Понятие о графе несовместных сотояний

Динамику перехода из одного состояния системы в другое можно изобразить графически в виде графа. Поясним это на примере дублированной системы, состоящей из рабочего элемента x_1 и резервного x_2. Для такой системы можно составить матрицу несовместных состояний на интервале (0, t):

$H_0 \rightarrow x_1\, x_2$ - оба элемента исправны на интервале (0, t);

$H_1 \rightarrow x_1\, x_2$ - рабочий элемент x_1 отказал на интервале (0, t), а x_2 - исправен;

$H_2 \rightarrow x_1\, x_2$ - отказал резервный элемент x_2 на интервале (0, t), а рабочий элемент x_1 исправен;

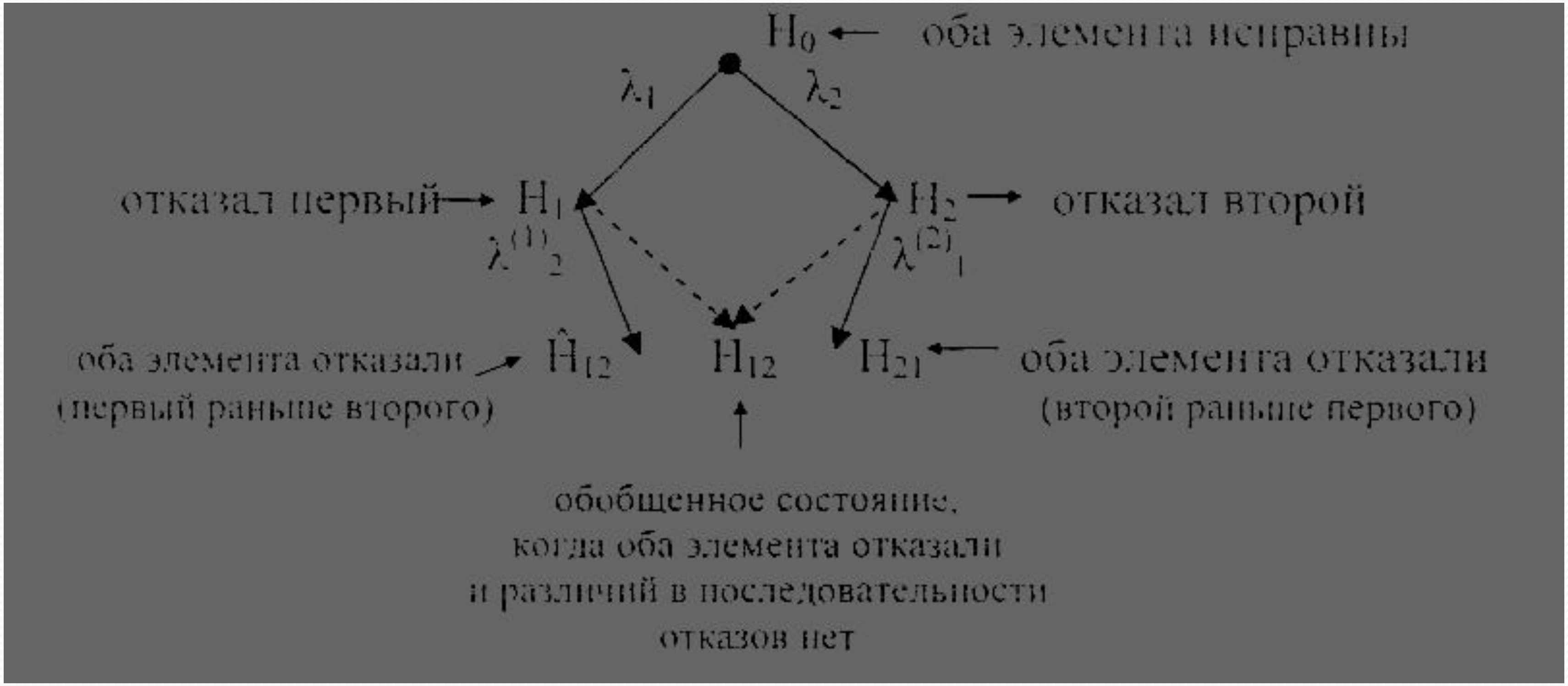
$H_{12} \rightarrow x_1\, x_2$ - оба элемента отказали на интервале (0, t), причем рабочий отказал раньше резервного;

$H_{21} \rightarrow x_2\, x_1$ - оба элемента отказали на интервале (0, t), причем резервный отказал раньше рабочего.

Состояния H_0, H_1, H_2, H_{12}, H_{21} являются несовместными на интервале (0, t) и образуют полную группу событий. Следовательно, сумма вероятностей пребывания системы в этих состояниях равна единице:

$P_0 + P_1 + P_2 + P_{12} + P_{21} = 1$

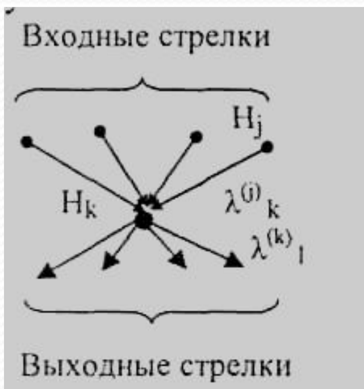
Иногда не делают различие в состояниях H_{12} и H_{21}, тогда эти состояния объединяют в одно обобщенное H_{12}, которое появляется на интервале (0, t) с вероятностью P_{12}.



Интенсивность перехода из состояния Hj в состояние Hk обозначается $\lambda^{(j)}_{k}(t)$

Марковский процесс смены состояний описывается дифференциальными уравнениями А.Н. Колмогорова относительно вероятностей пребывания системы в момент t в том или другом состоянии.

Рассмотрим К-й узел графа, изображенный на рисунке.

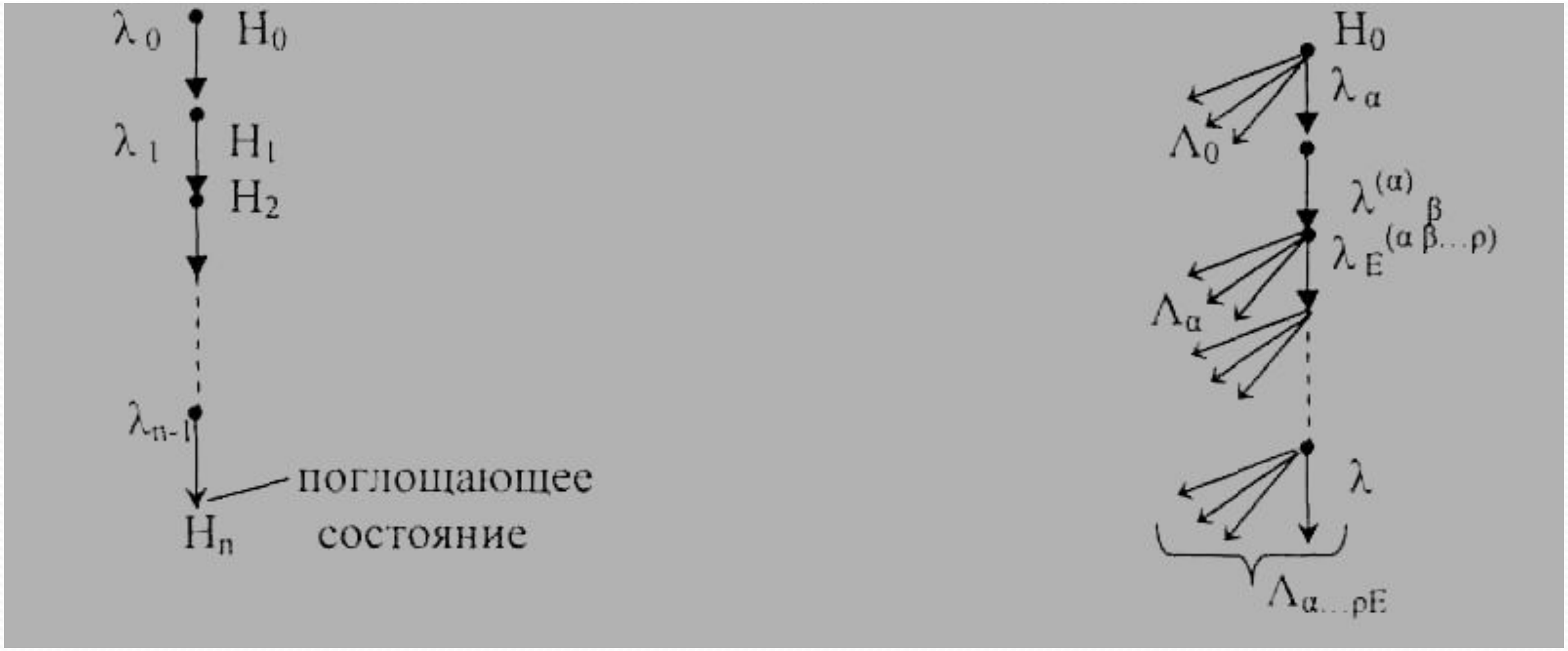


Инженерное правило. Производная от вероятности пребывания системы в момент t в К-м узле графа (в состоянии $H_к$) равна алгебраической сумме произведений интенсивностей переходов на соответствующие вероятности пребывания системы в тех узлах графа, откуда совершается непосредственный переход системы в другие (соседние) узлы.

дифференциальное уравнение для $H_к$ имеет вид:

$$P'_{к}(t) = \sum \lambda^{(j)}_{k} P_j(t) - \sum \lambda^{(k)}_{l} P_k(t), \quad к = 0,1,2,\dots$$

схемы «гибели»



Простая схема «гибели»

Сложная схема «гибели»

Характерной особенностью схемы «гибели» является наличие поглощающего состояния (гибель), из которого система не совершает уже перехода («замирает»).

Время достижения этого состояния есть случайное время «жизни», математическое ожидание которого можно определить путем перехода от дифференциальных уравнений А.Н. Колмогорова к соответствующим алгебраическим уравнениям.

Алгебраическое уравнение для $H_к$ будет иметь вид:

$$0 = \sum \lambda^{(j)}{}_{к}\, \tau_j - \sum \lambda^{(k)}{}_{e}\, \tau_k$$

Для состояния H_o, в котором система находится в момент $t = 0$ уравнение имеет вид:

$$-1 = \sum_{j \neq 0} \lambda^{(j)}{}_{0}\, \tau_j - \sum_{e} \lambda^{(0)}{}_{e}\, \tau_j$$

Среднее время «жизни» системы будет равно $T = \sum_{j=0}^{M-1} \tau_j,$

(М - число состояний в системе)

Для оценки вероятностей пребывания в момент t в конкретном состоянии существуют асимптотические оценки. Для простой схемы «гибели» известны оценки вероятности попадания в поглощающее состояние Q_n (оценки А.Д. Соловьева).

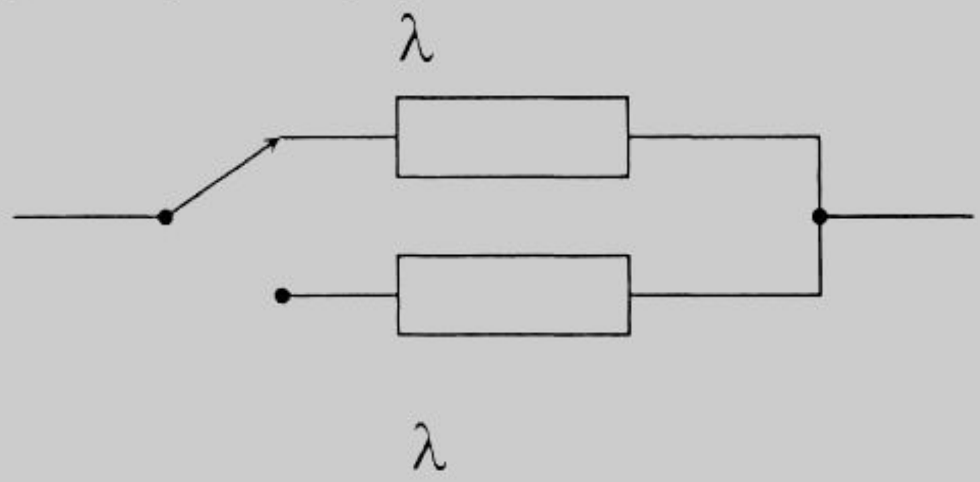
$$Q_n = \lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{n-1}\{t^n/n! - (\lambda_0+\lambda_1+\ldots\lambda_{n-1})\, t^{n+1}/(n+1)! + \ldots\}$$

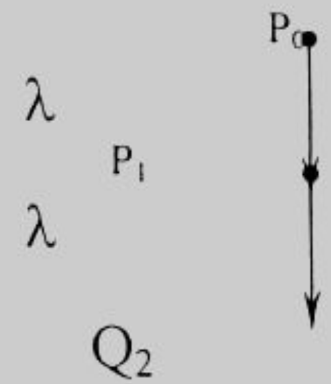
Для сложной схемы «гибели» для состояния H_o:

$$P_0(t) = 1-\Lambda_0 t + \Lambda_0^2 * t^2/2! - \ldots,\ \Lambda_0 = \sum\lambda_I$$

Пример

<u>Задача №1.</u> Дана дублированная система с ненагруженным («холодным») резервом. Интенсивность отказа рабочего и резервного (после включения в рабочий режим) равна λ. График изображен на рисунке.





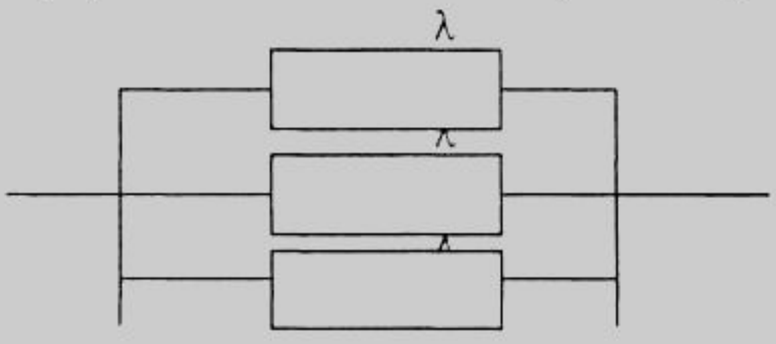
Применяя асимптотику А.Д. Соловьева, получим:

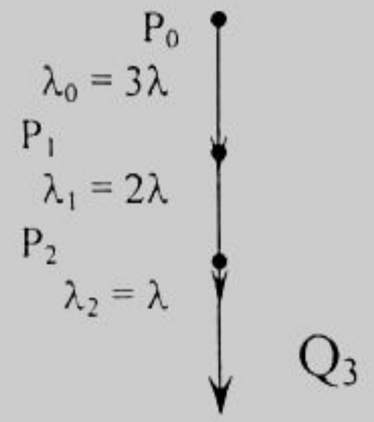
$$Q_2 \approx \lambda^2 \left(t^2/2! - 2\lambda * t^3/3!\right) = \lambda^2 t^2 \left(1/2 - \lambda^t/3\right)$$

Применяя формулу для T, получим:

$$T = 1/\lambda + 1/\lambda = 2/\lambda$$

Задача № 2. Дана система с двумя резервными элементами, работающими в нагруженном режиме («горячий» резерв), каждый элемент троированной системы имеет интенсивность отказа λ. Граф состояний системы изображен на рисунке.





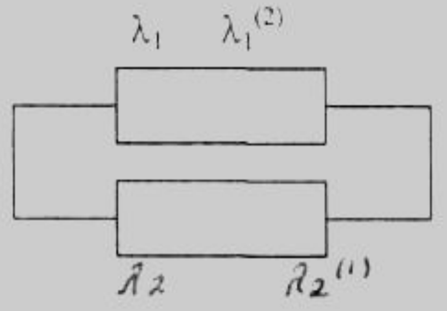
Применяя асимптотику А.Д. Соловьева, получим:

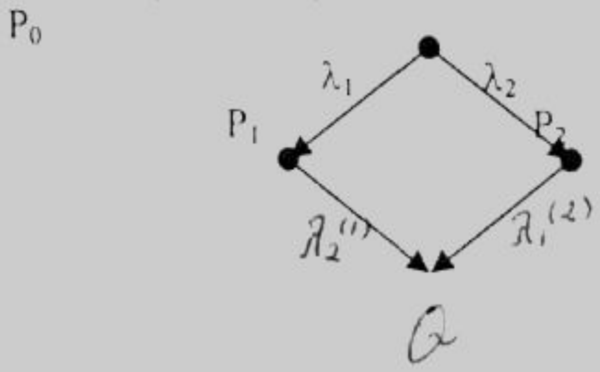
$$Q_3 \approx 3\lambda * 2\lambda * \lambda\ (t^3/3! - (3\lambda+2\lambda+\lambda) * t^4/4!) = 6\lambda^3\ (t^3/3! - 1/4\ \lambda\ t^4)$$

Среднее время «жизни» равно:

$$T = 1/3\lambda + 1/2\lambda + 1/\lambda = 1/\lambda\ (1+1/2+1/3) = 1,83\ 1/\lambda$$

Задача №1. Дана дублированная система, состоящая из элементов с разной интенсивностью отказов λ_1 и λ_2. При отказе одного из элементов происходит изменение интенсивности отказа другого элемента $\lambda_1^{(2)}$ и $\lambda_2^{(1)}$. Граф состояний системы изображен на рисунке.





Применяя нашу асимптотику, получим для вероятностей состояний следующие выражения:

$P_0(t) = 1 - \Lambda_0 t + \Lambda_0^2 * t^2/2!$, где $\Lambda_0 = \lambda_1 + \lambda_2$;

$P_1(t) = \lambda_1 \{ t - (\Lambda_\alpha + \Lambda_0) * t^2/2! \}$, где $\Lambda_\alpha = \lambda_2^{(1)}$;

$P_2(t) = \lambda_2 \{ t - (\Lambda_\alpha + \Lambda_0) * t^2/2! \}$, где $\Lambda_\alpha = \lambda_1^{(2)}$.

Вероятность безотказной работы равна:

$$P(t) = P_0(t) + P_1(t) + P_2(t)$$

Вероятность отказа по предложенной асимптотике равна:

$Q(t) = q_1(t) + q_2(t)$, где

$q_1(t) = \lambda_1 \lambda_2^{(1)} * t^2/2!$, где $\lambda_\alpha = \lambda_1$, $\lambda_\alpha^{(\beta)} = \lambda_2^{(1)}$, $\alpha = 1$, $\beta = 2$

$q_2(t) = \lambda_2 \lambda_1^{(2)} * t^2/2!$, где $\lambda_\alpha = \lambda_2$, $\lambda_\beta^{(\alpha)} = \lambda_1^{(2)}$, $\alpha = 2$, $\beta = 1$

Среднее время «жизни» определим по рекуррентным формулам:

Для состояния H_0:

$$\tau_0 = 1/\Lambda_0 = 1/\ \lambda_1 + \lambda_2$$

Для состояния H_1:

$$\tau_1 = \lambda_\alpha / \Lambda_\alpha * \tau_0 = \lambda_1 / \lambda_2^{(1)} * 1/\ \lambda_1 + \lambda_2, \qquad \alpha = 1,\ \Lambda_\alpha = \lambda_2^{(1)}$$

Для состояния H_2:

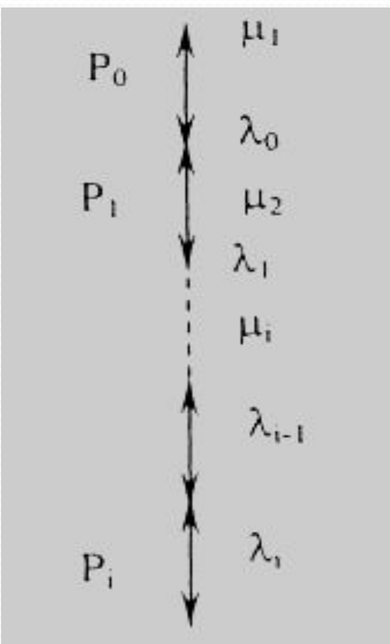
$$\tau_2 = \lambda_\alpha / \Lambda_\alpha * \tau_0 = \lambda_2 / \lambda_1^{(2)} * 1/\ \lambda_1 + \lambda_2, \qquad \alpha = 2,\ \Lambda_\alpha = \lambda_1^{(2)}$$

$$T = \tau_0 + \tau_1 + \tau_2 = 1/\ \lambda_1 + \lambda_2 \left(1 + \lambda_1 / \lambda_2^{(1)} + \lambda_2 / \lambda_1^{(2)}\right)$$

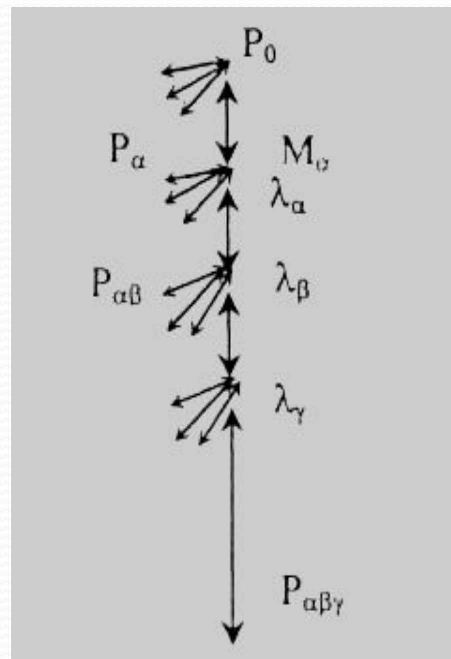
Схема «гибели размножения»

Другой моделью Марковского процесса является схема «гибели и размножения», которая используется для оценки надёжности восстанавливаемых систем при неограниченном числе восстановлении.

Различают простую схему «гибели и размножения» (схема Эрланга) и сложную схему. Графы этих схем изображены на рисунках.



Простая схема «гибели и размножения»



Сложная схема «гибели и размножения»

Если граф состояний системы заканчивается поглощающим состоянием (экраном), то оценивается среднее время «жизни» и вероятность безотказной работы системы (до первого отказа системы).

Если граф состояний заканчивается отражающим состоянием (экраном), то обычно оценивается стационарные вероятности застать систему в момент t в том или другом состоянии.

Можно, например, определить дисперсию времени «жизни», решая алгебраическую систему уравнений вида:

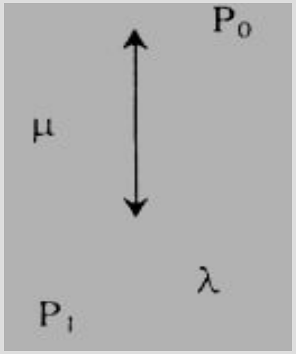
$$-2\tau_k = -\sum \lambda_b \alpha_k + \sum \lambda_k \alpha_i ,$$

где α_k, α_i –вспомогательные величины, с помощью которых вычисляется второй начальный момент времени «жизни» α_2 и дисперсия этого времени Д.

$$\alpha_2 = \sum \alpha_i , \ D = \alpha_2 - T^2 , \text{ где } T = \sum \tau_i$$

Пример задачи

ЗАДАЧА №1 Дана нерезервированная восстанавливаемая система. Допускается неограниченное число восстановлений. Граф простой схемы «гибели и размножения» изображён на рисунке. Интенсивность отказов - λ , а интенсивность восстановлений - μ .



Система алгебраических уравнений в соответствии с инженерном делом имеет вид

$$0 = -\lambda P_0 + \mu P_1$$

$$0 = -\lambda P_0 - \mu P_1 \qquad P_0 + P_1 = 1$$

где P_0 = Кг - коэфф. Готовности.
P_1 = Кп – коэфф. Простоя

Выражая P_0 через P_1 и подставляя в первое уравнение, получим:

$$0 = -\lambda\,(1-P_1) + \mu P$$

Отсюда: Кп = $P_1 = \lambda \backslash \lambda+1$ и Кг = $P_0 = \mu \backslash 1+\mu$

Учитывая что $\lambda=1\backslash T$ и $\mu=1\backslash$Тв , где Тв – среднее время восстановления, получим:

Кп = Тв\Т+Тв, Кг = Т\Тв