

Лекция № 8

СКАЛЯРНОЕ, ВЕКТОРНОЕ И СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Летучка

(ПИШЕМ **ТОЛЬКО ОТВЕТЫ** НА ВОПРОСЫ!!)

1) Как найти координаты вектора $\vec{a} = \overline{AB}$, если известны координаты точек начала и конца:

$$A = (x_A, y_A, z_A); \quad B = (x_B, y_B, z_B);$$

$$\vec{a} = \overline{AB} = \dots$$

2) Формула для МОДУЛЯ ВЕКТОРА: $|\vec{a}| = \dots$

3) Условие коллинеарности векторов

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z); \quad \vec{b} = (b_x, b_y, b_z) : \dots$$

4) Формула сложения векторов в координатах : $\vec{a} + \vec{b} = \dots$

5) Формула умножения вектора на число в координатах:

$$\lambda \cdot \vec{a} = \dots$$

Летучка(ОТВЕТЫ)

$$1) \overline{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A);.$$

$$2) |\overline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

$$3) \frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z} = \lambda$$

$$4) \overline{a} + \overline{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z);$$

$$5) \lambda \cdot \overline{a} = (\lambda \cdot a_x, \lambda \cdot a_y, \lambda \cdot a_z)$$

СКАЛЯРНОЕ произведение векторов

Как найти координаты вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, если известны координаты точек начала и конца:

$$A = (x_A, y_A, z_A); \quad B = (x_B, y_B, z_B);$$

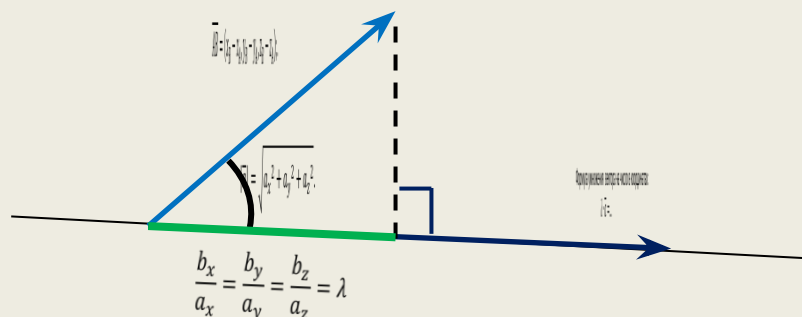
$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \dots$$

Формула для МОДУЛЯ ВЕКТОРА: $|\vec{a}| = \dots$

Формула сложения векторов в координатах : $\vec{a} + \vec{b} = \dots$

Условие коллинеарности векторов

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z); \quad \vec{b} = (b_x, b_y, b_z): \dots$$



Вспомним, что:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z); \quad \text{пр } \vec{b} \vec{a};$$

$$|\vec{b}| \cdot \cos \varphi = \text{пр } \vec{a} \vec{b};$$

Тогда формуле скалярного произведения можно придать другой вид :

$$\vec{a} \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot \text{пр } \vec{a} \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \text{пр } \vec{b} \vec{a}$$

Свойства скалярного произведения

1. При ПЕРЕСТАНОВКЕ МНОЖИТЕЛЕЙ скалярное произведение НЕ ИЗМЕНЯЕТСЯ :

$$(\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{b}, \bar{a}) \quad \bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$$

2. ЧИСЛО МОЖНО ВЫНОСИТЬ за скалярное произведение :

$$(\lambda \bar{a}, \bar{b}) = \lambda (\bar{a}, \bar{b})$$

3. При скалярном умножении вектора на сумму векторов МОЖНО РАСКРЫТЬ СКОБКИ :

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}$$

4. СКАЛЯРНЫЙ КВАДРАТ вектора(то есть скалярное произведение вектора на себя) равен КВАДРАТУ его ДЛИНЫ (МОДУЛЯ) :

$$\bar{a}^2 = \bar{a} \cdot \bar{a} = |\bar{a}| \cdot |\bar{a}| \cdot \cos 0 = |\bar{a}| \cdot |\bar{a}| \cdot 1 = |\bar{a}| \cdot |\bar{a}| = |\bar{a}|^2$$

ЗАМЕЧАНИЕ : поэтому если вектор $\bar{a}$ возвести СКАЛЯРНО в квадрат и затем извлечь КОРЕНЬ, то получим НЕ первоначальный ВЕКТОР, а его МОДУЛЬ :

$$\sqrt{\bar{a}^2} = |\bar{a}|$$

5. Критерий ортогональности

векторов

НЕНУЛЕВЫЕ векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ **ОРТОГОНАЛЬНЫ** (ВЗАИМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫ)

тогда и только тогда, когда их **СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ РАВНО НУЛЮ** :

$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad (\vec{a}, \vec{b}) = 0$$

При $\vec{a} \perp \vec{b}$ угол между ними
равен $\frac{\pi}{2}$.

⇒ Пусть вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны (то есть взаимно перпендикулярны),

тогда угол между ними $\varphi = \widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = \frac{\pi}{2}$; $\cos \varphi = \cos \frac{\pi}{2} = 0$, поэтому

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \frac{\pi}{2} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot 0 = 0.$$

⇐ Если известно, что $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi = 0$ и $|\vec{a}| \neq 0$, $|\vec{b}| \neq 0$, то $\cos \varphi = 0$,

откуда
следует $\varphi = \widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = \frac{\pi}{2}$, то есть вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны: $\vec{a} \perp \vec{b}$.

ВОПРОС: чему равно скалярное произведение координатных

ортов:

$$(\vec{i}, \vec{j}) =$$

$$(\vec{i}, \vec{k}) =$$

$$(\vec{j}, \vec{k}) =$$

Выражение скалярного произведения через координаты

Пусть заданы два вектора: $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$; $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$.

Тогда их СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ равно СУММЕ ПРОИЗВЕДЕНИЙ их
ОДНОИМЕННЫХ (или, другими словами, СООТВЕТСТВУЮЩИХ)

КООРДИНАТ:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$$

ПРИМЕР $ABCD$ — четырехугольник; заданы координаты точек-вершин:

$A(-4, -4, 4), B(-3, 2, 2), C(2, 5, 1), D(3, -2, 2)$.

Доказать, что диагонали четырехугольника $ABCD$
взаимно перпендикулярны (ортогональны).

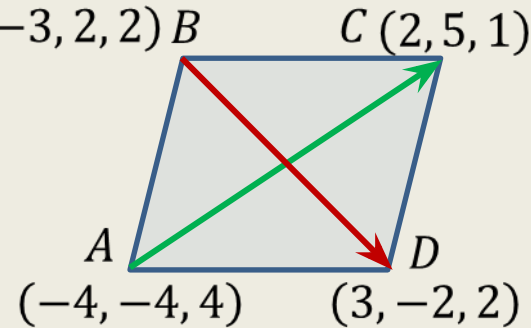
РЕШЕНИЕ Составим вектора, лежащие на
Е: диагоналях

$\vec{AC} = (2 - (-4), 5 - (-4), 1 - 4) = (2 + 4, 5 + 4, -3) = (6, 9, -3)$;

$\vec{BD} = (3 - (-3), -2 - 2, 2 - 2) = (3 + 3, -4, 0) = (6, -4, 0)$;

Найдем скалярное произведение этих
векторов:

$= 36 - 36 + 0 = 0$; По свойству 5 это значит, $\vec{AC} \perp \vec{BD}$ ортогональны,
что



Приложения скалярного

произведения

Угол между векторами

Из формулы для скалярного произведения можно выразить косинус угла между ненулевыми векторами $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi; \quad \cos \varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|},$$

то есть $\cos \varphi = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}};$

Проекция вектора на заданное

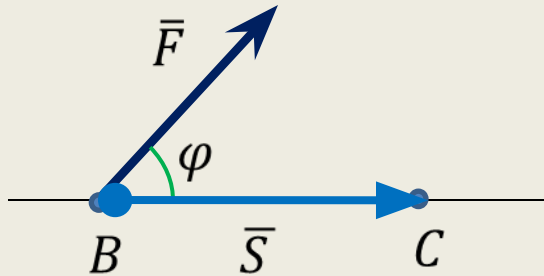
направление

Так как $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{b}| \cdot \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a}$, то

$$\text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{b}|} = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}};$$

Работа постоянной силы

Пусть точка перемещается из положения B в положение C под действием постоянной силы $\vec{F}$, образующей угол φ с перемещением $\overline{BC} = \vec{S}$.



Из физики известно, что работа силы $\vec{F}$ при перемещении $\vec{S}$ равна

$$A = F \cdot S \cdot \cos \varphi,$$

то есть $A = (\vec{F}, \vec{S})$.

Таким образом,

РАБОТА постоянной силы при перемещении точки равна

СКАЛЯРНОМУ ПРОИЗВЕДЕНИЮ

вектора силы $\vec{F}$ на вектор перемещения $\vec{S}$.

ПРИМЕР. Вычислить работу, произведенную силой $\vec{F} = (3; 2; 4)$, если точка перемещается из положения $B = (2; 4; 6)$ в положение $C = (4; 2; 7)$.

Под каким углом к $\overline{BC}$ направлена сила $\vec{F}$?

РЕШЕНИЕ: Находим $\vec{S} = \overline{BC} = (4 - 2; 2 - 4; 7 - 6) = (2; -2; 1)$;

Работа силы вычисляется как скалярное произведение ,
значит :

$$A = (\vec{F}, \vec{S}) =$$

$$= 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 = 6 - 4 + 4 = 6$$

Угол между векторами находим по формуле : $\cos \varphi = \frac{(\vec{F}, \vec{S})}{|\vec{F}| \cdot |\vec{S}|}$

$$\cos \varphi = \frac{6}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 4^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{9 + 4 + 16} \cdot \sqrt{4 + 4 + 1}} =$$

$$= \frac{6}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{9}} = \frac{6}{\sqrt{29} \cdot 3} = \frac{2}{\sqrt{29}}; \quad \varphi = \arccos \frac{2}{\sqrt{29}};$$

