

Санкт-Петербургский
архитектурно-строительный
колледж

Математика

(повышенный уровень)

Литература

Валуцэ И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов на базе средней школы.– М.: Наука, 1989.

Красс М.С., Чупрынов Б.П. Математика для экономистов.– СПб.: Питер, 2007

Лунгу К.Н. Линейное программирование. Руководство к решению задач. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005

Математика для техникумов.

Алгебра и начала анализа. Под ред. Г.Н. Яковлева. Ч.2 – М.: Наука. 1988

Матрицы и действия над ними

Матрицы и действия над ними

Определение

Матрицей называется система $m \times n$ элементов, расположенных в прямоугольной таблице из m строк и n столбцов.

Элементами матрицы могут быть числа, функции, символы к которым применимы алгебраические операции

Термины и обозначения

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & a_{ik} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

Термины и обозначения

Элемент матрицы a_{ik}

i – номер строки (от 1 до m)

k – номер столбца (от 1 до n)

Матрица называется
квадратной, если количество
строк равно количеству
столбцов ($m = n$)

Термины и обозначения

Строчная матрица ($m = 1$)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \end{vmatrix}$$

Столбцовая матрица ($n = 1$)

$$\begin{vmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{vmatrix}$$

Термины и обозначения

Диагональная матрица ($m = n$ и ненулевые элементы расположены только на главной диагонали)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{ii} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Термины и обозначения

Единичная матрица (диагональная матрица, ненулевые элементы которой равны единице)

$$E = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Термины и обозначения

Симметричная матрица $a_{ik} = a_{ik}$
(элементы, симметричные
относительно главной диагонали,
равны)

Нулевая матрица $a_{ik} = 0$
(все элементы матрицы равны
нулю)

Термины и обозначения

Транспонирование матрицы

(поменять местами
строки и столбцы)

$$A^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & a_{ki} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

Действия над матрицами

Сложение (вычитание) матриц

Действие определено только для матриц одинакового размера

$$\begin{matrix} A \\ = \\ B \end{matrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$
$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{vmatrix}$$

Действия над матрицами

Сложение (вычитание) матриц

$$C = A \pm B =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \dots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \dots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{vmatrix}$$

$$C_{ik} = A_{ik} \pm B_{ik}$$

Действия над матрицами

Умножение матрицы на число

$$B = \lambda \cdot A =$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \lambda \cdot a_{12} & \dots & \lambda \cdot a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda \cdot a_{m1} & \lambda \cdot a_{m2} & \dots & \lambda \cdot a_{mn} \end{vmatrix}$$

$$B_{ik} = \lambda \cdot A_{ik}$$

На λ умножаются **все** элементы
матрицы

Действия над матрицами

Произведение двух матриц

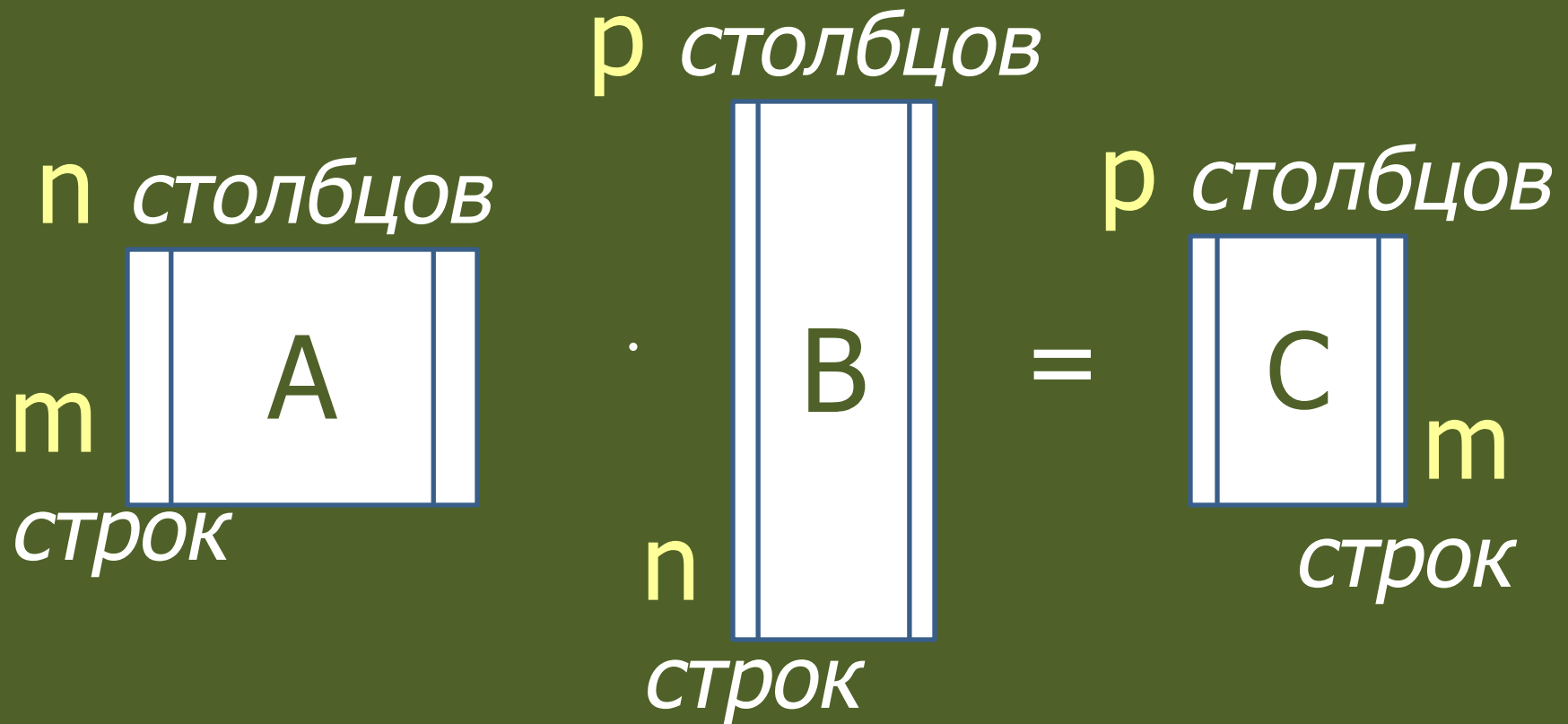
$$C = A \cdot B$$

Произведение имеет смысл для квадратных матриц одинакового размера, либо для прямоугольных матриц, где:

число столбцов матрицы A равно
числу строк матрицы B

Действия над матрицами

Произведение двух матриц



Действия над матрицами

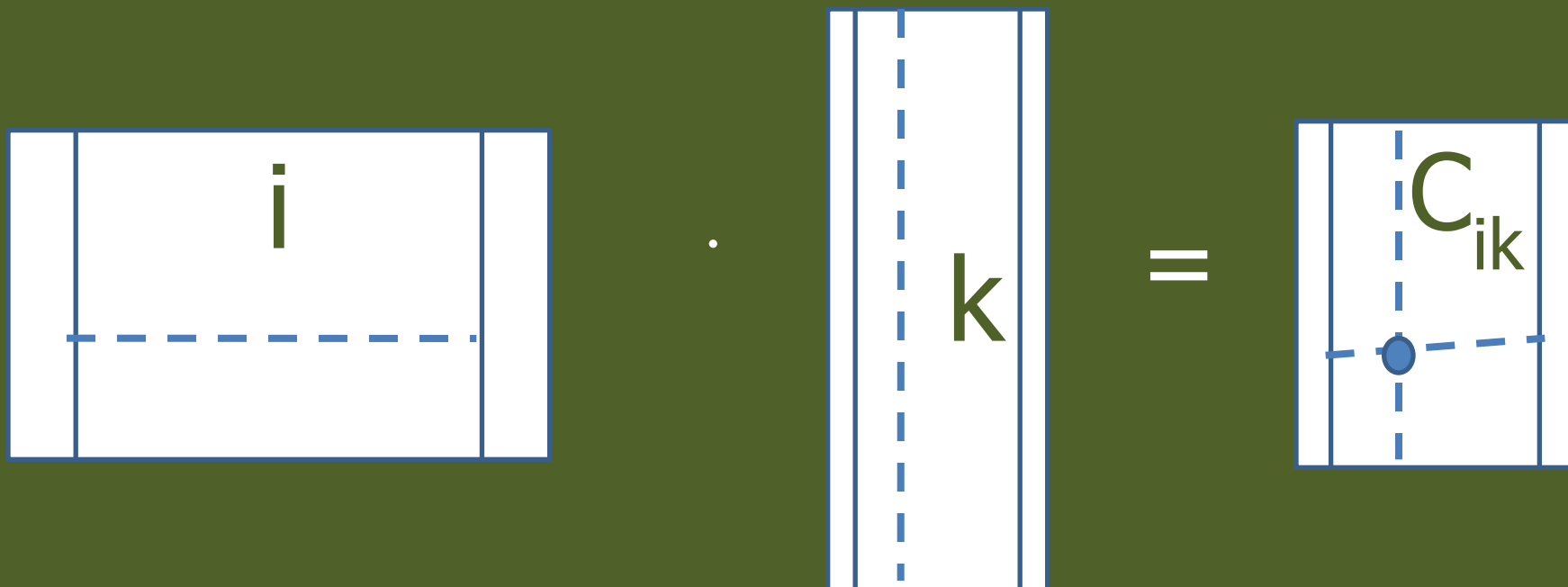
Вычисление элементов матрицы C

Элемент C_{ik} равен
сумме произведений
элементов

i -й строки матрицы A на
 k -й столбец матрицы B

Действия над матрицами

Вычисление элементов матрицы C



$$C_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \dots + a_{in} \cdot b_{nk}$$

Действия над матрицами

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 7 & 1 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 44 & 20 \\ 24 & 25 \end{vmatrix}$$

$$C_{11} = 1 \cdot 6 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 8 = 44$$

$$C_{12} = 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 7 = 20$$

$$C_{21} = 2 \cdot 6 + (-4) \cdot 7 + 5 \cdot 8 = 24$$

$$C_{22} = 2 \cdot (-3) + (-4) \cdot 1 + 5 \cdot 7 = 25$$

Действия над матрицами

Частный случай:

произведение строки на столбец дает
один элемент, при этом число
столбцов матрицы A должно
равняться числу строк матрицы B

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{m1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} \end{bmatrix}$$

Действия над матрицами

Частный случай:

произведение столбца на строчку
имеет смысл всегда, при этом число
строк матрицы С равно числу строк
матрицы А и число столбцов матрицы
С равно числу столбцов матрицы В

$$\begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ax & ay & az \\ bx & by & bz \end{vmatrix}$$

Действия над матрицами

Свойство произведения матриц

В общем случае $AB \neq BA$

Если $AB = BA$, то такие матрицы называются перестановочными или коммутирующими.

Для квадратных матриц

$$AE = EA = A$$

где E — единичная матрица

Действия над матрицами

Пример

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}$$

Найти AB и
 BA Ответ

$$AB = \begin{vmatrix} 11 & -19 \\ 7 & -12 \end{vmatrix} \quad BA = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Запись в матричной форме линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 3 \\ 4x_1 + x_2 = 8 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 20 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 2x_1 & -3x_2 & x_3 \\ 4x_1 & x_2 & 0x_3 \\ 3x_1 & 4x_2 & 2x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 \\ 8 \\ 20 \end{vmatrix}$$

Запись в матричной форме линейных уравнений

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & -3 & 1 \\ \hline 4 & 1 & 0 \\ \hline 3 & 4 & 2 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline x_1 \\ \hline x_2 \\ \hline x_3 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 8 \\ \hline 20 \\ \hline \end{array}$$

$A \qquad X \qquad B$

$$AX = B, \text{ откуда } X = A^{-1}B$$

Функции EXCEL для работы с матрицами

ТРАНСП() МУМНОЖ() МОБР()

Порядок работы

1. Записать исходную матрицу.
2. Выделить область ячеек для помещения результата.
3. Выбрать нужную функцию и записать аргументы.
4. Завершить командой матричной операции **Ctrl + Shift + Enter**.

Домашнее задание

1. Выучить конспект лекции.
2. Учебник Красс М.С., Чупрынов Б. П. Математика для экономистов.— СПб.: Питер, 2007
§ 1.2.1, 1.2.2, 1.2.3, 1.2.4
3. Подготовится к практической работе № 1
«Действия с матрицами»

Определители

Определители

Определителем называется число, соответствующее квадратной матрице.

Число есть сумма $n!$ произведений элементов матрицы n -го порядка, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца. Знак каждого произведения определяется особым правилом.

Определители

Обозначения

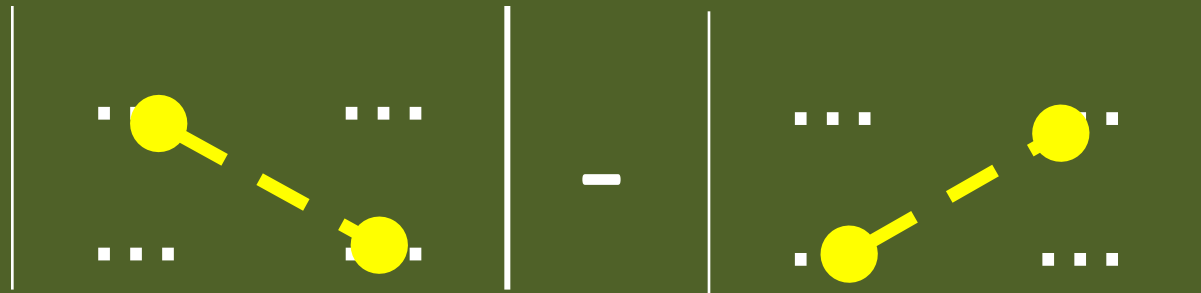
$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$|A| = \Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Определители

Вычисление определителя
второго порядка $n = 2, n! = 2$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$



Определители

Вычисление определителя
третьего порядка $n = 3$, $n! = 6$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} \\ &\quad - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - \\ &\quad a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} \end{aligned}$$

Определители

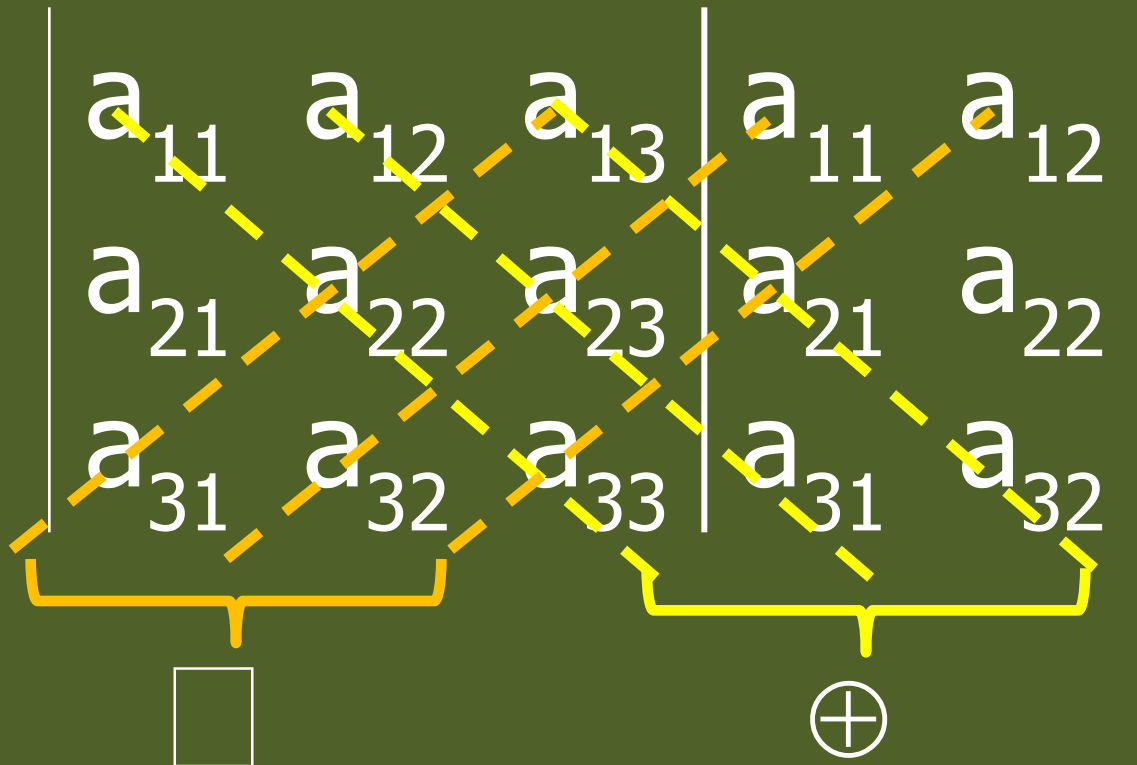
Правило Саррюса

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$$

Определители

Правило Саррюса (вариант)



$$\begin{aligned} & a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} \\ & - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} \end{aligned}$$

Определители

Пример

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 5 - 8 + 12 - (-3 + 8 + 20) = -16$$

Минор элемента определителя

Минором какого либо элемента определителя называется определитель, полученный из данного, путем вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых стоит элемент.

Минор элемента определителя

Пример: минор к элементу a_{11}

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Алгебраическое дополнение

Алгебраическим дополнением

элемента определителя называется его минор, взятый со своим или противоположным знаком согласно правилу: если сумма номеров столбца и строки – четная, то минор берется со своим знаком, если нечетная то с противоположным.

Алгебраическое дополнение

Для выполнения этого правила
перед минором записывается

$$\text{множитель} \\ (-1)^{(i+k)}$$

Теорема

Определитель любого порядка
равен сумме произведений
элементов любой строки (столбца)
на их алгебраические дополнения.

Алгебраическое дополнение

Для определителя 3-го порядка
разложение по 1-й строке:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} +$$
$$+ (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \cdot b_1 + (-1)^{1+3} \cdot c_1 \cdot$$
$$b_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Второе слагаемое берется
со знаком минус!

Свойства определителей

1. Значение определителя при его транспонировании не изменяется.
2. При перестановке двух столбцов (строк) знак определителя изменяется на противоположный.
3. Определитель с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю.

4. Множитель общий для некоторого столбца (строки) может быть вынесен за знак определителя.
5. Значение определителя не изменяется, если к элементам некоторого столбца (строки) прибавить элементы другого столбца (строки), при этом прибавляемые элементы можно умножать на один и тот же ненулевой множитель.

Свойства определителей

Указанные свойства упрощают вычисление определителей.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -5 & 4 & 3 \\ 3 & -6 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow[-3]{2} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -3 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & -10 \end{vmatrix} =$$

Раскладываем по второму столбцу:

$$= (-1)^{1+2} \cdot (-2) \begin{vmatrix} -3 & 11 \\ 0 & -10 \end{vmatrix} = 60$$

Функция EXCEL для работы с определителем

МОПРЕД()

Порядок работы

1. Записать определитель.
2. Выделить одну ячейку для помещения результата.
3. Выбрать функцию МОПРЕД() и записать аргумент.
4. Завершить командой ОК или Enter.
(Операция не матричная!)

Обратная матрица

Обратная матрица A^{-1} к квадратной матрице A существует только тогда, когда определитель $|A| \neq 0$

Вычисление обратной матрицы
связано с нахождением
присоединенной (взаимной)
матрицы

Обратная матрица

Присоединенной матрицей называется матрица, составленная из алгебраических дополнений к исходной, в строчках которой расположены соответствующие элементы столбцов (транспонированная)

Обозначение : \tilde{A} или A^V

Обратная матрица

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{3n} \end{vmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix}, \text{ где}$$

Обратная матрица

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{и т.д.}$$

Обратная матрица

Теорема

Для присоединенной матрицы A^V к квадратной матрицы A n -го порядка справедливо тождество

$$A^V \cdot A = A \cdot A^V = |A| \cdot E$$

Следствие:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^V$$

Обратная матрица

$$A = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} \quad \text{Найти} \quad A^{-1}$$

$$|A| = 30 - 28 = 2 \neq 0$$

$$A_{11} = 6 \quad A_{12} = -4 \quad A_{21} = -7 \quad A_{22} = 5$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 6 & -7 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -3,5 \\ -2 & 2,5 \end{vmatrix}$$

Вычисление обратной матрицы в EXCEL

1. Записать исходную матрицу.
2. Выделить область ячеек для обратной матрицы и задать формат ячеек – дробный.
3. Выбрать функцию **МОБР()** и записать аргумент.
4. Завершить командой матричной операции **Ctrl + Shift + Enter**.

Домашнее задание

1. Выучить конспект лекции.
2. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Математика для экономистов.— СПб.: Питер, 2007. §§ 1.3.1, 1.3.2, 1.3.3 , 1.2.7, 1.5.1, 1.5.2
3. Подготовится к практической работе № 2 «Вычисление определителей, обратных матриц».

Системы линейных уравнений

Системы линейных уравнений

Постановка задачи

Найти решение системы n
уравнений с n неизвестными
($x_1, x_2 \dots x_n$)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \dots \dots + a_{ik}x_k + \dots = b_i \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Системы линейных уравнений

Обозначения:

x_k ($k = 1, 2, \dots, n$) – неизвестные

a_{ik}, b_i – коэффициенты

i – порядковый номер уравнения

k – порядковый номер неизвестной

Системы линейных уравнений

Система, имеющая хотя бы одно решение, называется **совместной**.

Система, не имеющая решений, называется **несовместной**.

Система, имеющая единственное решение, называется **определенной**.

Система, имеющая множество решений, называется **неопределенной**.

Системы линейных уравнений

Теорема Крамера

Если определитель системы n уравнений с n неизвестными не равен нулю, то система совместна и имеет единственное решение:

$$x_1 = \frac{D_1}{D} \quad x_2 = \frac{D_2}{D} \quad x_n = \frac{D_n}{D}$$

Системы линейных уравнений

где:

D – определитель, составленный из коэффициентов a_{ik}

$D_1, D_2 \dots D_N$ - определитель, полученный из D путем замены k -го столбца столбцом коэффициентов b_i

Системы линейных уравнений

Пример:
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 5x_2 = -3 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{-1} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{3+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -5 + 3 = -2 \neq 0$$

Системы линейных уравнений

$$D_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 1 \\ -3 & 5 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{-1} \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{3+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 9 = -4$$

Системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} D_2 &= \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{-1} \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= (-1)^{3+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2 \end{aligned}$$

Системы линейных уравнений

$$D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \nearrow 2 \\ \searrow 5 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 7 & 0 & 17 \\ 2 & -1 & 6 \\ 11 & 0 & 27 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{2+2} \cdot (-1) \begin{vmatrix} 7 & 17 \\ 11 & 27 \end{vmatrix} =$$

$$= -189 + 187 = -2$$

Системы линейных уравнений

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{2}{-2} = -1$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-2}{-2} = 1$$

Матричное выражение формулы Крамера

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{vmatrix}$$

$A \qquad X \qquad B$

$$AX = B, \text{ откуда } X = A^{-1}B$$

Матричное выражение формулы Крамера

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{vmatrix} = \frac{1}{D} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix}}_{\text{Обратная матрица}} \cdot \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{vmatrix}.$$

Обратная матрица

Реализация матричного выражения формулы Крамера в EXCEL

1. Записать матрицу коэффициентов и матрицу свободных членов уравнения.
2. Выделить квадратную область и найти обратную матрицу (МОБР)
3. Выделить столбец результата и поместить туда произведение обратной матрицы на матрицу коэффициентов (МУМНОЖ)

Матричное выражение формулы Крамера

Тот же пример:

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \end{vmatrix}$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} -5 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 11 & -13 & -7 \end{vmatrix}$$

Матричное выражение формулы Крамера

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} -5 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 11 & -13 & -7 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Ответ:

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = -1$$

$$x_3 = 1$$

Системы линейных уравнений

Решение системы линейных уравнений методом исключения неизвестных (метод Гаусса)

Метод основан на преобразовании расширенной матрицы коэффициентов уравнения в трапециевидную:

Системы линейных уравнений

$$\left| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array} \right| \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{cccc} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & a'_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a'_{nn} \end{array} \right| \begin{array}{c} b'_1 \\ b'_2 \\ \dots \\ b'_n \end{array}$$

Системы линейных уравнений

и затем последовательному
нахождению $(x_n, x_{n-1} \dots x_2, x_1)$

$$x_n = \frac{b'_n}{a'_{nn}}$$

Подставляя найденное
значение x_n в предыдущую
строку, находим x_{n-1} и т.д., до
нахождения x_1

Системы линейных уравнений

При преобразовании расширенной матрицы коэффициентов уравнения в трапециевидную, используются следующие действия, обеспечивающие равносильность исходной и преобразованной системы уравнений:

Системы линейных уравнений

1. Умножение какой-либо строки на ненулевой множитель.
2. Прибавление к какой-либо строке другой строки, в том числе умноженной на ненулевой множитель.
3. Перестановка любых строк расширенной матрицы.

Системы линейных уравнений

Пример:
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 5x_2 = -3 \end{cases}$$

Составляем матрицу и преобразуем к диагональному виду :

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \end{array} \right| \begin{array}{l} \xrightarrow{-2} \\ \xrightarrow{-3} \end{array} =$$

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 0 & -3 \\ 0 & -11 & 1 & 12 \\ 0 & -13 & 1 & 14 \end{array} \right| \xrightarrow{-1} = \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 0 & -3 \\ 0 & -11 & 1 & 12 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{array} \right| \Rightarrow$$

Системы линейных уравнений

Пример:
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 5x_2 = -3 \end{cases}$$

Составляем расширенную матрицу и преобразуем к диагональному виду :

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \end{array} \right| \begin{array}{l} \nearrow -2 \\ \searrow -3 \end{array} = \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 0 & -3 \\ 0 & -11 & 1 & 12 \\ 0 & -13 & 1 & 14 \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ \nearrow - \end{array}$$