

ПОВТОРЕНИЕ ОПЫТОВ



1. Частная теорема о повторении опытов

В результате каждого опыта может появиться или не появиться некоторое событие, причем нас интересует не результат каждого отдельного опыта, а общее число появлений события в результате серии опытов.

Определение: Несколько опытов называются независимыми, если вероятность того или иного исхода каждого из опытов не зависит от того, какие исходы имели другие опыты.

Независимые опыты могут производиться в одинаковых или различных условиях. В первом случае вероятность события от опыта к опыту меняется.

К первому случаю относится частная теорема,

Ко второму – общая теорема о повторении опытов.



Пример: Производится три независимых выстрела по мишени, вероятность попадания в которую при каждом выстреле равна p . Найти вероятность того, что при этих трех выстрелах мы получим ровно два попадания.

Решение.

B – в мишень попадет ровно два снаряда.

A_1 – попадание при первом выстреле

A_2 – попадание при втором выстреле

A_3 – попадание при третьем выстреле

$$B = A_1 A_2 \bar{A}_3 + A_1 \bar{A}_2 A_3 + \bar{A}_1 A_2 A_3$$

события несовместны, и независимы

$$P(B) = pp(1-p) + p(1-p)p + (1-p)pp$$

Пусть $1-p=q$, тогда

$$P(B) = ?$$

Пример

Производится n независимых опытов, в каждом из которых может появиться или не появится некоторое событие A ; вероятность появления события в каждом опыте равна p , а вероятность неоявления $1-p$. Требуется найти вероятность $P_{m,n}$ того, что событие A в этих n опытах появится ровно m раз.

Решение:

B_m - событие A появится в n опытах ровно m раз.

Разложим событие B_m на сумму произведений событий, состоящих в появлении или неоявлении события в отдельном опыте.

Пусть A_i появление события в i -м опыте

Очевидно, каждый вариант появления события B_m (каждый член суммы) должен состоять из m появлений события A и $n-m$ неоявлений, т.е. из m событий A и $n-m$ событий \bar{A} с различными индексами.

$$B_m = A_1 A_2 \dots A_m \overline{A_{m+1}} \dots \overline{A_n} + \dots + A_1 \overline{A_2} A_3 \dots \overline{A_{n-1}} A_n + \dots \\ \dots + \overline{A_1} \overline{A_2} \dots \overline{A_{n-m}} A_{n-m+1} \dots A_n.$$

причем в каждое произведение событие A должно входить m раз, а \overline{A} должно входить $n-m$ раз.

Число всех комбинаций такого рода равно C_n^m , т.е. числу способов, какими можно из n опытов выбрать m , в которых произошло событие A . Вероятность каждой такой комбинации, по теореме умножения для независимых событий, равна $p^m q^{n-m}$. Так как комбинации между собой несовместны, то, по теореме сложения, вероятность события B_m равна

$$P_{m,n} = \underbrace{p^m q^{n-m} + \dots + p^m q^{n-m}}_{C_n^m \text{ раз}} = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

частная теорема о повторении опытов

Если производится n независимых опытов, в каждом из которых событие A появляется с вероятностью p , то вероятность того, что событие A появится ровно m раз, выражается формулой:

$$P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m}$$

Где $q=1-p$

Биномиальное распределение

2. Общая теорема о повторении опытов

Частная теорема о повторении опытов - вероятность события во всех опытах одна и та же.

Если опыты производятся в неодинаковых условиях, и вероятность события от опыта к опыту меняется - общая теорема

производится ряд выстрелов в переменных условиях (при изменяющейся дальности), то вероятность попадания может меняться.

Пусть производится n независимых опытов, в каждом из которых может появиться или не появиться некоторое событие A , причем вероятность появления события в i -м опыте равна p_i ,

а вероятность неоявления $q_i = 1 - p_i$

найти вероятность $P_{m,n}$ того, что в результате n опытов событие появится ровно m раз.

B_m -событие A появится в n опытах ровно m раз.

$$B_m = A_1 A_2 \dots A_m \overline{A_{m+1}} \dots \overline{A_n} + \dots + A_1 \overline{A_2} A_3 \dots \overline{A_{n-1}} A_n + \dots \\ \dots + \overline{A_1} \overline{A_2} \dots \overline{A_{n-m}} A_{n-m+1} \dots A_n.$$

событие A входит m раз,

событие \overline{A} - $(n-m)$ раз.

Число таких комбинаций будет C_n^m , но комбинации между собой будут уже неравновероятны.

Применяя теорему сложения и умножения для независимых событий:

$$P_{m,n} = p_1 p_2 \dots p_m q_{m+1} \dots q_n + \dots + p_1 q_2 p_3 \dots q_{n-1} p_n + \dots \\ \dots + q_1 q_2 \dots q_{n-m} p_{n-m+1} \dots p_n,$$

искомая вероятность равна сумме всех возможных произведений, в которых буквы p с разными индексами входят m раз, буквы q с разными индексами раз $n-m$.

Для того чтобы чисто механически составлять все возможные произведения из букв p и букв q с разными индексами, применим следующий формальный прием. Составим произведение биномов:

$$\varphi_n(z) = (q_1 + p_1 z)(q_2 + p_2 z) \dots (q_n + p_n z)$$

$$\varphi_n(z) = \prod_{i=1}^n (q_i + p_i z)$$

где z - произвольный параметр.

Найдем в этом произведении биномов коэффициент при z^m .
перемножим биномы и приведем подобные члены.

Каждый член, содержащий z^m , будет иметь в качестве коэффициента произведение m букв p с какими-то индексами и $n-m$ букв q , а после приведения подобных членов коэффициент при z^m будет представлять собой сумму всех возможных произведений такого типа.

Следовательно, способ составления этого коэффициента полностью совпадает со способом вычисления вероятности в задаче о повторении опытов.

Определение: Функция $\varphi_n(z)$, называется производящей функцией.

Теорема (общая теорема о повторении опытов)

Вероятность того, что событие А в n независимых опытах появится ровно m раз, равна коэффициенту при z^m в выражении производящей функции:

$$\varphi_n(z) = \prod_{i=1}^n (q_i + p_i z)$$

где p_i - вероятность появления события в i -м опыте.

$$\prod_{i=1}^n (q_i + p_i z) = \sum_{m=0}^n P_{m,n} z^m$$

□ Производится 4 независимых выстрела по одной и той же цели с различных расстояний; вероятности попадания при этих выстрелах равны соответственно

$$p_1=0,1, p_2=0,2, p_3=0,3, p_4=0,4$$

Найти вероятности ни одного, одного, двух, трех и четырех попаданий:

Решение:

$$\begin{aligned}\varphi_4(z) &= \prod_{i=1}^4 (q_i + p_i z) = (0,9 + 0,1z)(0,8 + 0,2z)(0,7 + 0,3z)(0,6 + 0,4z) = \\ &= 0,302 + 0,44z + 0,215z^2 + 0,04z^3 + 0,002z^4,\end{aligned}$$

$$P_{0,4} = 0,302; P_{1,4} = 0,44; P_{2,4} = 0,215; P_{3,4} = 0,04; P_{4,4} = 0,002$$

CPC

**разобрать решение задач 2-6
с.65-66 (Е.С. Вентцель)**