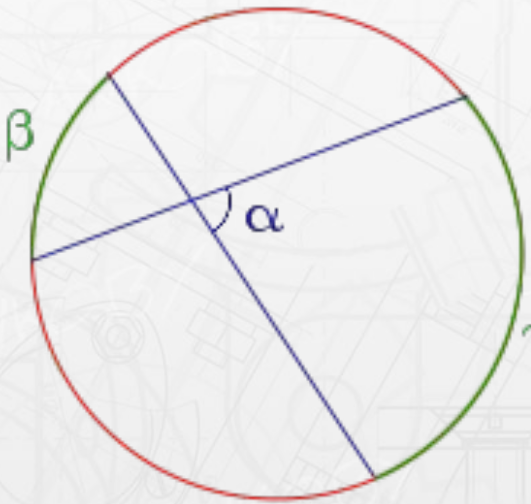


ТЕОРЕМЫ ОБ УГЛАХ, ОБРАЗОВАННЫХ ХОРДАМИ, КАСАТЕЛЬНЫМИ И СЕКУЩИМИ



Презентацию выполнила
ученица
ГБОУ гимназии №1517
9 класса Г
Соловьева Александра

Угол между пересекающимися хордами



$$\alpha = \frac{\beta + \gamma}{2}$$

Величина угла, образованного пересекающимися хордами, равна половине суммы величин дуг, заключённых между его сторонами

Доказательство

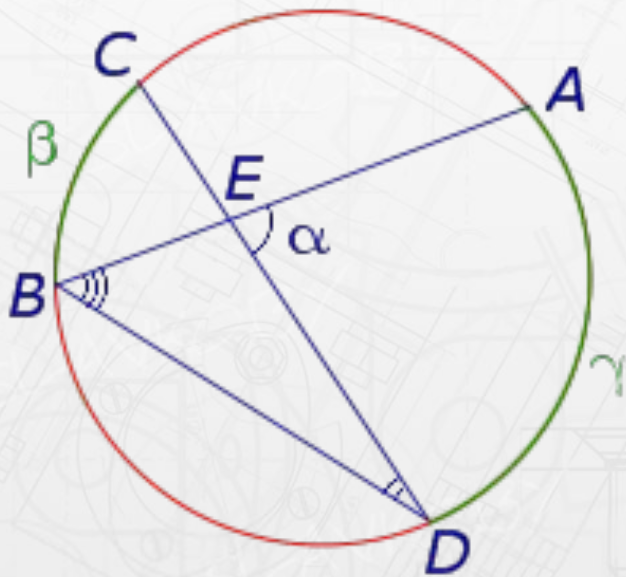
Дано:

(O;R)

AB и CD-хорды

$AB \cap CD = E$

Д-ть: $\alpha = \frac{\beta + \gamma}{2}$

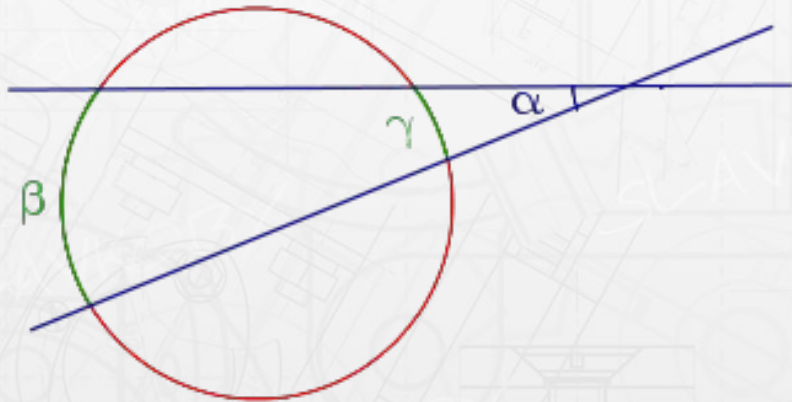


Поскольку угол AED – внешний угол треугольника BED, а углы CDB и ABD являются вписанными углами, то справедливы равенства

$$\alpha = \angle AED = \angle CDB + \angle ABD = \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma = \frac{\beta + \gamma}{2},$$

Что и требовалось доказать

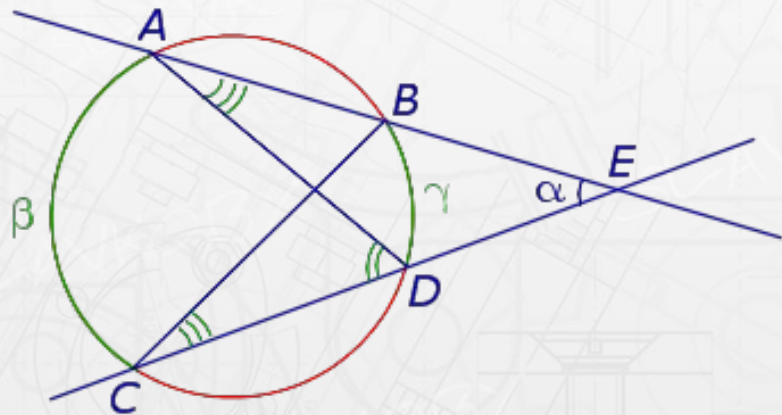
Угол, образованный секущими, которые пересекаются вне круга



Величина угла, образованного секущими, пересекающимися вне круга, равна половине разности величин дуг, заключённых между его сторонами

$$\alpha = \frac{\beta - \gamma}{2}$$

Доказательство



Дано:

(O;R)

AB и CD секущие

$AB \cap CD = E$

Д-ть: $\alpha = \frac{\beta - \gamma}{2}$

Поскольку угол ADC – внешний угол треугольника ADE, а углы ADC, DCB и DAB являются вписанными углами, то справедливы равенства $\alpha = \angle BED = \angle ADC - \angle DAB = \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2} = \frac{\beta - \gamma}{2}$,

что и требовалось доказать.

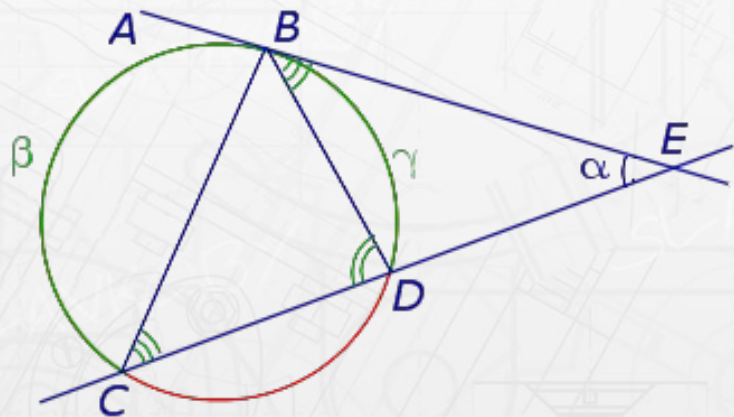
Угол, образованный касательной и секущей



$$\alpha = \frac{\beta - \gamma}{2}$$

Величина угла, образованного касательной и секущей, равна половине разности величин дуг, заключённых между его сторонами

Доказательство



Дано:

(O;R)

$\angle BDC$, $\angle BCD$ -

впис.

AB-кас

CD-сек

$AB \cap CD = E$

Д-ть:

$$\frac{\beta - \gamma}{2}$$

$\angle BDC$ – внешний угол треугольника DBE $\Rightarrow$

$\angle CDB = \angle DBE + \angle BED \Rightarrow \angle BED = \angle CDB - \angle DBE$

$\angle DBE = \angle DCB$ (доказано в предыдущей теореме)

Поэтому справедливы равенства

$$\alpha = \angle CDB - \angle DBE = \angle CDB - \angle DCB = \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma = \frac{\beta - \gamma}{2},$$

что и требовалось доказать.

Угол, образованный касательной и хордой, проходящей через точку касания

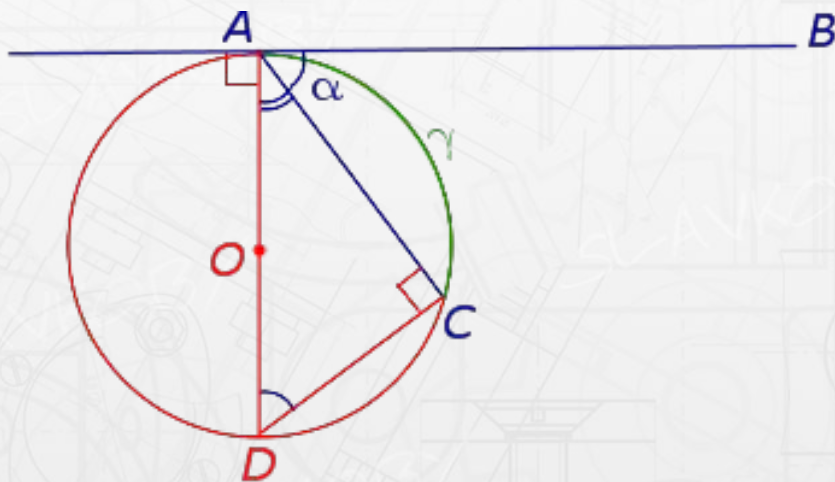


$$\alpha = \frac{\gamma}{2}$$



Величина угла, образованного касательной и хордой, проходящей через точку касания, равна половине величины дуги, заключённой между его сторонами

Доказательство



Дано:

AB-кас.

AC-хорда

AD-диаметр

Д-ть: $\alpha = \frac{\gamma}{2}$

1) Поскольку AD – диаметр, проходящий через точку касания, а угол ACD – вписанный угол, опирающийся на диаметр, то углы DAB и DCA – прямые

2) $\alpha = \angle DAB - \angle DAC = 90^\circ - \angle DAC$

треугольник DAC-п/у, $\angle ACD = 90^\circ \Rightarrow \angle ADC = 90^\circ - \angle CAD$

Следовательно, $\alpha = \angle ADC$

$\angle ADC$ - впис. $\Rightarrow \angle ADC$ равен половине дуги γ

Следовательно, α равен половине дуги γ

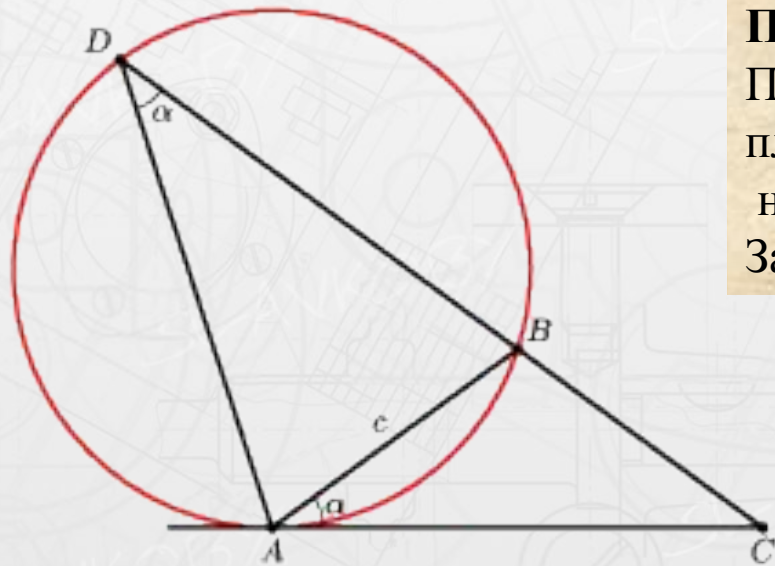
что и требовалось доказать

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ



Задача

Окружность проходит через вершины A и B треугольника ABC и касается прямой AC в точке A . Найдите радиус окружности, если угол $BAC = \alpha$, угол $ABC = \beta$ и площадь треугольника ABC равна S .



Подсказка

Пусть D — точка пересечения данной окружности со стороной BC . Зная площадь треугольника ABC , найдите AB с помощью теоремы синусов. Затем докажите, что $\angle ADB = 180^\circ - \angle \alpha$

Решение

1) Пусть D — точка пересечения данной окружности с прямой BC . Обозначим $AB = c$, $BC = a$.

Применяя теорему синусов к треугольнику ABC , получим пропорцию

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin(180^\circ - \alpha - \beta)} = \frac{c}{\sin(\alpha + \beta)},$$

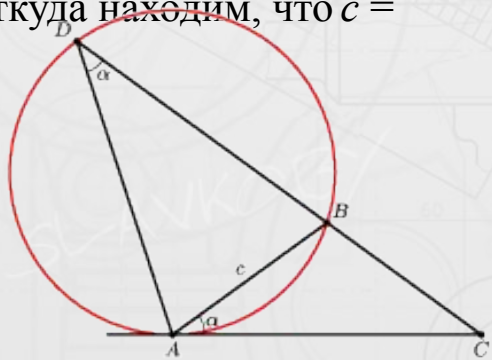
откуда $a = \frac{c \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$.

Тогда

$$S = S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ac \sin \beta = \frac{c^2 \sin \alpha \sin \beta}{2 \sin(\alpha + \beta)},$$

$$\sqrt{\frac{2S \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}}$$

откуда находим, что $c =$



2) По теореме об угле между касательной и хордой находим,

что либо $\angle ADB = \angle BAC = \alpha$, либо $\angle ADB = 180^\circ - \angle BAC = 180^\circ - \alpha$

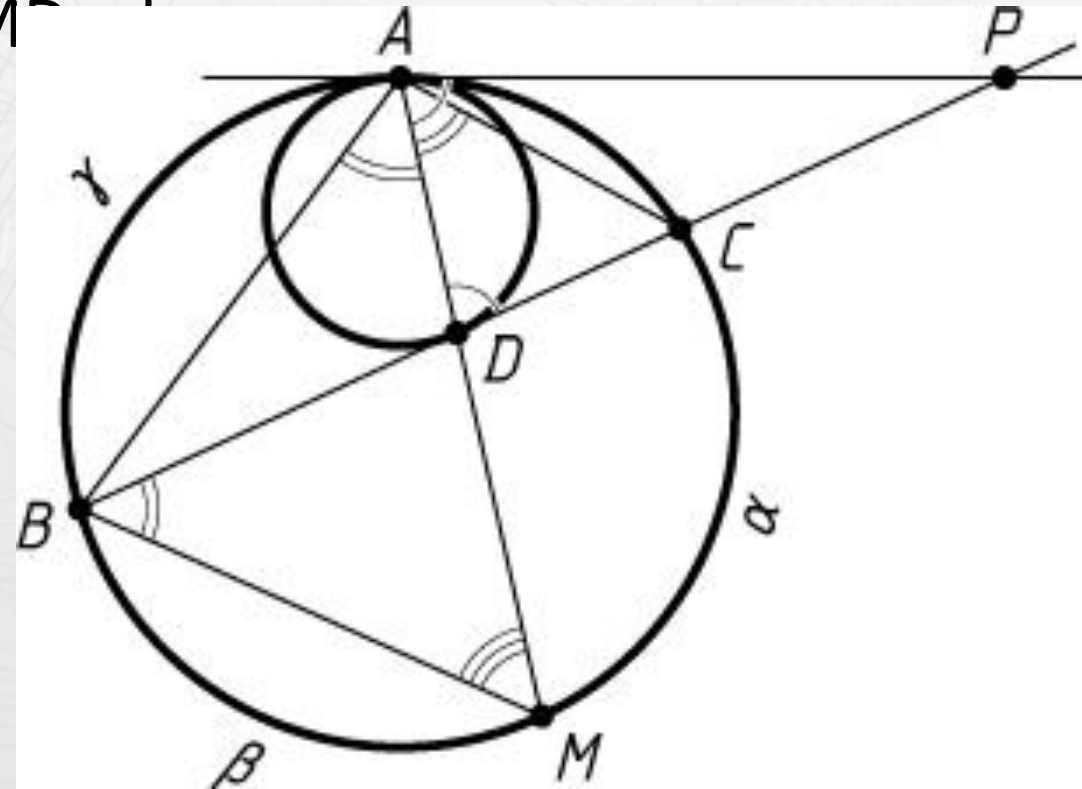
В обоих случаях $\sin \angle ADB = \sin \alpha$. Пусть R — искомый радиус окружности, описанной около треугольника ABD .

Тогда

$$R = \frac{AB}{2 \sin \angle ADB} = \frac{c}{2 \sin \alpha} = \sqrt{\frac{S \sin(\alpha + \beta)}{2 \sin^3 \alpha \sin \beta}}.$$

Задача

Две окружности касаются друг друга внутренним образом в точке A . Хорда BC в большей окружности касается меньшей в точке D . Прямая AD вторично пересекает большую окружность в точке M . Найдите MB , если $MA = a$, $M\angle$



Решение

Докажем сначала, что точка M — середина дуги BC , не содержащей точки A . Пусть общая касательная к данным окружностям, проведённая через точку A , пересекает прямую BC в точке P (C между B и P). Тогда $\angle MAP = \angle ADP$ как углы при основании равнобедренного треугольника APD .

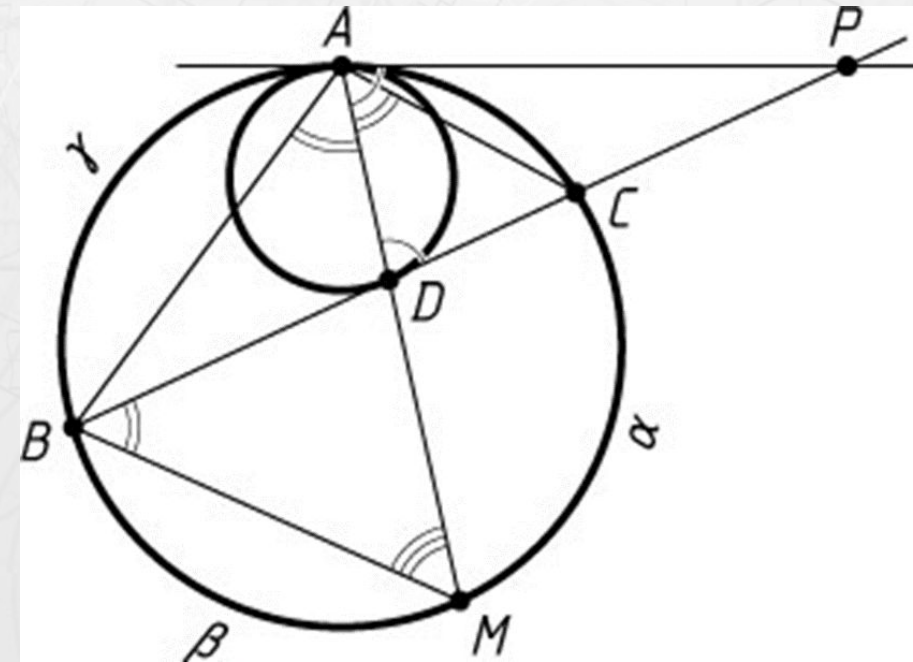
Пусть α , β и γ — угловые величины дуг CM (не содержащей точки A), BM (не содержащей точки A) и AB (не содержащей точки C) соответственно. Тогда из равенства углов MAP и ADP следует равенство смежных им углов, поэтому

$$\frac{\alpha + \gamma}{2} = \frac{\gamma + \beta}{2},$$

откуда получаем, что $\alpha = \beta$. Значит,
 $\angle DBM = \angle CBM = \angle CAM = \angle BAM$
 и треугольники BDM и ABM подобны по двум углам.
 Следовательно,

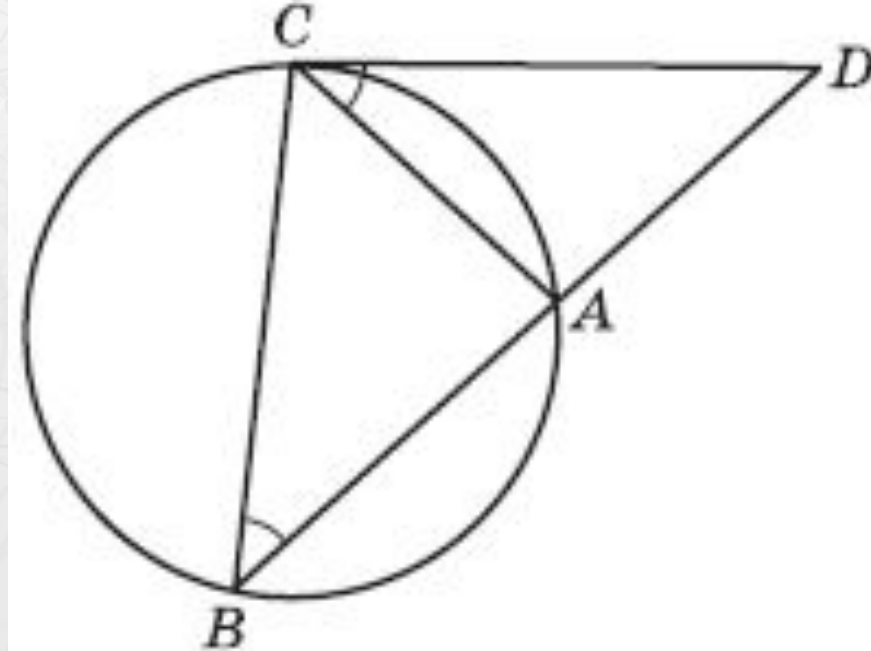
$$\frac{\overline{BM}}{DM} = \frac{AM}{BM},$$

откуда находим, что $BM^2 = AM \cdot DM = ab$.



Задача

Вокруг треугольника ABC со сторонами $AC = 20$ и углом B , равным 45° , описана окружность. Через точку C проведена касательная к окружности, пересекающая продолжение стороны AB за точку A в точке D . Найти площадь треугольника BCD .



Решение

Угол ABC равен половине угловой величины дуги AC, как вписанный угол, опирающийся на эту дугу. Угол ACD также равен половине угловой величины дуги AC, как угол между касательной и хордой. Следовательно, эти углы равны, и треугольники DBC и DCA подобны по двум углам. Площади этих треугольников относятся как квадрат коэффициента подобия. Найдем этот коэффициент, он равен BC : AC. Пусть BC = 10x, тогда, применив к треугольнику ABC теорему косинусов, получим:

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \angle ABC \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 400 &= 200 + 100x^2 - 2 \cdot 10\sqrt{2} \cdot 10x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 - 2x - 2 &= 0 \Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \angle ABC \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 400 &= 200 + 100x^2 - 2 \cdot 10\sqrt{2} \cdot 10x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 2 &= 0 \Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{3}.
 \end{aligned}$$

Значит, $\frac{BC}{AC} = \frac{10(1+\sqrt{3})}{20} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}.$

Поэтому,

$$\begin{aligned}
 \frac{S_{\triangle BCD}}{S_{\triangle CAD}} &= \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2} \right)^2 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow S_{\triangle BCD} &= S_{\triangle CAD} + \frac{\sqrt{3}}{2} S_{\triangle CAD} = S_{\triangle CAD} + S_{\triangle ABC} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow S_{\triangle ABC} &= \frac{\sqrt{3}}{2} S_{\triangle CAD} \Leftrightarrow S_{\triangle CAD} = \frac{2}{\sqrt{3}} S_{\triangle ABC} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow S_{\triangle BCD} &= \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) S_{\triangle ABC} = \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \right) S_{\triangle ABC}.
 \end{aligned}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{3}}{2} S_{\Delta CAD} \Leftrightarrow S_{\Delta CAD} = \frac{2}{\sqrt{3}} S_{\Delta ABC} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow S_{\Delta BCD} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) S_{\Delta ABC} = \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) S_{\Delta ABC}.$$

С другой стороны

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \angle ABC = \\ = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot 10(1 + \sqrt{3}) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 50(1 + \sqrt{3}).$$

Значит

$$S_{\Delta BCD} = \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \cdot 50(1 + \sqrt{3}) = \frac{50(9 + 5\sqrt{3})}{3}.$$



Спасибо за внимание

