

МНОГОМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Определения

Пусть на вероятностном пространстве заданы случайные величины $\xi_1 = \xi_1(\omega), \xi_2 = \xi_2(\omega), \dots, \xi_n = \xi_n(\omega), \omega \in \Omega$.

Определение. n - мерной случайной величиной называется вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$

Определение. Функцией распределения случайного вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ называется функция

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \dots, \xi_n < x_n), \quad \forall x_i \in (-\infty, \infty) \quad (1)$$

Свойства функции распределения

1. Монотонность по каждому аргументу.

$$F(x_1, x_2, \dots, x'_i, \dots, x_n) \geq F(x_1, x_2, \dots, x''_i, \dots, x_n), \quad x'_i > x''_i$$

2. Непрерывность слева по каждому аргументу.

$$\lim_{x_i \rightarrow x_{i_0} - 0} F(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) = F(x_1, x_2, \dots, x_{i_0}, \dots, x_n), \quad \forall x_i \in (-\infty, \infty)$$

$$3. \quad \lim_{\substack{x_1 \rightarrow \infty \\ x_2 \rightarrow \infty \\ \vdots \\ x_n \rightarrow \infty}} F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F(\infty, \infty, \dots, \infty) = 1$$

$$\lim_{x_i \rightarrow -\infty} F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F(x_1, x_2, \dots, -\infty, \dots, x_n) = 0, \quad \forall x_i$$

$$4. \quad \forall m < n \quad F(x_1, x_2, \dots, x_m, \infty, \dots, \infty) = F(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

Определение. Плотностью распределения (плотностью вероятностей) случайного вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ называется такая интегрируемая функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, для которой $\forall x_i \in (-\infty, \infty)$ имеет место

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(t_1, t_2, \dots, t_n) dt_1 dt_2 \dots dt_n \quad (2)$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} \quad (3)$$

Свойства плотности вероятностей

1. $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(t_1, t_2, \dots, t_n) dt_1 dt_2 \dots dt_n = 1$ - условие нормировки

3. $P(\xi \in B) = \int \int \dots \int_B f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$

4. $\forall m \leq n$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n) dx_{m+1} dx_{m+2} \dots dx_n$$

Определение. Случайные величины $\xi_1 = \xi_1(\omega), \xi_2 = \xi_2(\omega), \dots, \xi_n = \xi_n(\omega)$ называются **независимыми**, если для любых

$$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n, \quad x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}, \quad k = 2, 3, \dots, n$$

имеет место

$$P\left(\xi_{i_1} < x_{i_1}, \xi_{i_2} < x_{i_2}, \dots, \xi_{i_k} < x_{i_k}\right) = P\left(\xi_{i_1} < x_{i_1}\right) P\left(\xi_{i_2} < x_{i_2}\right) \dots P\left(\xi_{i_k} < x_{i_k}\right) \quad (4)$$

В частности из (4)

$$P\left(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \dots, \xi_n < x_n\right) = P\left(\xi_1 < x_1\right) P\left(\xi_2 < x_2\right) \dots P\left(\xi_n < x_n\right)$$

то есть

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{\xi_1}(x_1) F_{\xi_2}(x_2) \dots F_{\xi_n}(x_n) \quad (5)$$

Из (5)

$$\frac{\partial^n F(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} = \frac{dF_{\xi_1}(x_1)}{dx_1} \frac{dF_{\xi_2}(x_2)}{dx_2} \dots \frac{dF_{\xi_n}(x_n)}{dx_n} \quad (6)$$

Следовательно, для независимых случайных величин

$$f_{\xi}(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{\xi_1}(x_1) f_{\xi_2}(x_2) \dots f_{\xi_n}(x_n) \quad (7)$$

Если $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ - дискретная случайная величина и компоненты $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ независимы, то

$$P(\xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2, \dots, \xi_n = x_n) = P(\xi_1 = x_1) P(\xi_2 = x_2) \dots P(\xi_n = x_n) \quad (8)$$