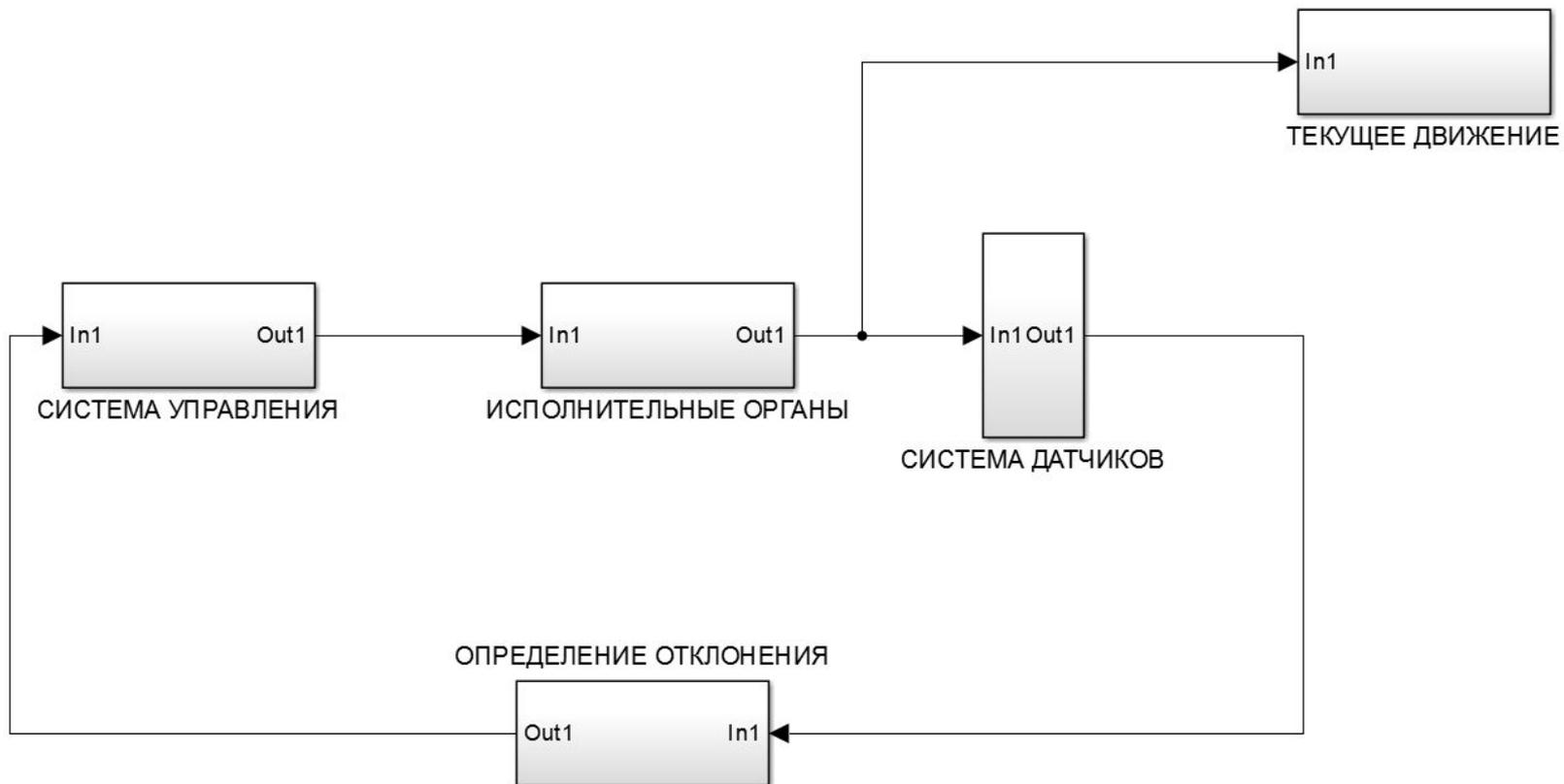
---



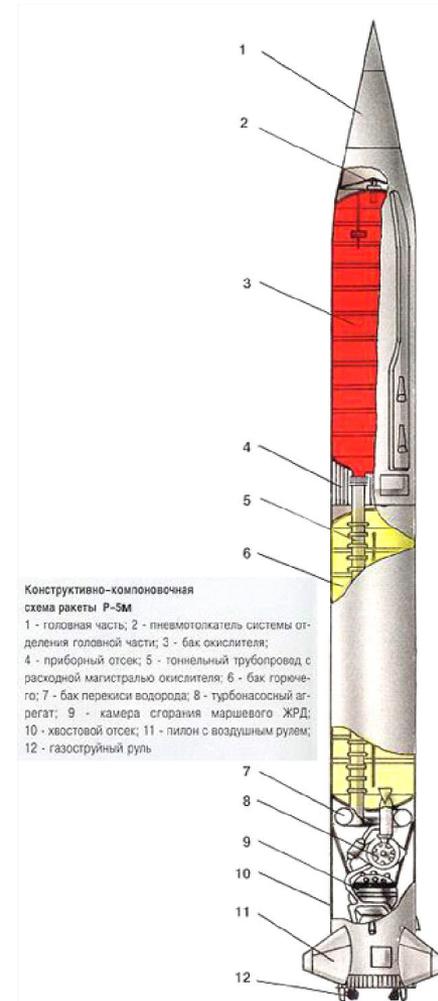
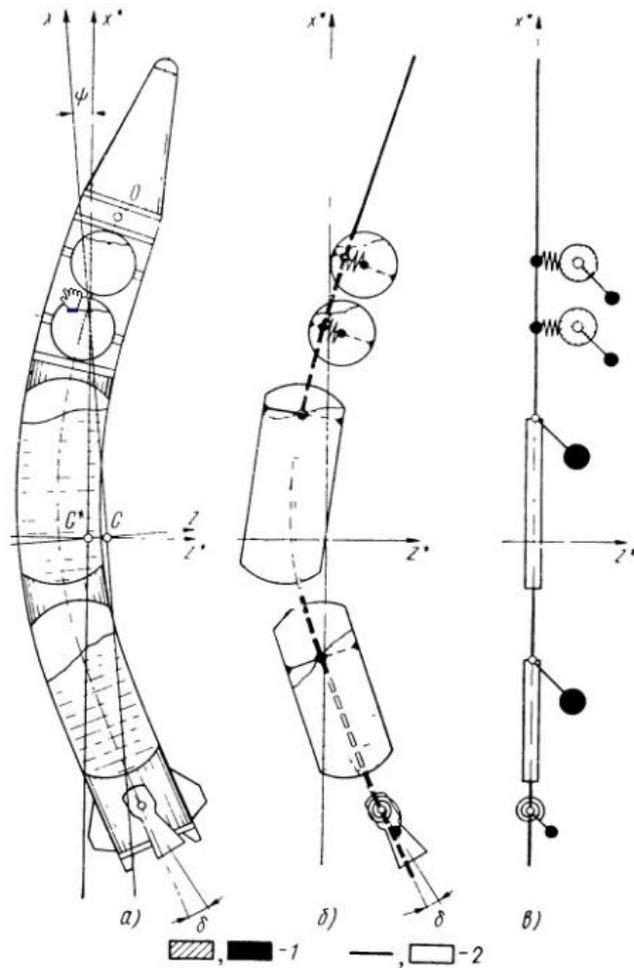
# Простая модель БИНС



# Схема обратной связи



# Усложнения задачи



Конструктивно-компоновочная  
схема ракеты Р-5М

1 - головная часть; 2 - пневмолучатель системы отделения головной части; 3 - бак окислителя; 4 - приборный отсек; 5 - тоннельный трубопровод с расходной магистралью окислителя; 6 - бак горючего; 7 - бак перекиси водорода; 8 - турбонасосный агрегат; 9 - камера сгорания маршевого ЖРД; 10 - хвостовой отсек; 11 - пилон с воздушным рулем; 12 - газоструйный руль

▶ Поперечные колебания

# Из главы «простейшие примеры расчета»

$$B_l = \frac{4R^2 \left(1 - e^{-\frac{v_l H}{R}}\right)}{v_l (v_l^2 - 1) J_1(v_l) \left(e^{\frac{v_l H}{R}} - e^{-\frac{v_l H}{R}}\right)}$$

Подставляя (3.13.23) в (3.13.18), получим формулу

$$\theta_j^* = 4R^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left[ e^{\frac{v_k \xi}{R}} + e^{-\frac{v_k \xi}{R}} - e^{\frac{v_k (H+\xi)}{R}} - e^{-\frac{v_k (H+\xi)}{R}} \right] J_1\left(\frac{v_k r}{R}\right)}{v_k (v_k^2 - 1) \left( e^{\frac{v_k H}{R}} - e^{-\frac{v_k H}{R}} \right) J_1(v_k)}$$

или

$$\theta_j^* = 4R^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left[ \operatorname{ch} \frac{v_k \xi}{R} - \operatorname{ch} \frac{v_k (H+\xi)}{R} \right] J_1\left(\frac{v_k r}{R}\right)}{v_k (v_k^2 - 1) \operatorname{sh} \frac{v_k H}{R} J_1(v_k)} \quad (3.13.24)$$

Согласно (3.12.16), (3.13.3) и (3.13.24) в рассматриваемом примере потенциалы Жуковского будут определяться соотношениями:

$$\varphi_{jx} = y_j z - z_j y,$$

$$\varphi_{jy} = - \left\{ \xi r + 4R^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left[ \operatorname{ch} \frac{v_k \xi}{R} - \operatorname{ch} \frac{v_k (H+\xi)}{R} \right] J_1\left(\frac{v_k r}{R}\right)}{v_k (v_k^2 - 1) \operatorname{sh} \frac{v_k H}{R} J_1(v_k)} \right\} \sin \alpha + z_j x - x_j z, \quad (3.13.25)$$

$$\varphi_{jz} = \left\{ \xi r + 4R^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left[ \operatorname{ch} \frac{v_k \xi}{R} - \operatorname{ch} \frac{v_k (H+\xi)}{R} \right] J_1\left(\frac{v_k r}{R}\right)}{v_k (v_k^2 - 1) \operatorname{sh} \frac{v_k H}{R} J_1(v_k)} \right\} \cos \alpha + x_j y - y_j x.$$

# Saturn-5: продольные автоколебания

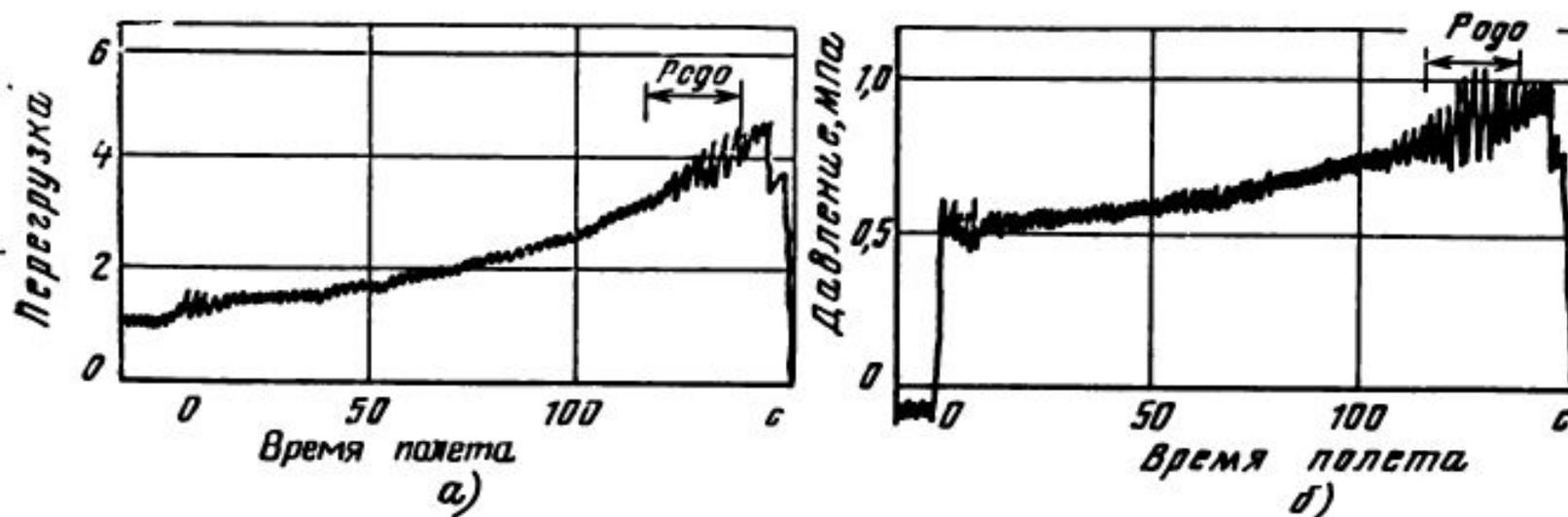
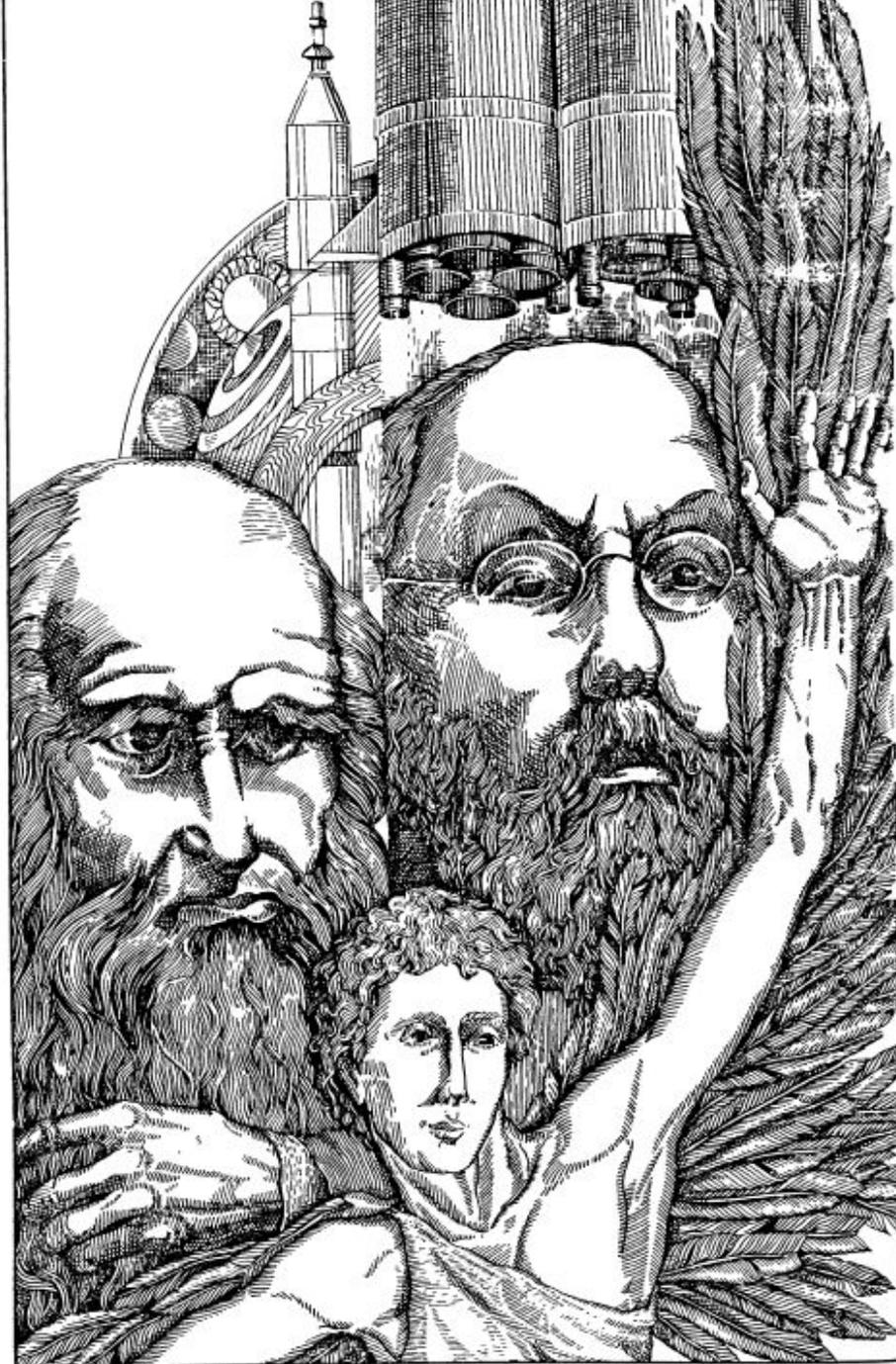


Рис. 1. Типичные данные телеметрической информации при потере продольной устойчивости ракеты «Сатурн-5» (пуск AS-502):

а—продольные ускорения, отнесенные к  $9,81 \text{ м/с}^2$  (перегрузка), в межбаковом отсеке;  
б—давление в баках окислителя на входе в насос двигателя



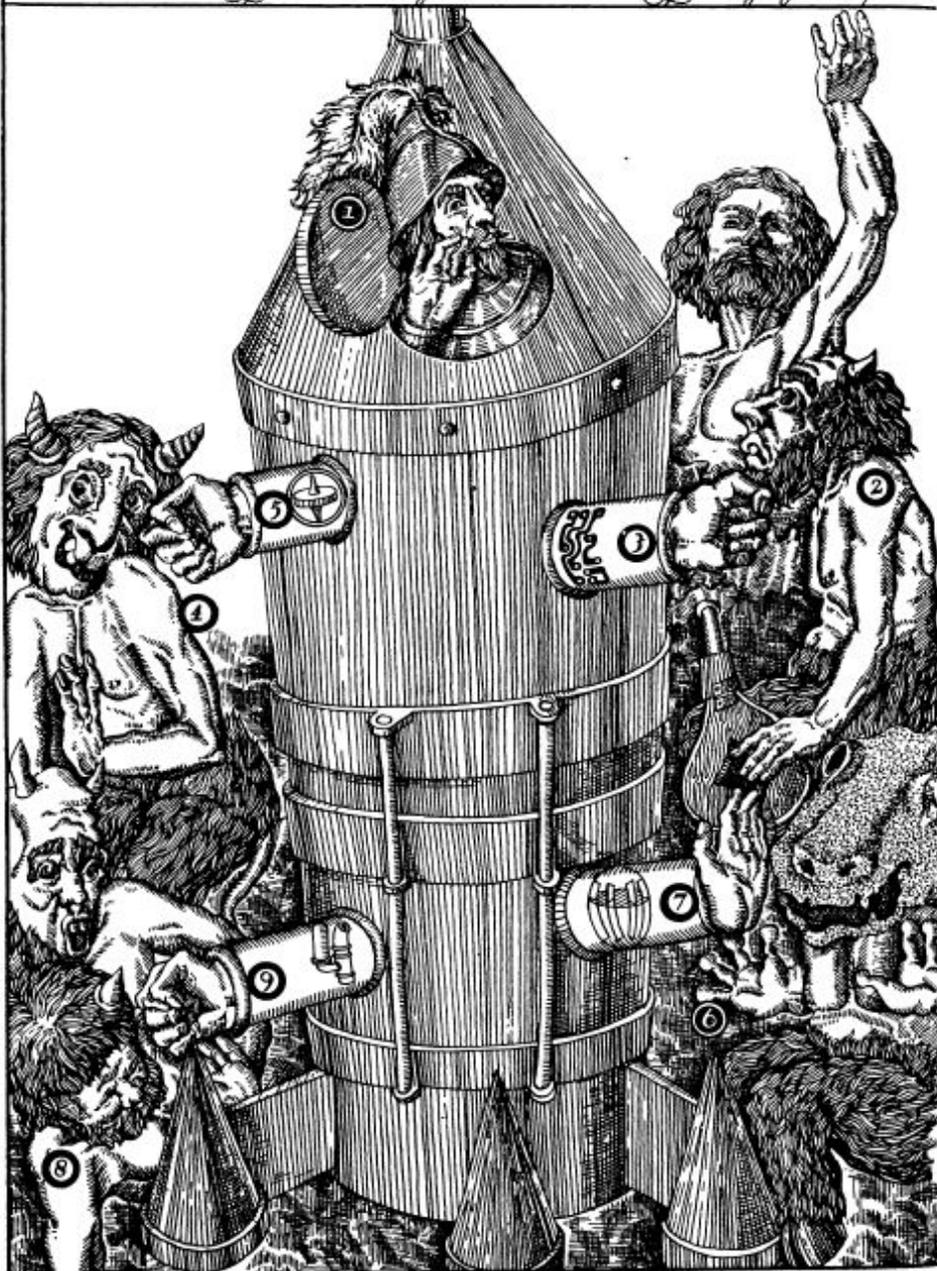
Основные возмущающие факторы, определяющие динамическую  
смену объектов:

- 1) Подвижность жидкости в баках и магистралях
- 2) Турбулентность корпуса



- 1 Система управления 2 Аэродинамические возмущения  
 3 Бортовая цифровая вычислительная машина 4 Упругость корпуса  
 5 Датчик угловых скоростей 6 Подвижность жидкости в баках и магистралях  
 7 Демпфер 8 Динамика двигательной установки 9 Гидроаккумулятор

- 1 Система управления 2 Аэродинамические возмущения  
 3 Упругость корпуса 4 Подвижность жидкости в баках и магистралях  
 5 Динамика двигательной установки



---

**“ВОСТОК” -**



**ДЕЛО ТОНКОЕ**

[vk.com/dskataev](https://vk.com/dskataev)

