

Определение DL-моделей

Опр 1. Величина l , характеризующая запаздывание в воздействии фактора на результат называется **лагом (или лагом запаздывания)**.

Опр 2. Переменные, сдвинутые на определенное количество времени (лагов) вперед или назад, называются **лаговыми переменными**.

Опр 3. Модели, характеризующие воздействие значений переменной в текущий период на будущее значение результативной переменной, называется **моделями с распределенными лагами (Distributed lags .DL-модели)**. Подобные модели позволяют определить отсроченный эффект во времени воздействия факторной переменной на результат. Подобные модели содержат как текущее значение результативной (зависимой переменной y_t), так и лаговые значения независимой переменной (переменных $x_{t-1}, x_{t-2}, x_{t-3}, \dots$).

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot X_t + \alpha_2 \cdot X_{t-1} + \alpha_3 \cdot X_{t-2} + \dots + \alpha_{p+1} \cdot X_{t-p} \quad (1)$$

Здесь p – длина максимального лага запаздывания является порядком DL-модели (Обозначается: DL(p))

Примеры применения DL-моделей

- Определение отсроченного эффекта инвестиций (вложений) на прибыль предприятия.
- Определение отсроченного влияния рекламных издержек на спрос.
- Определение отсроченного влияния увеличения заработной платы на мотивацию труда (производительность труда или текучесть кадров)
- Влияние доходов на расходы.
- Влияние увеличения среднедушевых доходов на динамику демографических показателей

Классификация DL-моделей

- Модель с распределенными лагами с конечным лагом запаздывания p .

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot X_t + \alpha_2 \cdot X_{t-1} + \alpha_3 \cdot X_{t-2} + \dots + \alpha_{p+1} \cdot X_{t-p}$$

- Модель с распределенными лагами с бесконечным лагом запаздывания $p \rightarrow \infty$.

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot X_t + \alpha_2 \cdot X_{t-1} + \alpha_3 \cdot X_{t-2} + \dots + \alpha_{p+1} \cdot X_{t-p} + \dots$$

Идентификация DL-модели

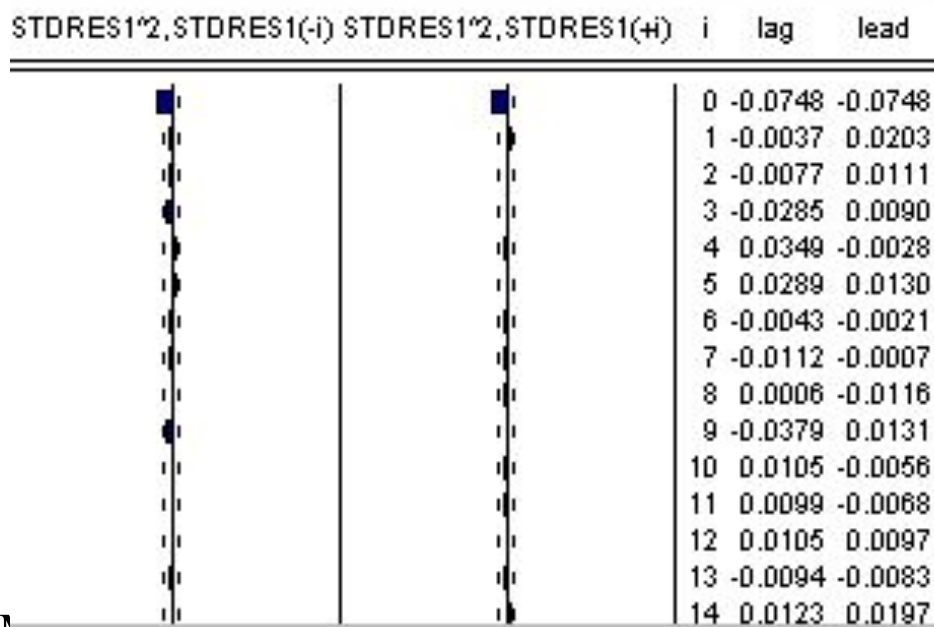
Опр. 4. Под идентификацией DL-модели (1) понимают определение ее порядка p , то есть длину максимального лага запаздывания для значимой лаговой переменной.

Осуществить процедуру идентификации можно:

1. С Помощью критерия Стьюдента: Модель (1) можно рассматривать как многофакторную регрессию, где в качестве регрессоров выступают лаговые переменные, для которых можно проверить критерии значимости.
2. С помощью информационных критериев Акайке и Шварца: строят несколько уравнений DL-моделей для различной длины максимального лага запаздывания и выбирают ту модель, для которой значения информационных критериев будут минимальными.
3. Исходя из теоретических предпосылок экономической теории. Например, согласно закону ожидания Врума.
4. На основе анализа кросс-коррелограмм кросскорреляционной функций.

Понятие кросс-коррелограмм кросскорреляционной функций.

Опр. 5. Под кросскоррелограммами понимают графики кросскорреляционных функций, где по оси абсцисс откладываются лаги запаздывания, а по оси ординат коэффициенты корреляции с лаговыми переменными. Сдвинутыми на заданное количество лагов **вперед и назад**.



Максимальную длину лага запаздывания определяют посчитывая количество значимых (выходящих за границы белого шума) коэффициентов кросскорреляционной функции.

Интерпретация параметров DL-моделей

1. Коэффициент α_1 в модели (1) характеризует среднее абсолютное изменение результативной переменной y_t при изменении значения независимой переменной x_t на единицу своего измерения в некоторый фиксированный момент времени t , без учета воздействий лаговых значений переменной x . Этот коэффициент называют краткосрочным мультипликатором.
2. В момент времени $t+1$ совокупное воздействие факторной переменной x_t на результат y_t составит $\alpha_1 + \alpha_2$ условных единиц, В момент времени $t+2$ совокупное воздействие факторной переменной x_t на результат y_t составит $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ условных единиц. Такие суммы называются промежуточными мультипликаторами.
3. Общее изменение результата через p периодов времени называется долгосрочным мультипликатором и определяется как:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_p = \alpha$$

Интерпретация параметров DL-моделей

4. Определим **относительные коэффициенты** DL-модели α_j как:

$$A_j = \alpha_j / \alpha_1, j = 1 : p+1$$

Если все коэффициенты α_j имеют одинаковый знак, то для любого j :

$$0 < A_j < 1 \quad \sum_{j=1}^{p+1} A_j = 1$$

Относительные коэффициенты измеряют долю общего изменения результативного признака в момент времени $t+j$.

5. **Средний лаг** определяется как:

$$\bar{l} = \sum_{j=1}^{p+1} j \cdot A_j$$

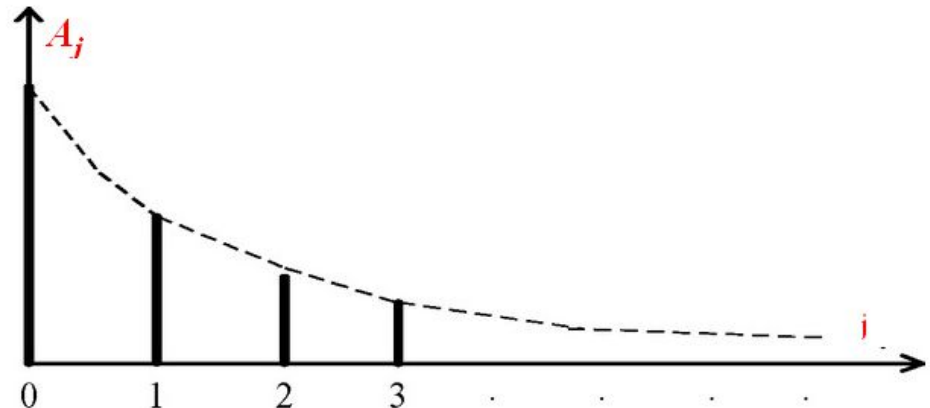
и измеряет средний период, в течении которого будет происходить изменение результата под воздействием изменения регрессионного фактора в момент времени t .

6. **Медианный лаг** l_{Me} характеризует период времени, в течении которого с момента времени t будет реализована половина общего воздействия лаговых факторов на результат, то есть для него справедливо:

$$\sum_{j=1}^{l_{Me}} A_j \approx 0,5$$

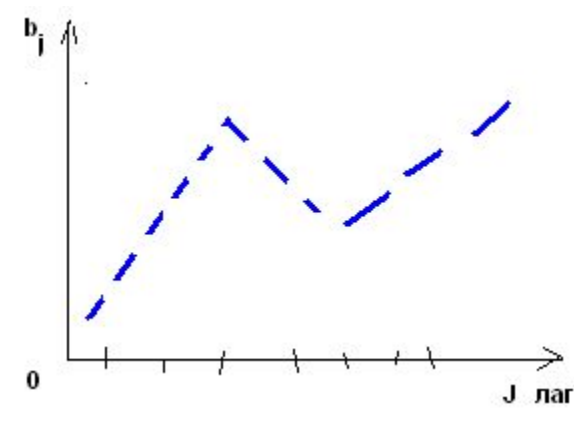
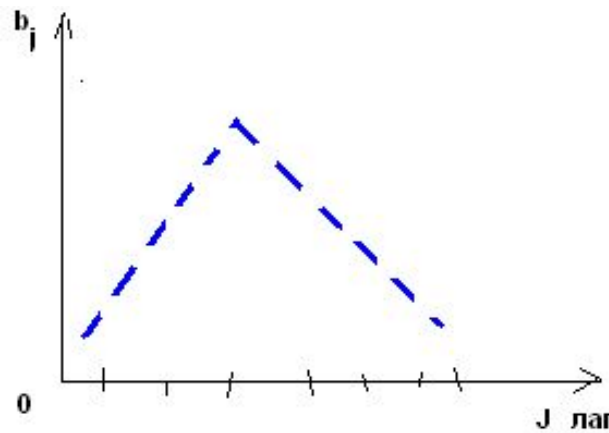
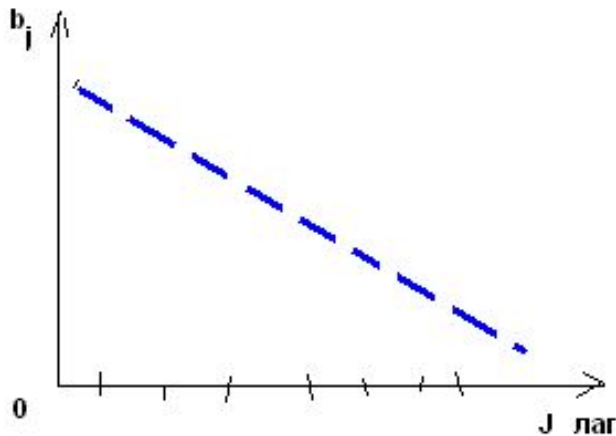
Изучение структуры лага

1. Если с ростом величины лага p коэффициенты при лаговых переменных A_j убывают, то имеет место линейная структура лага.
2. Если с ростом величины лага p коэффициенты при лаговых переменных A_j сначала возрастают, а затем убывают. То это или треугольная или квадратичная структура лага.
3. Если с ростом величины лага p коэффициенты при лаговых переменных A_j сначала убывают, а затем возрастают. То это или V-образная или квадратичная структура лага.
4. Если структура лага ведет себя непостоянно, то убывая, то возрастая, то это скорее всего полиномиальная структура лага.
5. Для DL-моделей с бесконечным лагом имеет место. Как правило геометрическая структура лага.



Примеры структуры лага DL-моделей

Для изучения структуры лага строят графики, где по оси абсцисс откладывается лаг запаздывания, а по оси ординат относительные коэффициенты DL-модели A_j .



Линейная структура

Квадратичная

Полиномиальная

Сложности оценки DL-моделей

1. Существенная мультиколлинеарность, за счет введения лаговых переменных.
2. При большой величине лага запаздывания увеличивается количество независимых лаговых переменных в модели, и как следствие уменьшается число степеней свободы, соответственно. Общая значимость модели падает.
3. Проблема автокорреляции остатков, характерная для DL-моделей, снижает эффективность оценок модели.

Традиционный МНК при оценке DL-модели, как правило, дает недостоверные параметры.

Метод Алмон

Рассмотрим: $Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot X_t + \alpha_2 \cdot X_{t-1} + \alpha_3 \cdot X_{t-2} + \dots + \alpha_{p+1} \cdot X_{t-p}$

Пусть лаг имеет полиномиальную структуру. То есть представлен

полиномом степени k : $\alpha_j = c_0 + c_1 \cdot j + c_2 \cdot j^2 + \dots + c_k \cdot j^k$

Тогда каждый из коэффициентов (1) можно представить в виде:

$j=0$:

$$\alpha_1 = c_0$$

$j=1$:

$$\alpha_2 = c_0 + c_1 + c_2 + \dots + c_k$$

$j=2$:

$$\alpha_3 = c_0 + c_1 \cdot 2 + c_2 \cdot 2^2 + \dots + c_k \cdot 2^k \quad (2)$$

.....

$$j=p: \alpha_{p+1} = c_0 + c_1 \cdot p + c_2 \cdot p^2 + \dots + c_k \cdot p^k$$

Подставим в исходное уравнение (1) выражения (2)

$$Y_t = \alpha_0 + c_0 \cdot X_t + (c_0 + c_1 + c_2 + \dots + c_k) \cdot X_{t-1} + (c_0 + c_1 \cdot 2 + c_2 \cdot 2^2 + \dots + c_k \cdot 2^k) \cdot X_{t-2} + \dots + (c_0 + c_1 \cdot p + c_2 \cdot p^2 + \dots + c_k \cdot p^k) \cdot X_{t-p}$$

Метод Алмон

Перегруппируем:

$$Y_t = \alpha_0 + c_0 \cdot (X_t + X_{t-1} + \dots + X_{t-p}) + c_1(X_{t-1} + 2X_{t-2} + 3X_{t-3} + \dots + pX_{t-p}) + \\ + c_2(X_{t-1} + 4X_{t-2} + 9X_{t-3} + \dots + p^2X_{t-p}) + \dots + c_k \cdot (X_{t-1} + 2^k X_{t-2} + 3^k X_{t-3} + \dots + p^k X_{t-p})$$

Обозначим:

$$z_0 = X_t + X_{t-1} + \dots + X_{t-p} = \sum_{j=0}^p X_{t-j}$$

$$z_1 = X_{t-1} + 2X_{t-2} + 3X_{t-3} + \dots + pX_{t-p} = \sum_{j=0}^p j \cdot X_{t-j}$$

(3)

$$z_2 = X_{t-1} + 4X_{t-2} + 9X_{t-3} + \dots + p^2X_{t-p} = \sum_{j=0}^p j^2 \cdot X_{t-j}$$

$$z_k = X_{t-1} + 2^k X_{t-2} + 3^k X_{t-3} + \dots + p^k X_{t-p} = \sum_{j=0}^p j^k \cdot X_{t-j}$$

Подставив (3) в (1) получим:

$$Y_t = \alpha_0 + c_0 \cdot z_0 + c_1 \cdot z_1 + c_2 \cdot z_2 + \dots + c_k \cdot z_k$$

(4)

Процедура применения метода Алмон

1. Определяется максимальный лаг запаздывания p в модели (1)
2. Определяется степень полинома k , описывающий структуру лага модели
3. Определяются по системе (3) новые переменные z_k
4. Оценивается традиционным МНК новая модель:
$$Y_t = \alpha_0 + c_0 \cdot z_0 + c_1 \cdot z_1 + c_2 \cdot z_2 + \dots + c_k \cdot z_k \quad (4)$$
5. По полученным коэффициентам c_i и соотношениям (2) определяют параметры исходной модели (1) – α_j

В случае, когда DL-модель имеет бесконечную отдачу, то есть бесконечный лаг запаздывания, то предполагают, что структура лага имеет **геометрический вид**, то есть воздействие лаговых значений переменной на результат уменьшается с увеличением величины лага в геометрической прогрессии. В этом случае к оценке параметров такой DL-модели применяют **подход Койка**.

Авторегрессионные модели с распределенными лагами

Определение: Модель, для которой в качестве регрессоров рассматриваются лаговые значения как объясняемой, так и объясняющих величин, называется **авторегрессионной моделью с распределенными лагами ADL (p, q)**, где p – порядок авторегрессии, равный максимальному лагу запаздывания в AR-структуре модели, а q – порядок распределенных лагов, равный максимальному лагу запаздывания в DL-структуре модели:

$$Y_t = \theta + \alpha_1 \cdot Y_{t-1} + \alpha_2 \cdot Y_{t-2} + \dots + \alpha_p \cdot Y_{t-p} + \\ + \beta_0 \cdot X_t + \beta_1 \cdot X_{t-1} + \beta_2 \cdot X_{t-2} + \dots + \beta_q \cdot X_{t-q} + \varepsilon_t$$

В общем случае предполагают, что Y_t и X_t - стационарны!

Интерпретация

Для модели ADL (1, 1) $Y_t = \theta + \alpha_1 \cdot Y_{t-1} + \beta_0 \cdot X_t + \beta_1 \cdot X_{t-1} + \varepsilon_t$

мультипликаторы (отклики) краткосрочные и долгосрочные
выражаются как:

$$\beta_0, \beta_1 + \alpha_1 \beta_0, \alpha_1 \beta_1 + \alpha_1^2 \beta_0 \text{ и т.д.}$$

Модель коррекции ошибки

Рассмотри ADL (1, 1): $Y_t = \theta + \alpha_1 \cdot Y_{t-1} + \beta_0 \cdot X_t + \beta_1 \cdot X_{t-1} + \varepsilon_t$

Заменяя: Y_t на $Y_{t-1} + \Delta Y_t$ и X_t на $X_{t-1} + \Delta X_t$

Получим: $\Delta Y_t = \theta + \beta_0 \cdot \Delta X_t - (1 - \alpha_1) \cdot Y_{t-1} + (\beta_0 + \beta_1) \cdot X_{t-1} + \varepsilon_t$

Перегруппировав получим:

$$\Delta Y_t = \beta_0 \cdot \Delta X_t - (1 - \alpha_1) \left[Y_{t-1} - \frac{\theta}{1 - \alpha_1} - \frac{\beta_0 + \beta_1}{1 - \alpha_1} X_{t-1} \right] + \varepsilon_t$$

Определение. Такое представление ADL-модели называется **моделью коррекции ошибки ЕСМ**.

Выражение $\gamma = Y_{t-1} - \frac{\theta}{1 - \alpha_1} - \frac{\beta_0 + \beta_1}{1 - \alpha_1} X_{t-1}$ трактуется как отклонение от долгосрочного равновесия в момент времени $t-1$, так как долгосрочное равновесие определяется при $\gamma=0$. Поэтому $\gamma>0$, если Y_{t-1} превышает равновесное значение X_{t-1} .

Модель коррекции ошибки

Модель ЕСМ представляет текущее краткосрочное изменение Y в виде суммы мгновенного отклика на текущее (краткосрочное) изменение X и поправки на имевшее место отклонение от долгосрочного равновесия в предыдущий момент.

Для соблюдения условия стационарности Y_t требуется, чтобы $|\alpha_1| < 1$

Представление $ADL(p, q)$ в виде ЕСМ:

$$\Delta Y_t = \beta_0 \cdot \Delta X_t - \sum_{i=1}^{p-1} \delta_i \Delta Y_{t-i} + \sum_{i=1}^{q-1} \gamma_i \Delta X_{t-i} + \alpha_p(1) \left[Y_{t-1} - \frac{\theta}{\alpha_p(1)} - \frac{\beta_q(1)}{\alpha_p(1)} X_{t-1} \right] + \varepsilon_t$$

В условиях, когда Y_t и X_t являются стационарными процессами к оценке параметров ADL и $ЕСМ$ моделей можно применять МНК (метод наименьших квадратов LS)

Здесь $\alpha_p(1)$ и $\beta_q(1)$ операторы линейной комбинации коэффициентов при AR и DE -частях модели $ADL(p, q)$.

Причинность по Гренджеру

Если X_t - **причина по Гренджеру** для Z_t , то это означает, что между этими процессами есть причинно-следственная связь.

Для тестирования причинности по Гренджеру строят регрессию Z_t на его собственные предыдущие значения и на предыдущие значения процесса X_t

$$Z_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^k \alpha_i Z_{t-i} + \sum_{i=1}^k \beta_i X_{t-i} + \varepsilon_t$$

Затем проверяем гипотезу

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 0$$

$$H_1 : \beta_1^2 + \beta_2^2 + \dots + \beta_k^2 > 0$$

Поверяют гипотезу на основе расчета F-статистик, которую сравнивают с критическими значениями Фишера.

Если нулевая гипотеза отвергается, то X_t является причиной для Z_t .

Случаи взаимодействия временных рядов

1. Экономические переменные, связанные DL или ADL моделями, стационарны.
2. Экономические переменные нестационарны и относятся к TS- процессам, тогда их взаимодействие можно учитывать в виде регрессии, дополнительно включив переменную времени t (метод отклонения от трендов).
3. Экономические переменные нестационарны и DL или ADL модели строятся на их стационарных разностях Δx_t и Δy_t .
4. Переменные нестационарные, но относятся к DS- процессам и имеют одинаковый порядок интеграции, можно построить для них регрессию при условии их коинтегрируемости.

Коинтеграция временных рядов

Определение: Пусть x_t и y_t временные ряды **первого порядка** интеграции $I(1)$. Если существуют такие коэффициенты (α, β) , что линейная комбинация процессов x_t и y_t : $Z_t = \alpha \cdot x_t + \beta \cdot y_t$ является стационарным процессом, то есть интеграции $I(0)$, то ряды x_t, y_t называются **коинтегрированными**. А вектор компонент (α, β) называется **коинтегрирующим вектором**.

Так оба процесса – есть DS – процессы, следовательно, они имеют стохастические тренды. коинтеграция означает, что **стохастические тренды** **обоих процессов ведут себя одинаково**.



Коинтегрирующее соотношение соответствует тому, что между величинами **есть долгосрочное равновесие**.

ЕСМ-модель $\Delta y_t = \alpha \cdot \Delta x_t + \beta \cdot (y_{t-1} - \gamma x_{t-1}) + v_t$ связывает между собой стационарные величины Δx_t и Δy_t , а также коинтегрирующее соотношение.

Поэтому, если процессы x_t и y_t не являются стационарными, но являются коинтегрируемыми, то между ними можно построить ADL и DL модели.

Процедура Ингла-Гренджера

1. Определяют, являются ли процессы X_t и Y_t интегрируемыми первого порядка.
2. Строят обычную регрессию X_t на Y_t методом наименьших квадратов.
3. Проверяют остатки регрессии на стационарность с помощью теста Дики-Фуллера, но сравнивают DF-статистику с поправленными значениями, отличными от критических значений Мак-Кинона.
4. Делают выводы: если остатки стационарны то исходные ряды X_t и Y_t **коинтегрированы**, а построенная регрессия является **коинтегрирующей**.

Если согласно процедуре имеется коинтеграция, то в построенной регрессии можно учесть не только долгосрочное равновесие, но и за счет введения дополнительного регрессора – коинтегрирующего соотношения в предыдущий момент времени. **То есть построить модель ЕСМ.**