8. Графы

8.1. Типы графов

Ориентированный граф

Неориентированный граф

8.1. Ориентированный граф

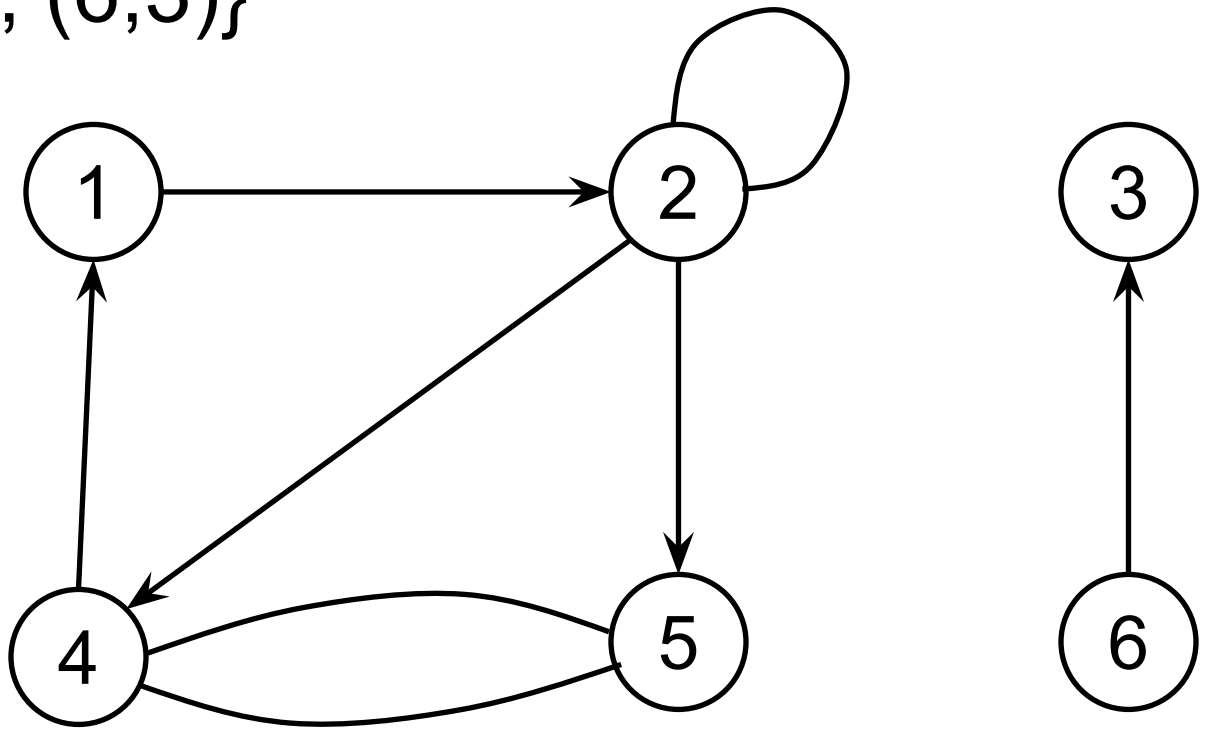
Ориентированный граф G – пара (*V, E*), где

V – конечное множество вершин графа *G*, $V = \{v_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, v_i – вершина графа

E – множество ребер графа *G*; упорядоченные пары вершин из *V*, $E = \{e_j\}$, $e_i = (u, v)$, $u \in V$, $v \in V$, e_i – ребро графа; выходит из вершины *u* и входит в вершину *v*

8.1. Ориентированный граф

Пример: V = {1, 2, 3, 4, 5, 6},
E = {(1,2), (2,2), (2,4), (2,5), (4,1), (4,5), (5,4), (6,3)}



8.2. Неориентированный граф

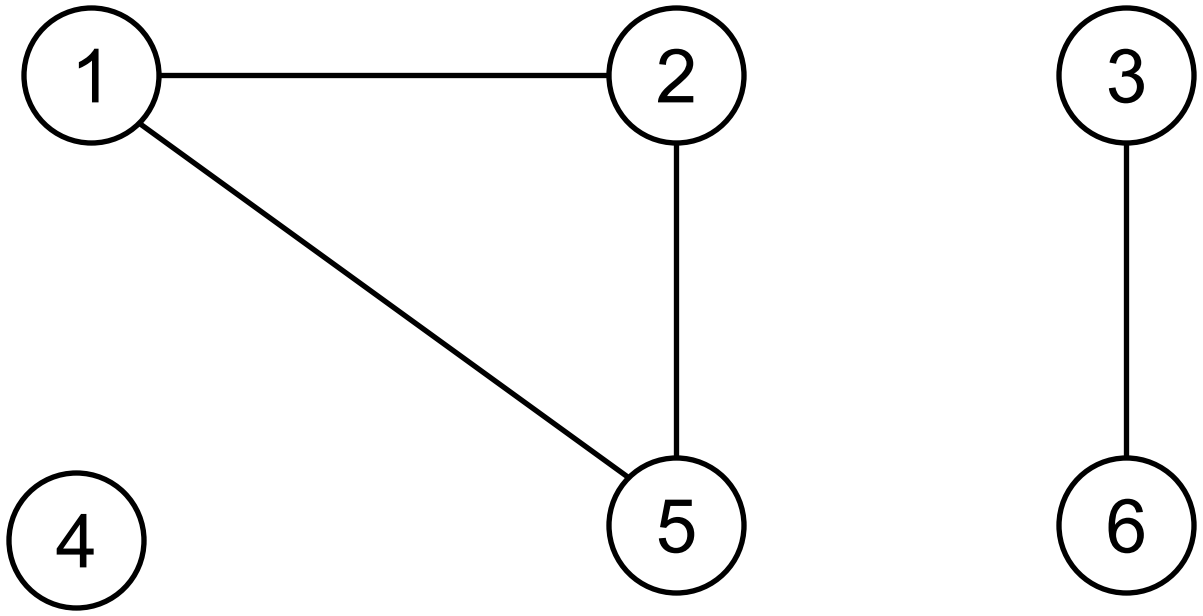
Неориентированный граф G – пара (*V, E*), где

V – конечное множество вершин графа *G*, $V = \{v_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, v_i – вершина графа

E – множество ребер графа *G*; неупорядоченные пары вершин из *V*, $E = \{e_j\}$, $e_i = (u, v)$, $u \in V$, $v \in V$, $u \neq v$
e_i – ребро графа; соединяет вершины *u* и *v*

8.2. Неориентированный граф

Пример: V = {1, 2, 3, 4, 5, 6},
E = {(1,2), (1,5), (2,5), (3,6)}



8.3. Определения

- Если (*u, v*) – ребро графа *G*, тогда вершина *u* графа – *смежная* с вершиной *v*: *u* □ *v*
- *Степень вершины* в неориентированном графе – число ребер, соединяющих ее с другими вершинами
- Вершина со степенью 0 – *изолированная*

8.3. Определения

- В ориентированном графе: *исходящая степень* – количество выходящих из вершины ребер, *входящая степень* – количество входящих в вершину ребер
- *Степень вершины* в ориентированном графе = исходящая степень + входящая степень

8.3. Определения

- *Путь (маршрут) длины k* от вершины *u* к вершине *v* в графе *G = (V, E)* – последовательность вершин $\langle v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle$ такая, что $u = v_0$, $v = v_k$ и $(v_{i-1}, v_i) \in E$ для $i = 1, 2, \ldots, k$
- *Длина пути* – количество составляющих его ребер

8.3. Определения

- Путь *содержит* вершины $v_0, v_1, \ldots, v_k$ и ребра $(v_0, v_1), (v_1, v_2), \ldots, (v_{k-1}, v_k)$
- Если имеется путь p из вершины u в вершину v, говорят, что вершина u *достижима* из вершины v по пути p
- Пусть является *простым*, если все вершины пути – различны

8.3. Определения

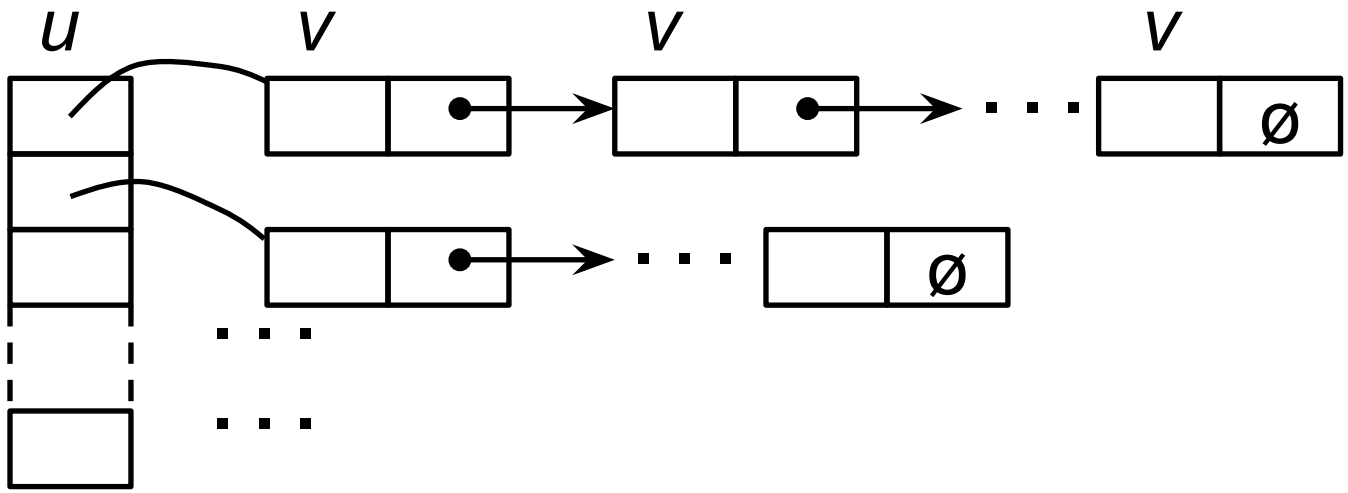
- В ориентированном графе путь $\langle v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle$ образует *цикл*, если $v_0 = v_k$; цикл *простой*, если все вершины $v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}$ различны
- *Петля* – цикл с длиной 1
- В неориентированном графе путь $\langle v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle$ образует (*простой*) *цикл*, если $k \geq 3$, $v_0 = v_k$ и все вершины $v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}$ различны
- Граф без циклов – *ациклический*

8.3. Определения

- *Взвешенный* граф – граф, с каждым ребром которого связан определенный вес, обычно определяемый *весовой функцией* $w: E \to R$

8.4. Представление графа

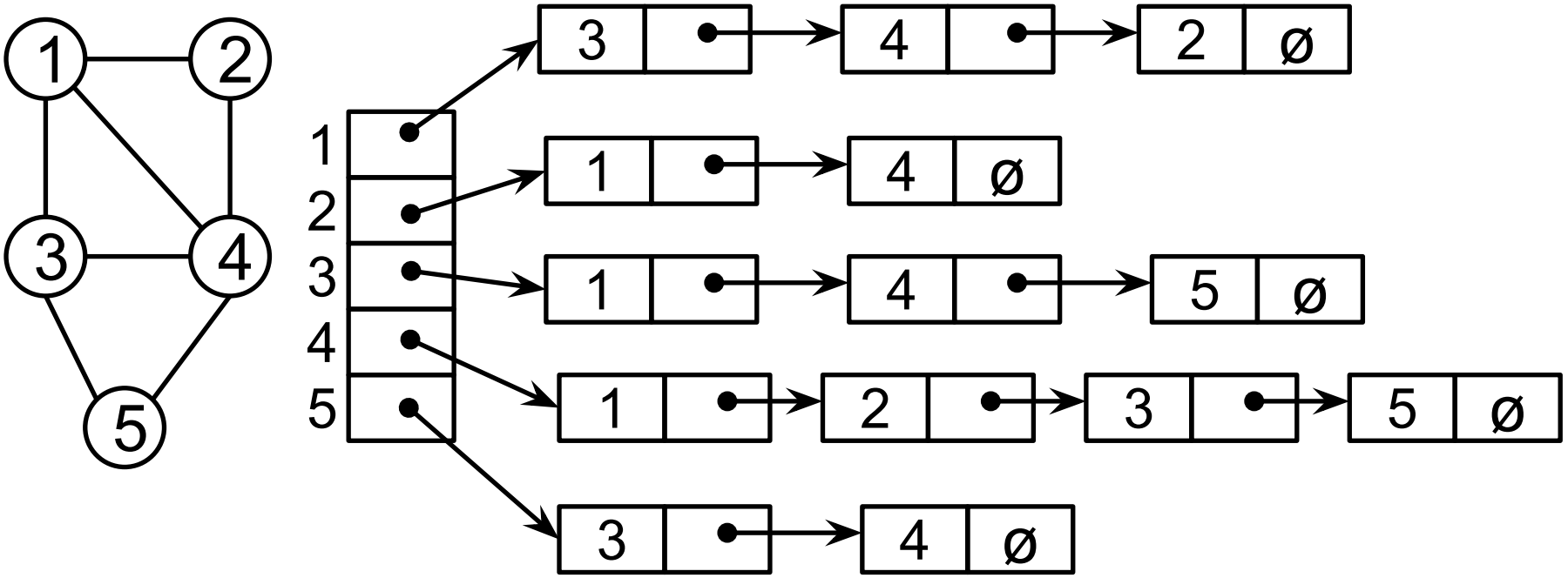
1. Набор списков смежных вершин



Для взве́ше́нных графов вес ребра (*u*, *v*) хранится вместе с вершиной *v* в списке смежности *u*

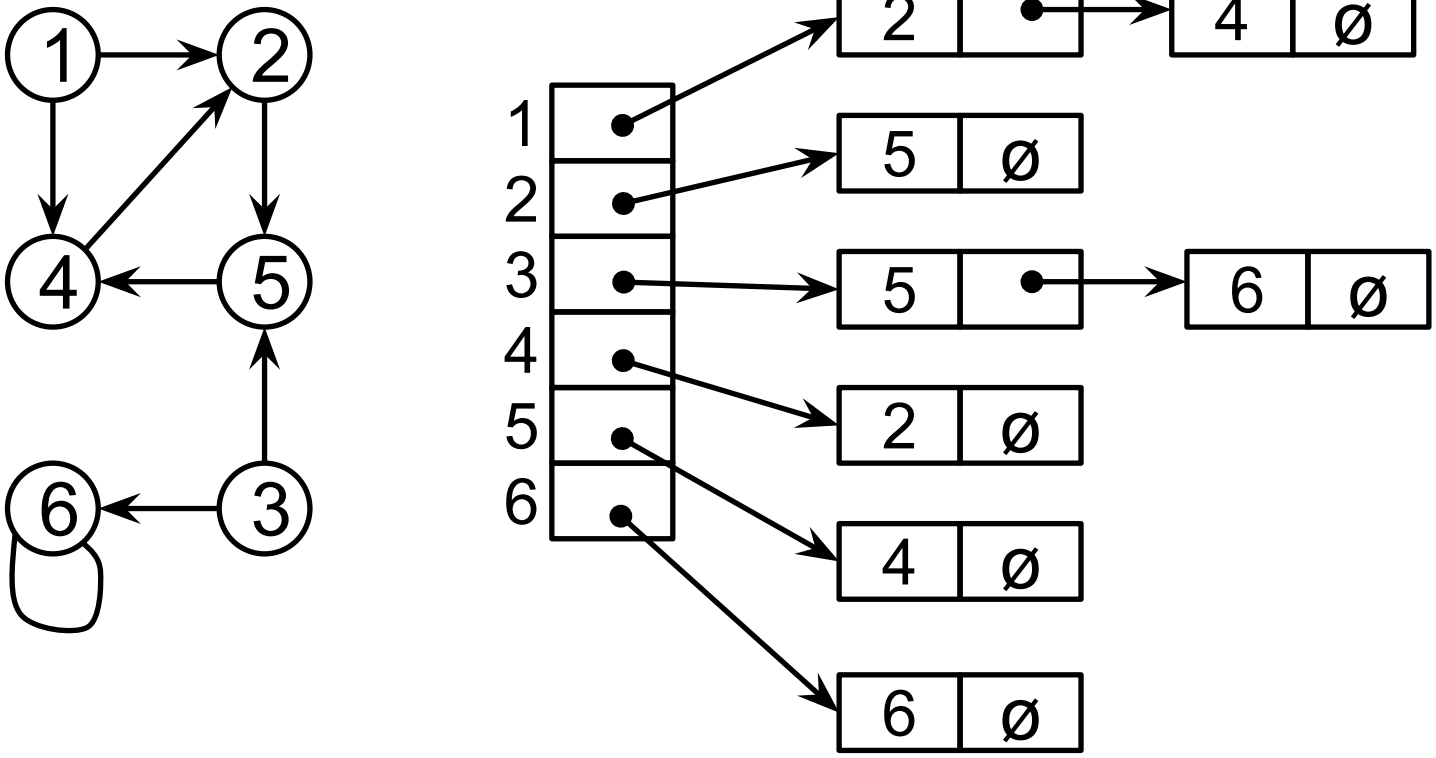
8.4. Представление графа

Пример – неориентированный граф



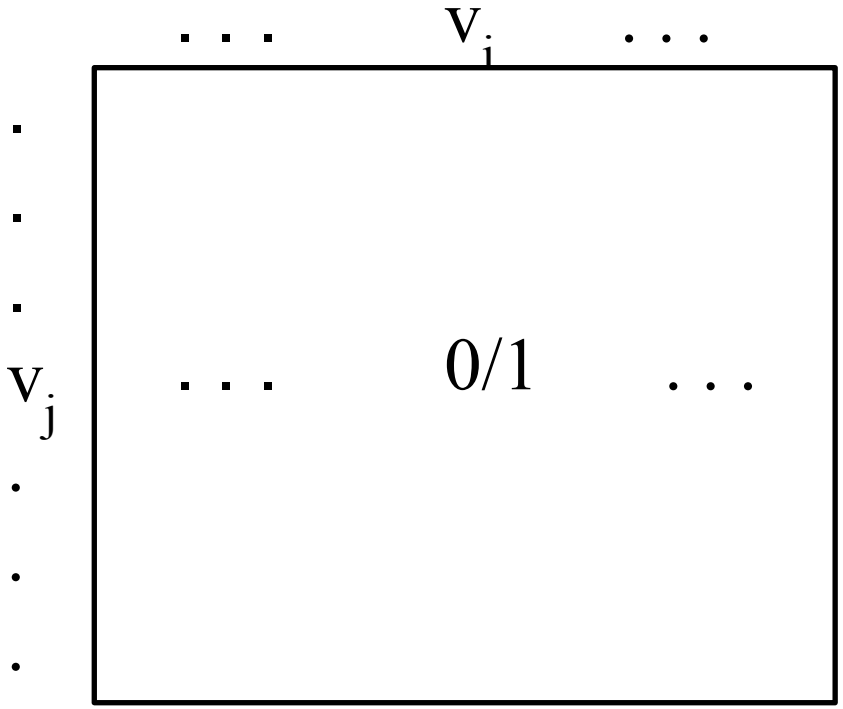
8.4. Представление графа

Пример – ориентированный граф



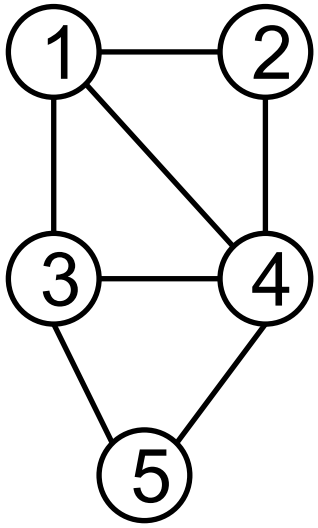
8.4. Представление графа

2. Матрица смежности



8.4. Представление графа

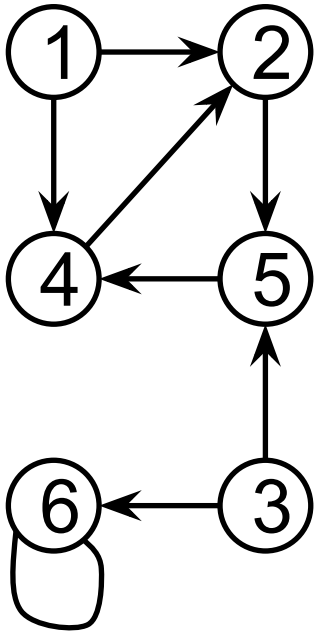
Пример – неориентированный граф



	1	2	3	4	5
1	0	1	1	1	0
2	1	0	0	1	0
3	1	0	0	1	1
4	1	1	1	0	1
5	0	0	1	1	0

8.4. Представление графа

Пример – ориентированный граф



	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	1	0	0
2	0	0	0	0	1	0
3	0	0	0	0	1	1
4	0	1	0	0	0	0
5	0	0	0	1	0	0
6	0	0	0	0	0	1

8.5. Поиск в ширину

Один из простейших алгоритмов обхода графа

Задан граф $G = (V, E)$

Выделена исходная вершина s

Находятся все вершины, достижимые из s

Строится *дерево поиска в ширину* с корнем s

8.5. Поиск в ширину

Окрашивание вершин графа:

белые – еще не открытые вершины,

серые и черные – открытые вершины, которые обрабатываются по-разному:

вершины, смежные с черной, серые или черные;

вершины, смежные с серой, могут быть белыми

8.5. Поиск в ширину

Корень дерева – s

Сканируется список смежности открытой вершины u : если открывается белая вершина v, то вершина v и ребро (u, v) добавляются в дерево

u – предшественник (или родитель) v в дереве поиска вширь, v – потомок u

8.5. Алгоритм поиска BFS(G, s)

Обозначения:

$Adj[u]$ – список смежности для вершины u

$color[u]$ – цвет вершины u

$pred[u]$ – предшественник вершины u; если предшественника нет, $pred[u] = NULL$

$d[u]$ – расстояние от s до вершины u

Q – очередь для работы с множеством серых вершин

8.5. Алгоритм поиска BFS(G, s)

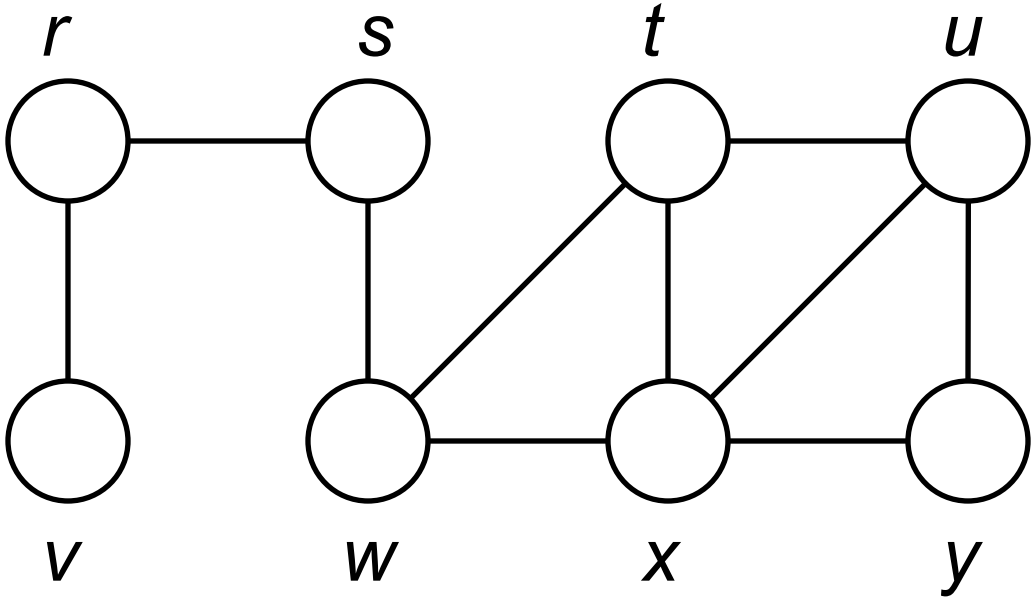
Инициализация:
Для каждой вершины $u \in V[G]$, кроме s {
    color[u] = белый
    d[u] = ∞
    pred[u] = NULL
}
color[s] = серый
d[s] = 0
pred[s] = NULL
Записать *s* в очередь *Q*

8.5. Алгоритм поиска BFS(G, s)

```
while Q не пуста {
    u = очередная вершина из Q
    для каждой v ∈ Adj[u]
        if color[v] = белый {
            color[v] = серый
            d[v] = d[u] + 1
            pred[v] = u
            Записать v в Q
        }
    color[u] = черный
}
```

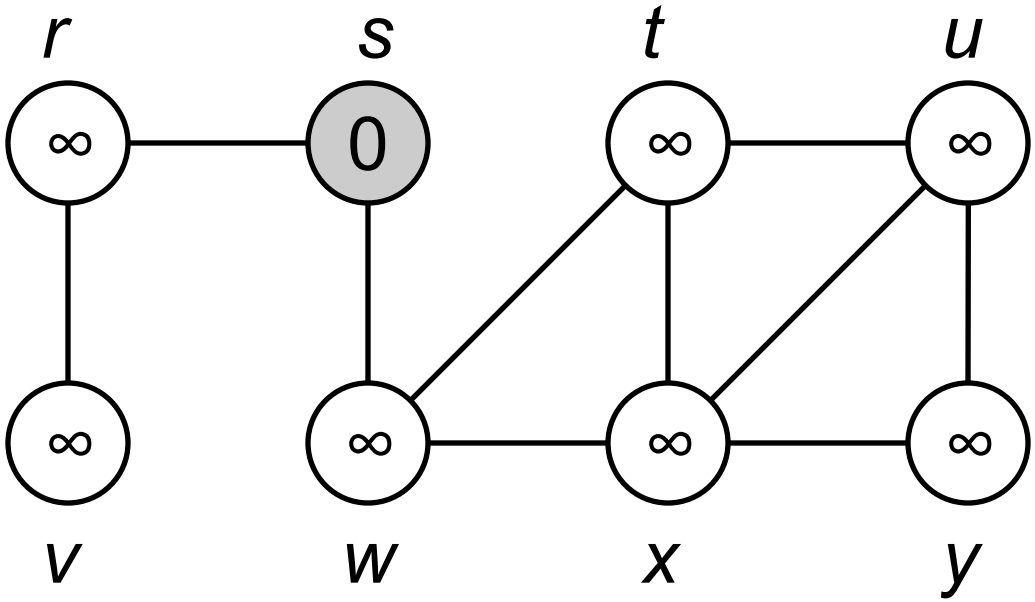
8.6. Пример

Исходный граф



8.6. Пример

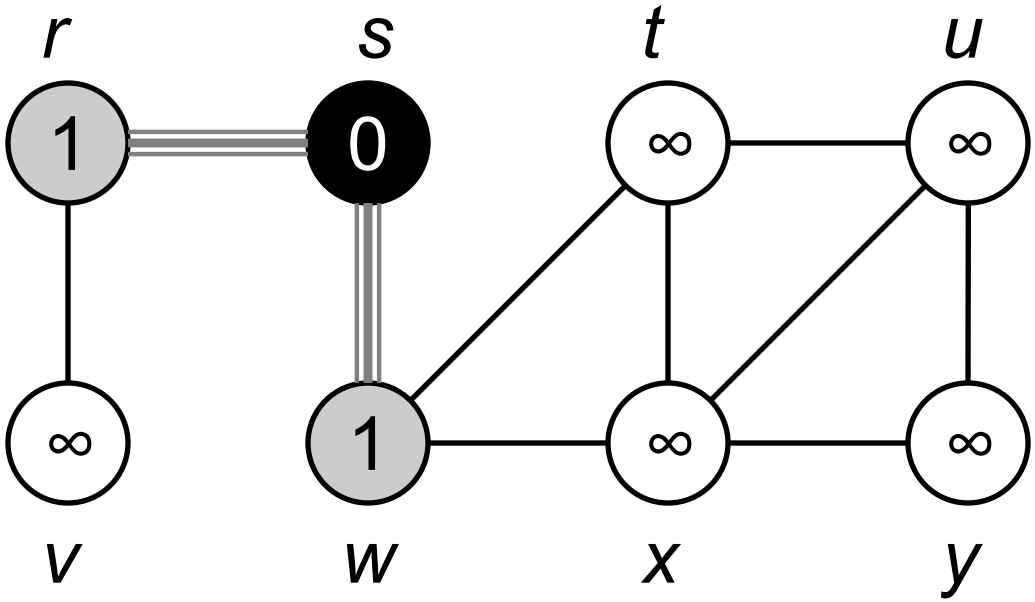
Инициализация



Q | s |
0

8.6. Пример

1-я итерация цикла while

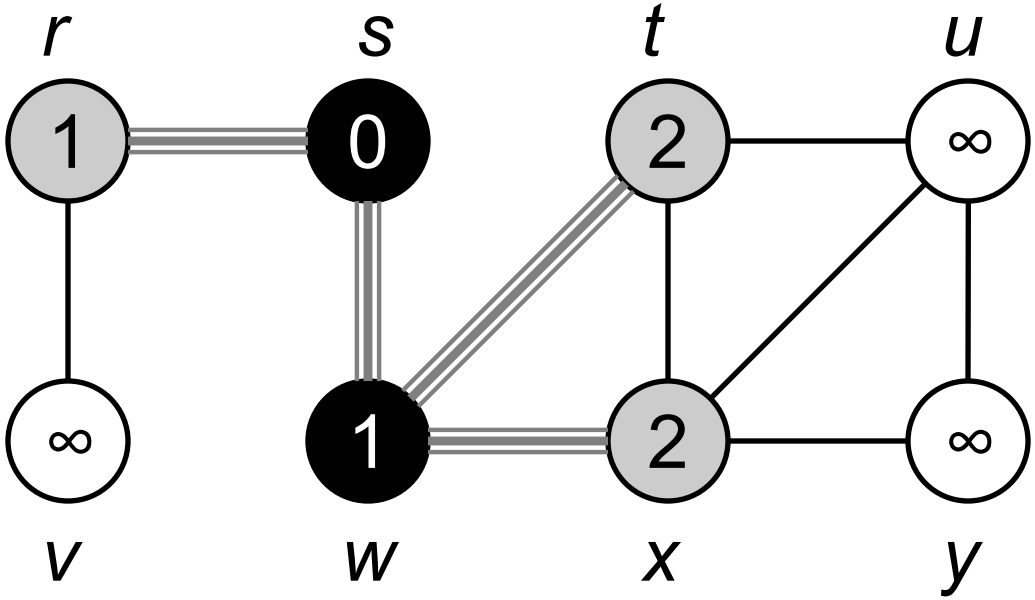


Q

w	r
1	1

8.6. Пример

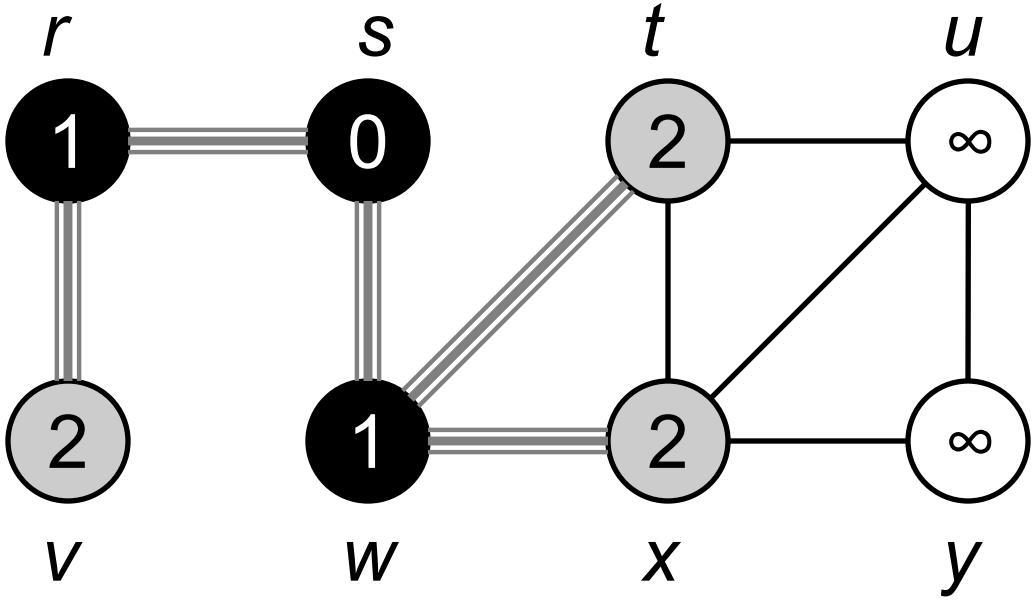
2-я итерация цикла while



Q	r	t	x
	1	2	2

8.6. Пример

3-я итерация цикла while

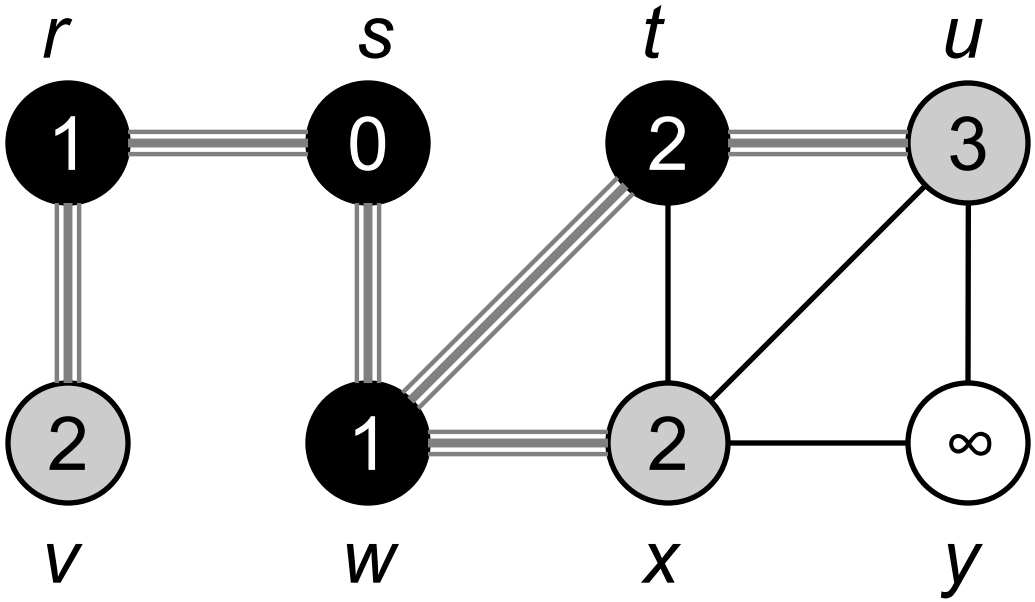


Q

t	x	v
2	2	2

8.6. Пример

4-я итерация цикла while

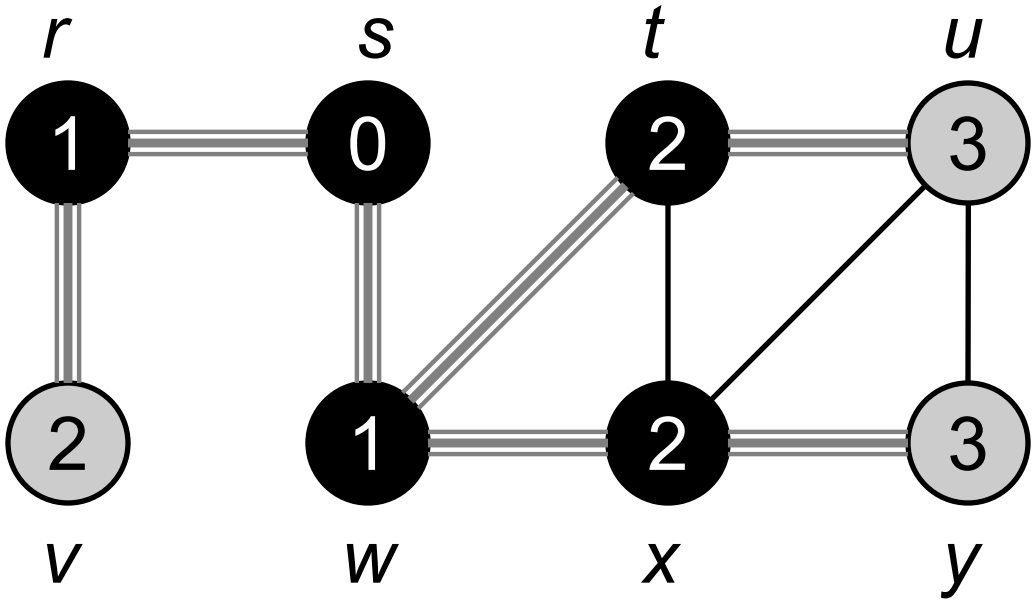


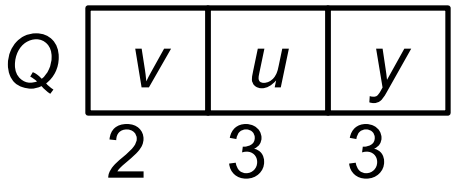
Q

x	v	u
2	2	3

8.6. Пример

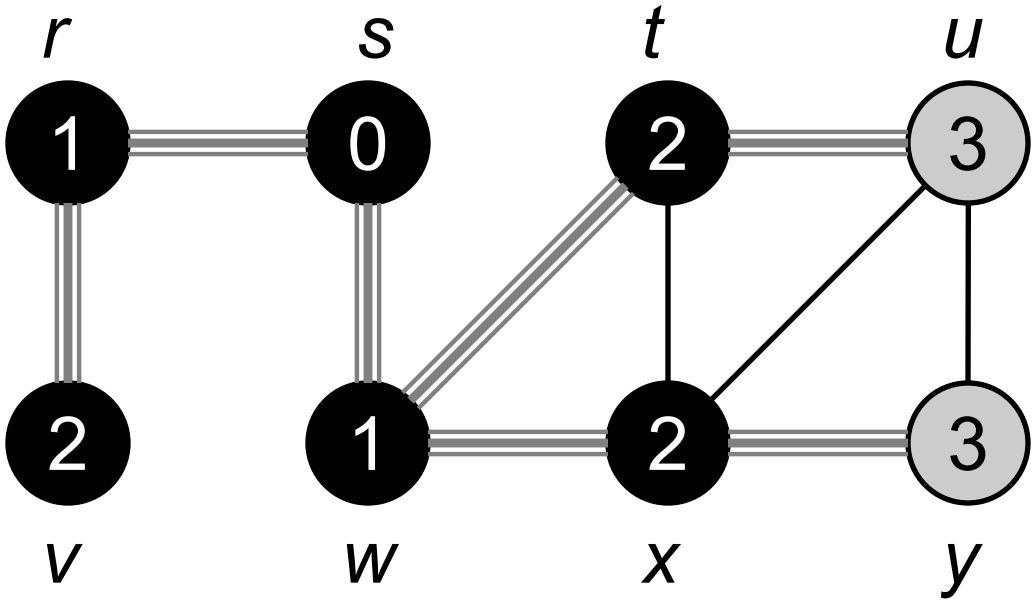
5-я итерация цикла while





8.6. Пример

6-я итерация цикла while

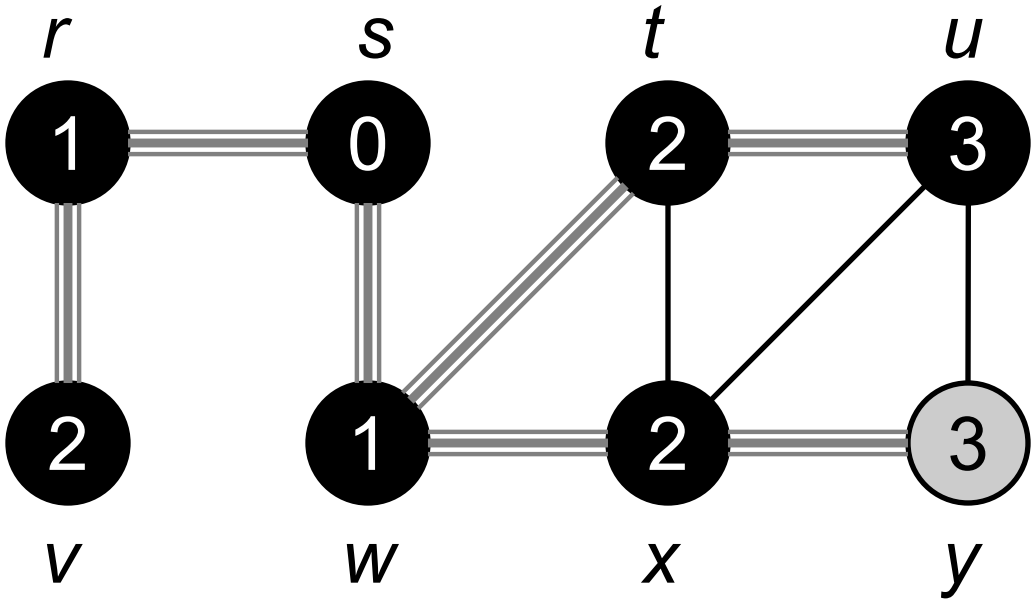


Q

u	y
3	3

8.6. Пример

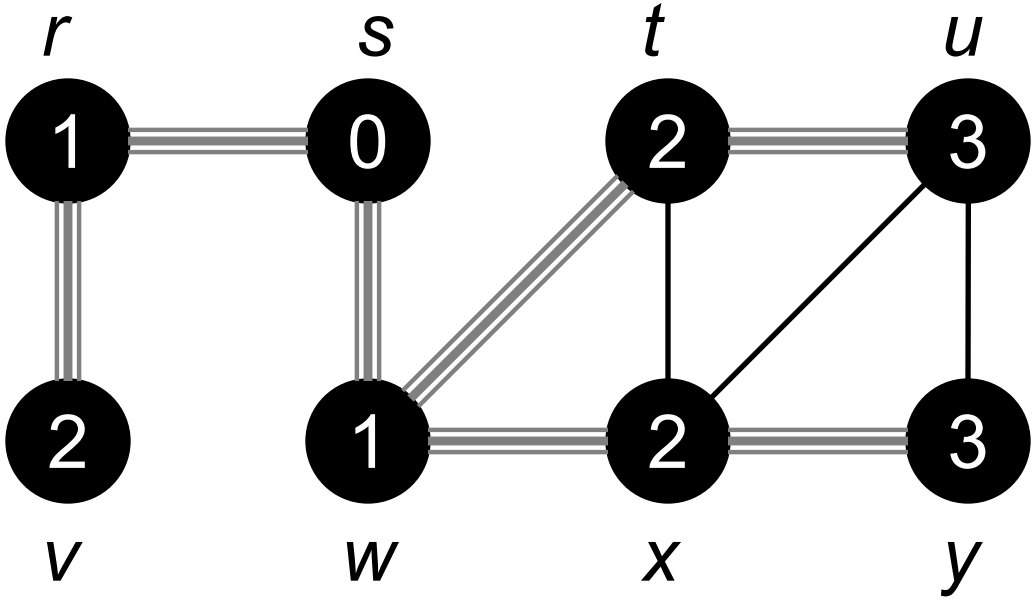
7-я итерация цикла while



Q | y | 3

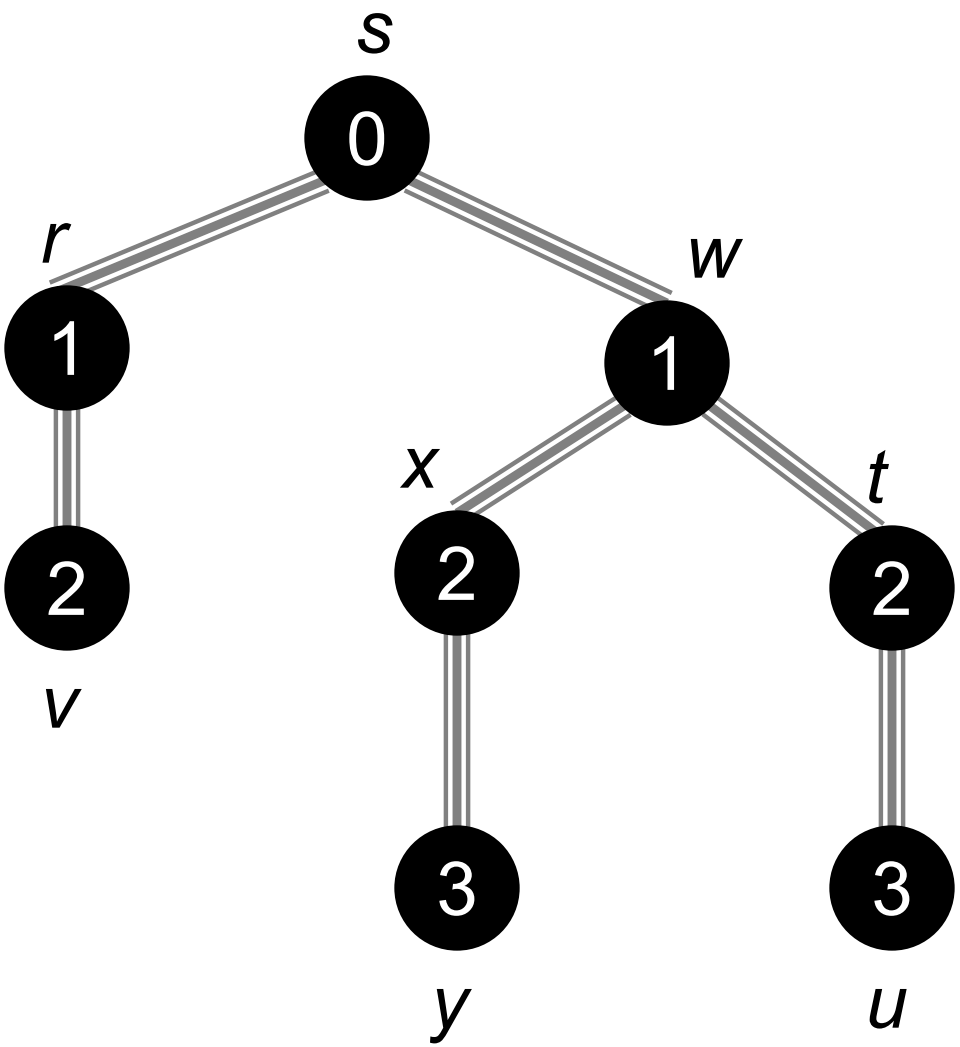
8.6. Пример

8-я итерация цикла while



Q Ø

8.6. Пример



8.7. Анализ алгоритма

Общее время операций с очередью – $O(V)$

Сумма длин всех списков смежности – $\Theta(E)$

Общее время сканирования списков – $O(E)$

Накладные расходы на инициализацию – $O(V)$

Общее время работы алгоритма BFS – $O(V + E)$

8.8.

8..

8..

8..

8..

8..

8..

8..

8..

8..

8..

8..

8..

8..

8..

8..

8..

8..