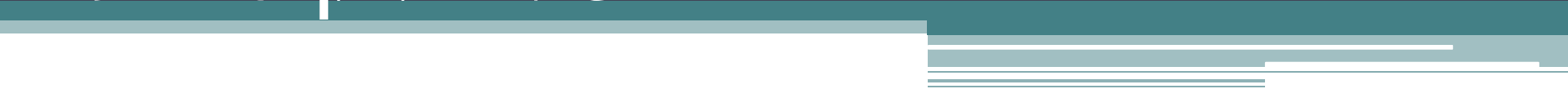


ПРОДОЛЖЕНИЕ ЛЕКЦИИ №3

A series of horizontal lines in teal and light blue colors, extending from the left edge of the slide and ending on the right side, positioned below the title.

Взаимное расположение прямых в пространстве.

- Прямые в пространстве могут **совпадать**,
- **быть параллельными, пересекаться** или
- **скрещиваться**.
- Две прямые L_1 и L_2 лежат в одной плоскости
- тогда и только тогда, когда компланарны
- векторы M_1M_2 , q_1 и q_2 где q_1 и q_2 -
- направляющие векторы прямых L_1 и L_2 ,
- соответственно, а M_1M_2 - вектор,
- соединяющий точку M_1 , лежащую на прямой
- L_1 , с точкой M_2 , лежащей на прямой L_2 .
-

- Следовательно, если смешанное
- произведение векторов M_1M_2, q_1, q_2 равно
- нулю, то прямые лежат в одной плоскости.
- Если прямые принадлежат одной плоскости,
- то они могут совпадать, пересекаться и быть
- параллельными.
- Пусть заданы прямые L_1 и L_2 :

$$L_1 : \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{p_1},$$

$$L_2 : \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

где $M_1(x_1, y_1, z_1) \in L_1$, $M_2(x_2, y_2, z_2) \in L_2$, а
 $\vec{q}_1(l_1, m_1, p_1)$ и $\vec{q}_2(l_2, m_2, p_2)$
 – направляющие векторы прямых L_1 и L_2 ,
 соответственно:

Тогда прямые L_1 и L_2 :

1) **скрещиваются**, если

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & p_1 \\ l_2 & m_2 & p_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} \neq 0;$$

- 2) пересекаются, если

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & p_1 \\ l_2 & m_2 & p_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

- и вектор $\vec{q}_1$ не коллинеарен вектору $\vec{q}_2$, т. е.
- координаты этих векторов не
- пропорциональны:
- $\frac{l_1}{l_2} \neq \frac{m_1}{m_2}$ или $\frac{l_1}{l_2} \neq \frac{p_1}{p_2}$;

- 3) параллельны, если

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

- и точка $M_1(x_1, y_1, z_1) \notin L_2$, то есть

$$\frac{x_1 - x_2}{l_2} \neq \frac{y_1 - y_2}{m_2} \quad \text{или} \quad \frac{x_1 - x_2}{l_2} \neq \frac{z_1 - z_2}{p_2};$$

- 4) совпадают, если

- $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{p_1}{p_2}$ и точка $M_1(x_1, y_1, z_1) \in L_2$, то

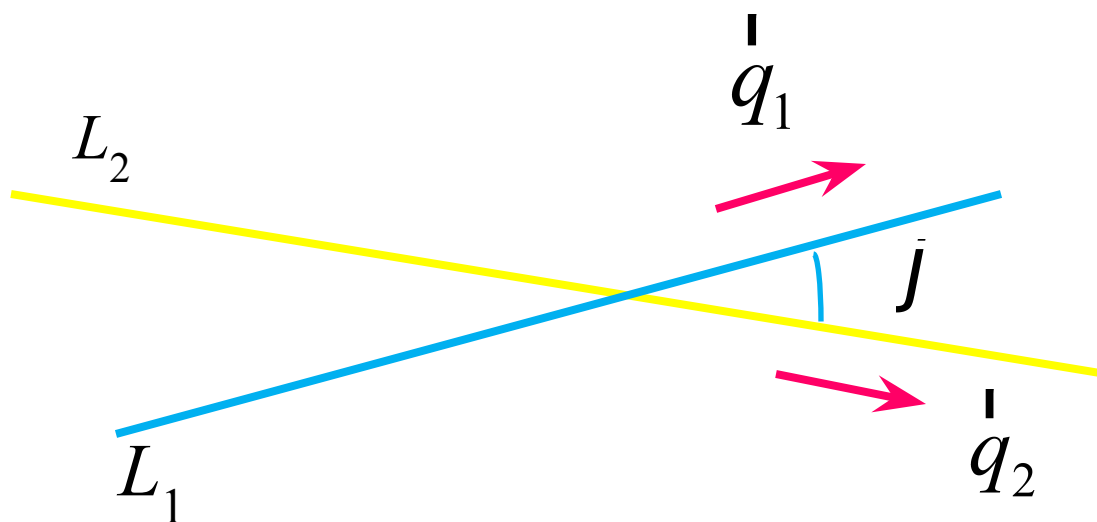
- есть

$$\frac{x_1 - x_2}{l_2} = \frac{y_1 - y_2}{m_2} = \frac{z_1 - z_2}{p_2}.$$

Угол между прямыми в пространстве

- Пусть
$$L_1 : \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{p_1},$$
$$L_2 : \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{p_2},$$
- где $\vec{q}_1(l_1, m_1, p_1)$, $\vec{q}_2(l_2, m_2, p_2)$ - направляющие векторы прямых L_1 и L_2 .

- При пересечении прямые образуют 4 угла (две пары смежных углов). Наименьший из двух смежных углов в паре является углом между прямыми.



- Косинус наименьшего угла между прямыми L_1 и L_2 равен модулю косинуса угла между направляющими векторами этих прямых:

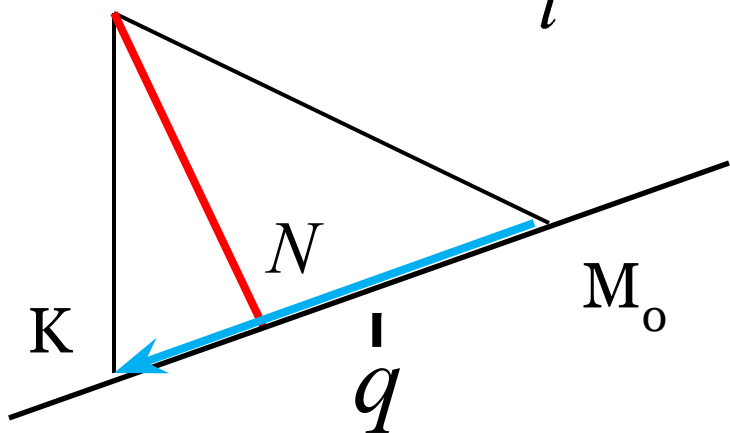
$$\cos(L_1, L_2) = \left| \cos(\vec{r}_{q_1}, \vec{r}_{q_2}) \right| = \frac{|\vec{r}_{q_1}, \vec{r}_{q_2}|}{|\vec{r}_{q_1}| |\vec{r}_{q_2}|} =$$

$$= \frac{|l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2|}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}.$$

Расстояние от точки до прямой в пространстве.

- Пусть задана прямая

$$L: \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{p},$$



- Точка $M_0(x_0, y_0, z_0) \in L$, $\vec{q}(l, m, p)$
- направляющий вектор, точка $M(x_1, y_1, z_1) \notin L$.

- Приложим вектор $\vec{q}(l, m, p)$ к точке M_0 . Тогда расстояние от точки M до прямой L равно высоте треугольника MKM_0 .

$$S_{\triangle MKM_0} = \frac{1}{2} |\vec{M_0M} \times \vec{q}| = \frac{1}{2} h |\vec{q}| \quad \text{и} \quad h = \frac{|\vec{M_0M} \times \vec{q}|}{|\vec{q}|}$$

- Тогда расстояние от точки M до прямой L можно найти по формуле:

$$r(M, L) = |MN| = \frac{|\vec{M_0M} \times \vec{q}|}{|\vec{q}|}.$$

- **Замечание.**

- Расстояние между параллельными прямыми может быть найдено по этой же формуле, как расстояние от любой точки, принадлежащей одной прямой, до другой прямой.

Расстояние между скрещивающимися прямыми в пространстве.

- Пусть

$$L_1 : \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{p_1}, \quad L_2 : \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{p_2},$$

- где $M_1(x_1, y_1, z_1) \in L_1$, $M_2(x_2, y_2, z_2) \in L_2$, а

- $\vec{q}_1(l_1, m_1, p_1)$, $\vec{q}_2(l_2, m_2, p_2)$ - направляющие векторы прямых L_1 и L_2 .

- Тогда

- Тогда расстояние между скрещивающимися прямыми можно найти по формуле:

$$\rho(L_1, L_2) = \frac{\left| \left(\overrightarrow{M_1 M_2}, \vec{q_1}, \vec{q_2} \right) \right|}{\left| [\vec{q_1}, \vec{q_2}] \right|},$$

- где $\left| \left(\overrightarrow{M_1 M_2}, \vec{q_1}, \vec{q_2} \right) \right|$ - модуль смешанного произведения векторов, а $\left| [\vec{q_1}, \vec{q_2}] \right|$ - модуль векторного произведения.

Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.

- Пусть в пространстве заданы прямая

$$L : \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{p}$$

- и $P : Ax + By + Cz + D = 0$.

- Точка $M_0(x_0, y_0, z_0) \in L$, вектор $\vec{q}(l, m, p)$ – направляющий вектор прямой L ; вектор $\vec{n}(A, B, C)$ – нормальный вектор плоскости P .
- Прямая может пересекать плоскость, быть ей параллельной или лежать в плоскости.
- 1. Если прямая лежит в плоскости, то
- $\vec{n} \perp \vec{q}$ и точка $M(x_0, y_0, z_0) \in P$. Таким
- образом, прямая лежит в плоскости,
- если: $Al + Bm + Cp = 0$ и

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0.$$

- 2. Если прямая параллельна плоскости,
- то $\vec{n} \perp \vec{q}$ и точка $M(x_0, y_0, z_0) \in P$.
- Таким образом, прямая параллельна
- плоскости, если: $Al + Bm + Cp = 0$ и

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0.$$

- 3. Прямая пересекает плоскость, если направляющий вектор прямой не перпендикулярен нормальному вектору плоскости, а значит их скалярное произведение не равно нулю: $(\vec{n}, \vec{q}) \neq 0$, т. е. $Al + Bm + Cp \neq 0$.

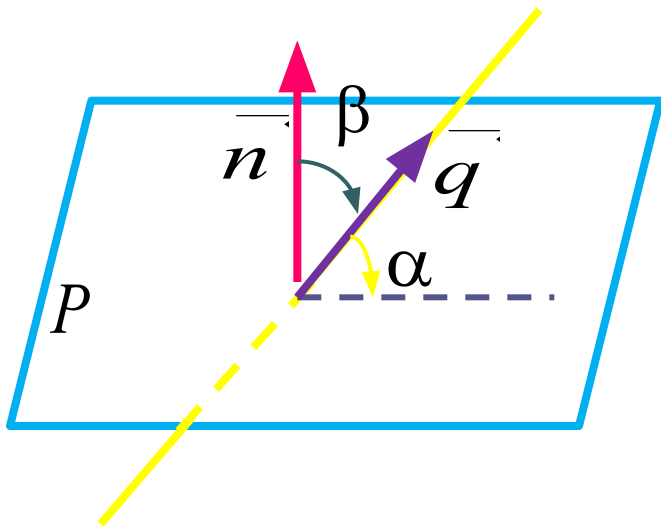
Угол между прямой и плоскостью.

- Углом между прямой и плоскостью называется угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость.
- Рассмотрим прямую

$$L : \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{p}$$

- и плоскость

$$Ax + By + Cz + D = 0$$



$$\cos \beta = \frac{(\vec{n}, \vec{q})}{|\vec{n}| \cdot |\vec{q}|} \Rightarrow \sin(\hat{L}, P) = \left| \cos(\vec{n}, \vec{q}) \right| = \frac{|(\vec{n}, \vec{q})|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{q}|} =$$

$$= \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$