

Элементы символической ЛОГИКИ

Лекция 7

Символическая логика

она же **символическая**

формируется в XIX веке,

благодаря

Готлобу **Фреге** и Бертррану **Расселу**

состоит в обширном использовании
символов для привычных логических
форм, **которые делают логическое
рассуждение более сжатым и
наглядным**

```
graph TD; A[Символическая логика] --> B[Логика высказываний]; A --> C[Логика предикатов];
```

Символическая логика

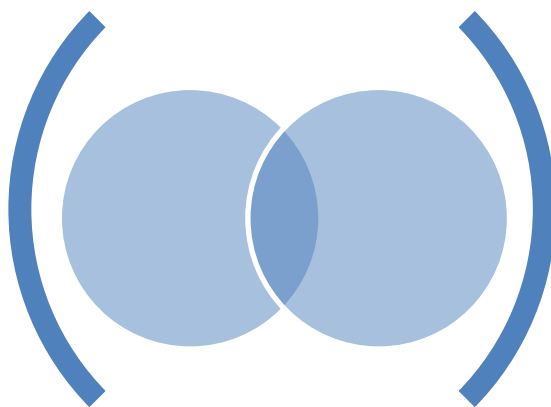
Логика
высказываний

Логика
предикатов

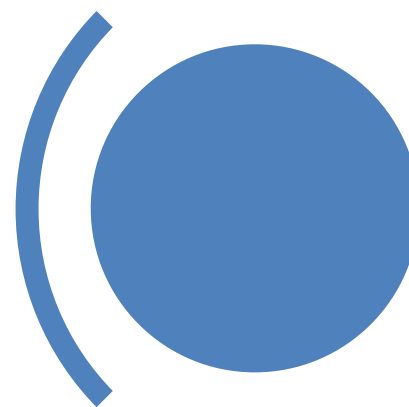
Логика высказываний



Простые
высказывани
я и юнкторы



Сложные
высказывани
я



Выводы

Высказывание

**мысль, выраженная
повествовательным предложением,
которая может быть истинной или
ложной**

Формальный аппарат

$A, B, C, \dots$ – пропозициональные переменные (формулы), отражающие независимый факт;

$\neg$ – унитарная связка-юнктор;

$\wedge, \vee, \oplus, \dots$ – бинарные связки-юнкторы;

$()$ – технические знаки;

$(A \wedge B), (\neg A), \dots$ – формулы.

Юнкторы логики

высказываний

отрицание	НЕ-	$\neg, \sim$
конъюнкция	И	$\wedge, \&$
адъюнкция	ИЛИ	$\vee, +$
контраваленция	ЛИБО-ЛИБО	$\oplus, \nabla$
импликация	ЕСЛИ - ТО	$\rightarrow, \supset$
эквиваленция	ЕСЛИ И ТОЛЬКО ЕСЛИ	$\leftrightarrow, \equiv$

Преобразование конъюнкции

В дизъюнкцию

$$(A \wedge B) = \neg(\neg A \vee \neg B)$$

В импликацию

$$(A \wedge B) = \neg(A \rightarrow \neg B)$$

Преобразование дизъюнкции

В КОНЪЮНКЦИЮ

$$(A \vee B) = \neg(\neg A \wedge \neg B)$$

В ИМПЛИКАЦИЮ

$$(A \vee B) = (\neg A \rightarrow B)$$

Преобразование импликации

В КОНЪЮНКЦИЮ

$$(A \rightarrow B) = \neg(A \wedge \neg B)$$

В ДИЗЪЮНКЦИЮ

$$(A \rightarrow B) = (\neg A \vee B)$$

Преобразование строгой ДИЗЪЮНКЦИИ В КОНЪЮНКЦИЮ

$$(A \oplus B) = (A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$$

- Формулы
 - тождественно-истинные **(законы)**
 - истинные при всех наборах истинностных значений переменных
 - тождественно-ложные **(противоречия)**
 - ложные при всех наборах истинностных значений переменных
 - выполнимые (нейтральные)
 - то истинные, то ложные при различных наборах истинностных значений входящих в них переменных

Правило подстановки

**любую буквенную переменную в
символическом выражении можно
заменять на произвольную формулу**

Например,

$$(p \vee \neg p)$$

$$p = (a \leftrightarrow b)$$

$$((a \leftrightarrow b) \vee \neg(a \leftrightarrow b))$$

Законы символической логики

- дистрибутивности
- ассоциативности
- коммутативности
- двойственности
- контрапозиции
- импортации
- экспортации
- транспозиции
- исключения
- поглощения
- выявления

Закон ассоциативности

$$(A \wedge (B \wedge C)) = ((A \wedge B) \wedge C)$$

$$(A \vee (B \vee C)) = (A \vee B) \vee C)$$

Закон коммутативности

$$(A \wedge B) = (B \wedge A)$$

$$(A \vee B) = (B \vee A)$$

Закон дистрибутивности

для двух переменных

$$(A \wedge (B \vee C)) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

$$(A \vee (B \wedge C)) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

для большего количества переменных

$$(A \vee B) \wedge (C \vee D) = (A \wedge C) \vee (A \wedge D) \vee (B \wedge C) \vee (B \wedge D)$$

$$(A \wedge B) \vee (C \wedge D) = (A \vee C) \wedge (A \vee D) \wedge (B \vee C) \wedge (B \vee D)$$

Закон двойственности

для конъюнкции и дизъюнкции

$$(A \wedge B) = \neg(\neg A \vee \neg B)$$

$$(A \vee B) = \neg(\neg A \wedge \neg B)$$

**для эквивалентности и строгой
дизъюнкции**

$$(A \leftrightarrow B) = \neg(\neg B \oplus \neg A)$$

$$(A \oplus B) = \neg(\neg B \leftrightarrow \neg A)$$

Закон контрапозиции

$$(A \rightarrow B) = (\neg A \rightarrow \neg B)$$

$$((A \wedge B) \rightarrow C) = (\neg C \rightarrow (\neg A \vee \neg B))$$

Закон импортации

$$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) = ((A \wedge B) \rightarrow C)$$

Закон экспортации

$$((A \wedge B) \rightarrow C) = (A \rightarrow (B \rightarrow C))$$

Закон транспозиции

$$((A \wedge B) \rightarrow C) = ((A \wedge \neg C) \rightarrow \neg B)$$

Закон исключения

$$(A \vee B) \wedge (\neg A \vee B) \\ = B)$$

Закон поглощения

$$(A \wedge (A \vee B)) = A$$

$$(A \vee (A \wedge B)) = A$$

Закон выявления

$$(A \vee C) \wedge (B \vee \neg C) = (A \vee C) \wedge (B \vee \neg C) \wedge (A \vee B)$$

$$(A \wedge C) \vee (B \wedge \neg C) = (A \wedge C) \vee (B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B)$$

Логика предикатов

**результат реконструкции естественного
языка**

**Здесь есть точные правила построения
высказываний (формул)
и сложных имен (термов)**

Этот язык предназначен для
аксиоматического построения теорий, для
анализа содержания высказываний
естественного языка и выявления
логических отношений между ними, для
описания правил рассуждения, построения
выводов и доказательств

- Нелогические символы естественного языка
 - Предикатор
 - Предметные функторы
 - Имя

Имена

**обозначают отдельный объект,
бывают простые и сложные.**

Простые не содержат никакой информации об обозначаемых индивидах (имена собственные).

Сложные имена не только обозначают предмет, но и указывают на какие-либо его свойства

Предметные функторы

знаки так называемых предметных функций (функциональная константа)

Наряду с математическими функциями «синус», «логарифм», «умножение» и т.п. сюда относятся такие особые характеристики предметов, как скорость, плотность, возраст, пол, профессия, агрегатное состояние, место жительства и др.

Предикатор

(предикатная константа)

- выражение языка (слова и словосочетания), предметными значениями которого являются **свойства** (одноместные предикаторы) или **отношения** (многоместные предикаторы)

Язык логики предикатов

$p, q,$ $r, p_1 \dots$	пропозициональные переменные (обозначают целые повествовательные предложения)
$a, b,$ $c, a_1 \dots$	предметные константы (обозначают единичные имена)
$x, y, z,$ $x_1 \dots$	предметные переменные (обозначают общие имена)
$P, Q,$ $R,$ $P_1 \dots$	предикатные символы (обозначают свойства и отношения)
$\neg, \wedge,$ $\vee,$ $\rightarrow \dots$	логические переменные (обозначают типы связи)
$\forall$	квантор всеобщности («все», «каждый»)
$\exists$	квантор существования («некоторые», «хотя бы

Определение терма

- 1
 - любая предметная переменная и предметная константа – термы
- 2
 - если F – предметный функтор, а $t_1, t_2, \dots, t_n$ – термы, то $F^n(t_1, t_2, \dots, t_n)$ – это термы
- 3
 - термами являются только выражения, которые построены по пунктам 1 и 2

Пример

a – «Аполлон»

в – «Венера»

f¹ – «красавец»

g² – «молодой»

f¹(a) – Аполлон – красавец.

g²(a, в) – Аполлон и Венера – молодые.

g²(f¹(a), в) – Красавец Аполлон и Венера – молодые.

f¹(g²(a, в)) – Красавцы, молодые Аполлон и Венера.

Определение формулы

1

если P^n – n -местный предикатор, а $t_1, \dots, t_n$ –
термы, то выражение $P^n(t_1, \dots, t_n)$ –
формула

2

если A и B – формулы, то $\neg A$, $(A \wedge B)$,
 $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$ – формулы

3

если A формула, x – переменная,
то $\forall x(A)$ и $\exists x(A)$ – формулы

4

формулы - только такие выражения,
которые построены по пунктам 1 – 3

Область действия квантора

Если формула **A** имеет вид $\forall xB$ или $\exists xB$, то областью действия квантора $\forall$ или $\exists$ по переменной **x** является формула **B**

Пример

«Если целое число больше 13, то его квадрат делится без остатка на 4 или на 5»

$$\forall x((Px \wedge Q_2(x, 13)) \rightarrow (R(g(x, x), 4) \vee R(g(x, x), 5))),$$

где

P - «быть целым числом»,

Q2 - «больше чем»,

R - «делится на»

Некоторые законы логики предикатов

1. Взаимовыразимость кванторов

$$\forall x A \leftrightarrow \neg \exists x \neg A,$$

$$\exists x A \leftrightarrow \neg \forall x \neg A.$$

2. Отрицание кванторов

$$\neg \forall x A \leftrightarrow \exists x \neg A,$$

$$\neg \exists x A \leftrightarrow \forall x \neg A.$$

3. Перестановка кванторов

$$\forall x \forall y A \leftrightarrow \forall y \forall x A,$$

$$\exists x \exists y A \leftrightarrow \exists y \exists x A,$$

$$\exists x \forall y A \rightarrow \forall y \exists x A.$$

Некоторые законы логики предикатов

4. Законы пронесения и вынесения кванторов

а) конъюнкция

$$\forall a(A \wedge B) \leftrightarrow (\forall aA \wedge \forall aB);,$$

$$\exists a(A \wedge B) \rightarrow (\exists aA \wedge \exists aB),$$

б) дизъюнкция

$$\exists a(A \vee B) \leftrightarrow (\exists aA \vee \exists aB),$$

$$(\forall aA \vee \forall aB) \rightarrow \forall a(A \vee B),$$

в) импликация

$$\forall a(A \rightarrow B) \rightarrow (\forall aA \rightarrow \forall aB),$$

$$(\exists aA \rightarrow \exists aB) \rightarrow \exists a(A \rightarrow B).$$

Примеры

«Все люди интересуются строением космоса»,

$$\forall x(P_1(x) \rightarrow Q_1(x, f(a)))$$

где P_1 – «быть человеком», Q_1 – «интересоваться»,
 f – «строение ...», a – «космос»

«Некоторые звёзды не видны невооружённым глазом, но видны в телескоп»

$$\exists x(P_2(x) \wedge \forall y \forall z((P_3(y) \wedge P_4(z)) \rightarrow (\neg Q_2(x, y) \wedge Q_2(x, z))))$$

где P_2 – «быть звездой», P_3 – «быть невооружённым органом зрения», P_4 – «быть телескопом»,

Исчисление естественного вывода

порождение одних формул из других

Здесь нет аксиом. Знание не истинное,
а доказуемое.

Правила вывода

1. Введение
конъюнкции

$$\frac{}{A; B}$$

$$A \wedge B$$

2. Удаление конъюнкции

$$\frac{A \wedge B}{A}$$

$$A$$

$$\frac{A \wedge B}{B}$$

$$B$$

3. Введение

дизъюнкции

$$A$$

$$B$$

$$A \vee B$$

$$A \vee B$$

4. Удаление

дизъюнкции

$$A \vee B$$

$$\frac{A \rightarrow C}{B \rightarrow C}$$

$$B \rightarrow C$$

$$C$$

Правила вывода

5. Введение импликации 6. Удаление импликации

[A] + гипотеза

:

B

$A \rightarrow B$ - гипотеза

A

$A \rightarrow B$

B

7. Введение отрицания

[A] + гипотеза

:

B

$\neg B$

$\neg A$

8. Удаление отрицания

$\neg\neg A$

A

Пример

«Семён сидит дома или разговаривает по телефону. Если он сидит дома, то он скучает. Он не разговаривает по телефону. Стало быть, он скучает».

(1) $A \vee B$

(2) $A \rightarrow C$

(3) $\neg B$

(4) A 1, 3, удаление адъюнкции

(5) C 2, 4, modus ponens

Спасибо за внимание