

ММИР

Лекции **14** часов,
Практические занятия – **14**
часов
4 контрольные работы
Зачет

Лекции №№1-2

**Пути решения инженерных
задач:**

- **экспериментальный;**
- **анализ математической
модели реального объекта
(процесса)**

Схема **экспериментальн.** решения задачи (ЭМ):

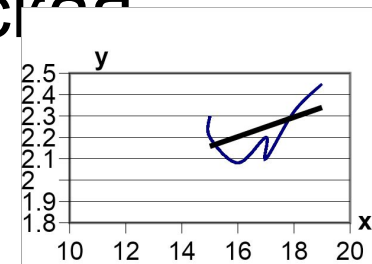
- Разработка методики исследований и экспериментальных средств;
- Проведение эксперимента, в котором по возможности наиболее полно отображаются реальные условия взаимодействия объекта исследования с окружающей средой.

.....
. Повторные эксперименты □ Массив данных
□ Систематизация и статистическая
обработка □

Изображение в виде

- таблиц,
- графиков,
- эксперимент. функциональных зависимостей.

X \ Y	23	25	27
20	1	2	7
22	2	0	3
24	3	2	1
26	5	2	2
28	17	9	3
m _y	28	15	16





Преимущество:

с помощью правильно поставленного и технически оснащенного эксперимента часто удается получить *надежные и достоверные результаты*

Недостаток:

результаты и закономерности, полученные в данном конкретном эксперименте, не могут быть использованы для обобщений и прогнозов результатов других, даже подобных экспериментов.

Э

М

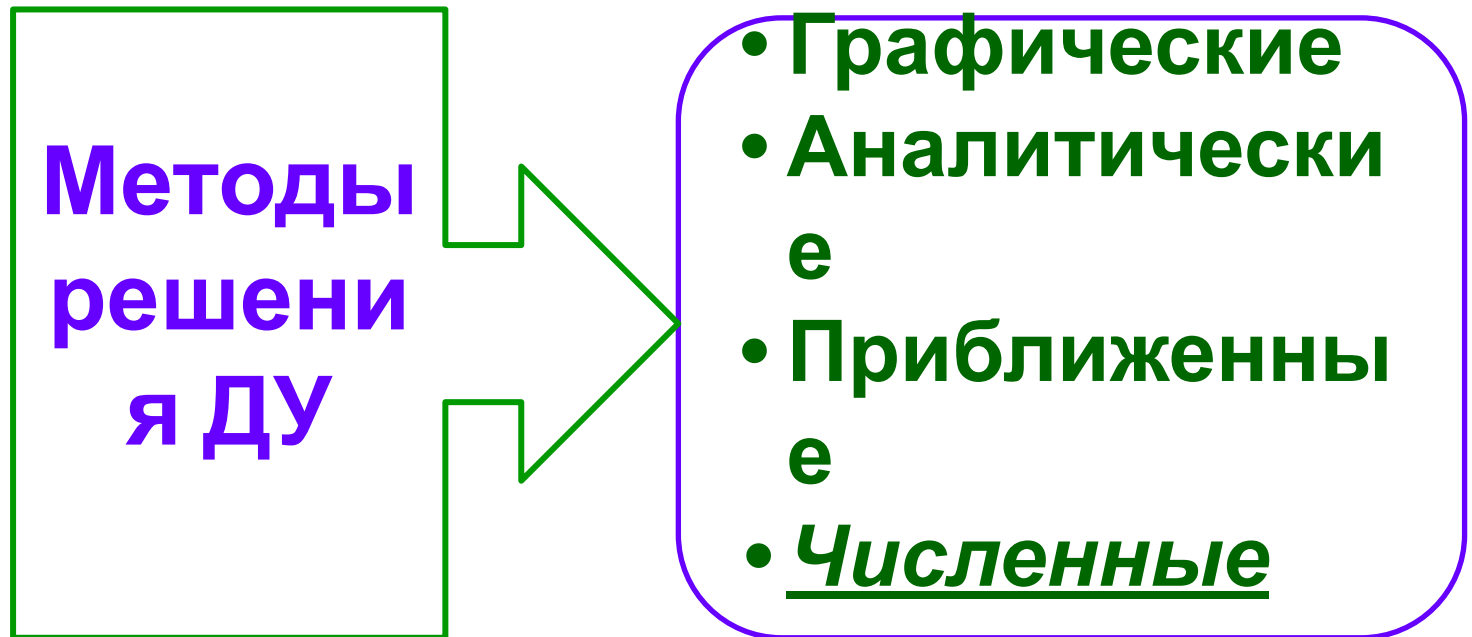
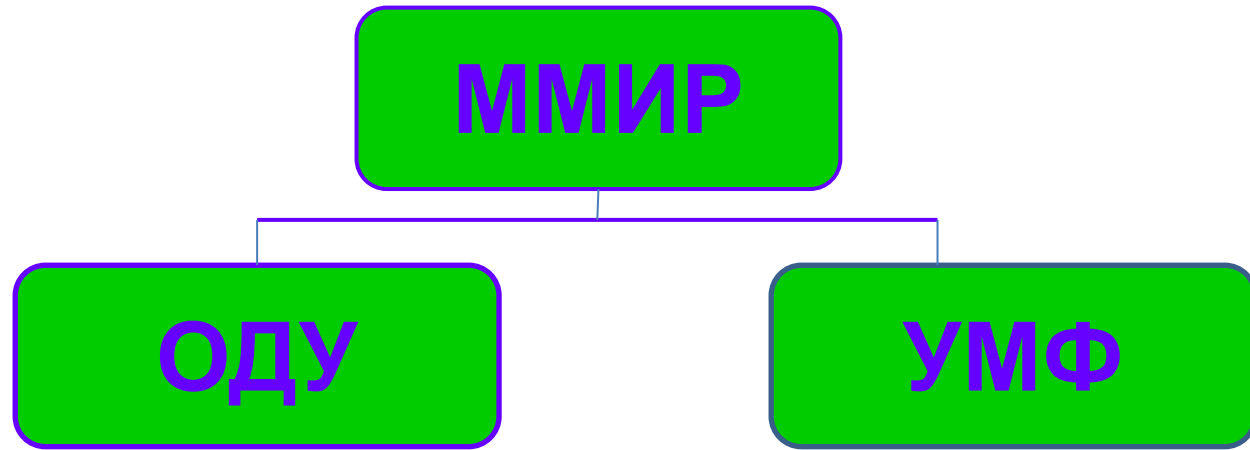
 Недостаток:

не всегда возможно решение
сложных прикладных задач.

 Преимущество:

там, где математическое решение
возможно эти методы имеют
большие возможности для
обобщений, т.е. применения
полученных результатов и
закономерностей *для других*
подобных задач.

ММ

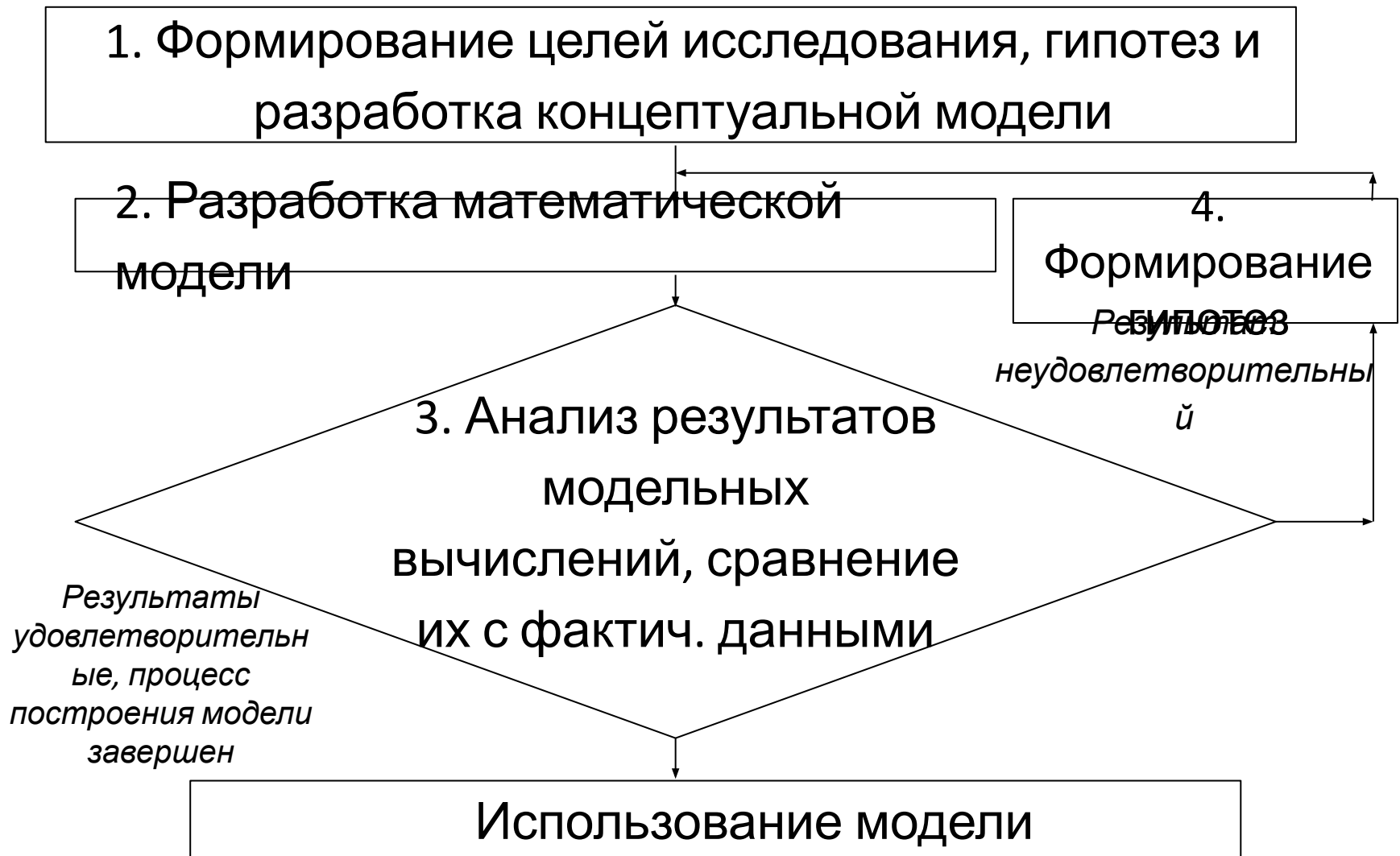


Термин «**модель**» (от лат. «modulus»- образец, норма, мера) - это объект, замещающий оригинал и отображающий его наиболее важные черты и свойства для данного исследования.

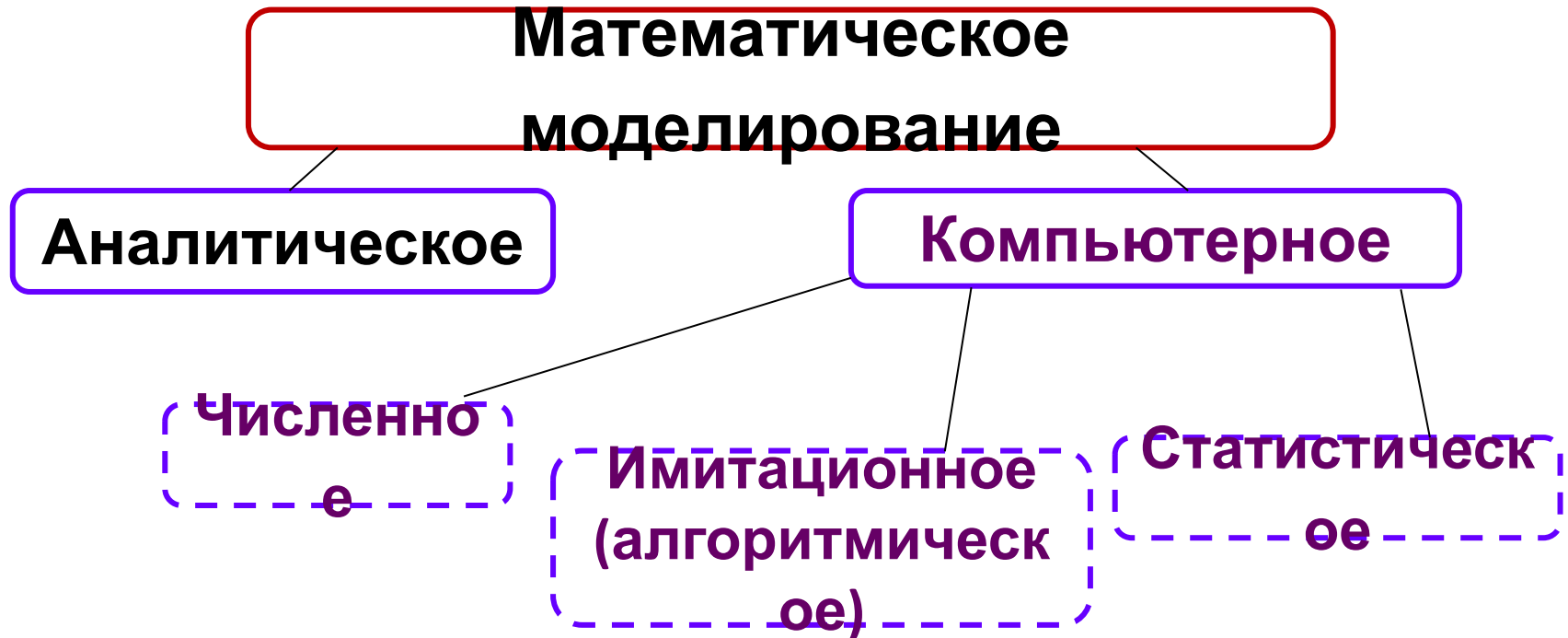
В *широком смысле* **модель** – это любая система, в каком-то отношении заменяющая либо способная заменить «оригинал», который интересует исследователя.

Математическая модель – это абстракция реальной действительности, в которой отношения между *реальными* элементами (интересующими исследователя), заменены отношениями между *математическими категориями*. Эти отношения записываются в виде *уравнений и (или) неравенств*, соотношениями формальной логики между показателями (переменными), которые характеризуют функционирование реальной моделируемой системы.

Основные этапы процесса математического моделирования



Классификация видов математической модели

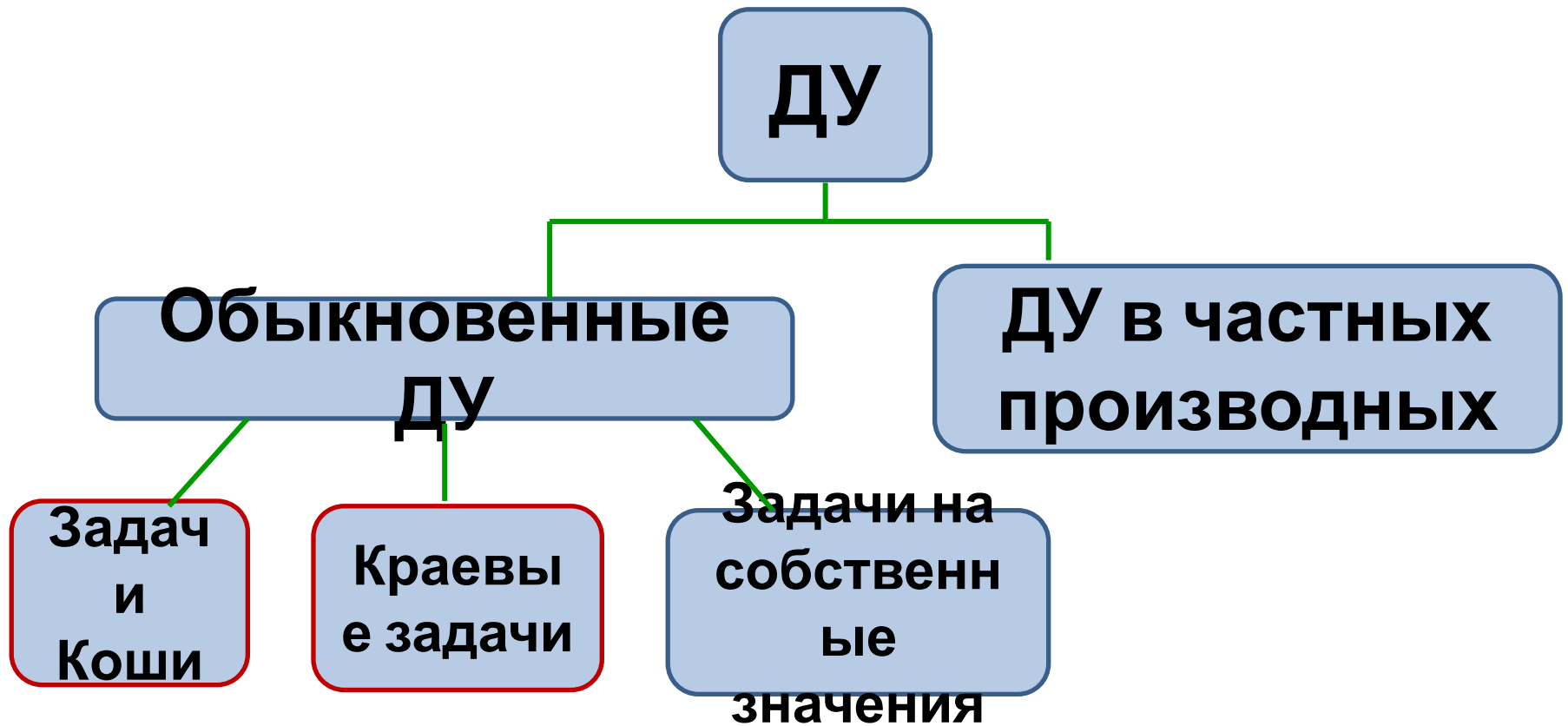


Цикл вычислительного процесса:

объект исследования →
физическая модель →
математическая модель →
численный алгоритм →
программа →
расчет на ЭВМ →
сравнение с экспериментальными
данными, управление объектом

Дифференциальные уравнения (ДУ) и методы их решения

Любой физический процесс, в котором рассматривается степень изменения одной переменной относительно другой, описывается ДУ.



ОДУ – уравнение, связывающее независимую переменную x , неизвестную функцию $y(x)$ и ее производные.

Если в ДУ неизвестной является функция *нескольких переменных* (т.е. эта функция входит в уравнение вместе со своими частными производными), то ДУ называется **уравнением в частных производных**.

Порядок ДУ – порядок старшей из производных

Общий вид ОДУ n - порядка:

$$f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad x \in [a, b] \quad (1)$$

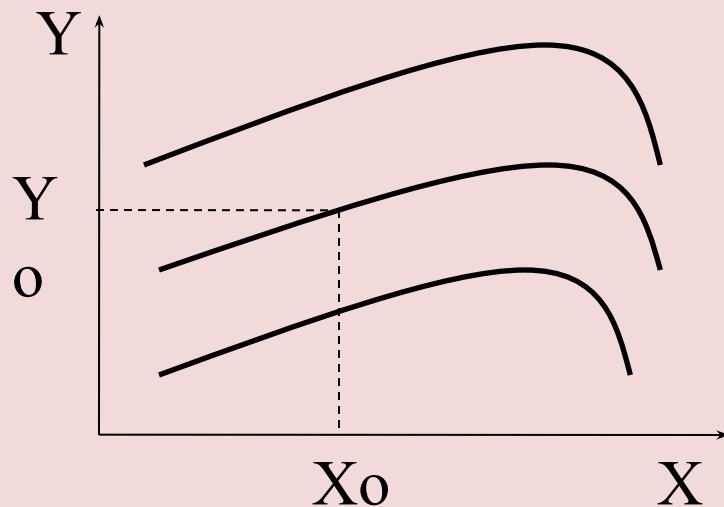
Решением (интегралом) ДУ называется функция, которая обращает (1) в верное тождество.

Общее решение уравнения (1) содержит n произвольных постоянных, т.е. является неоднозначным

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \quad x \in [a, b]$$

Общее решение задает **поле решений**, т.е. совокупность кривых.

Для получения **частного решения** (однозначного) необходимо иметь набор дополнительных условий для определения постоянных $C_1, C_2, \dots, C_n$.



Дополнительные условия включают задание значений функции и ее производных в определенной точке, т.е. дают однозначное решение, т.к. позволяют выбрать кривую

В зависимости от способа задания дополнительных условий задачи решения ДУ решения делятся на



задачу с начальными условиями
(задачу Коши)



Начальные условия — определяют значения функции и ее производных до $(n - 1)$ порядка включительно в одной точке отрезка интегрирования уравнения (1)

Обычно в начале $x = a$



задачу с краевыми условиями
(краевую задачу)



Краевые (граничные) условия — определяют значения функции и ее производных до $(n - 1)$ порядка включительно в нескольких точках отрезка интегрирования

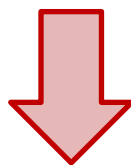
Обычно в начале и конце

$x = a$ и $x = b$

$$y^{(p)}(x) = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

~

$$\begin{aligned} y'_k &= y_{k+1}(x), & 0 < k < p-2 \\ y'_{p-1}(x) &= f(x, y_0, y_1, \dots, y_{p-1}), & y_0(x) = y(x) \end{aligned}$$



Произвольную систему ДУ **любого** порядка можно свести к некоторой эквивалентной системе уравнений **1-го** порядка.

ЗАДАЧА КОШИ для ОДУ 1-го порядка

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

$x \in [a, b]$, x_0 – точка, где задано начальное условие.

Решением задачи Коши является функция $y=y(x)$, удовлетворяющая ДУ и начальному условию.

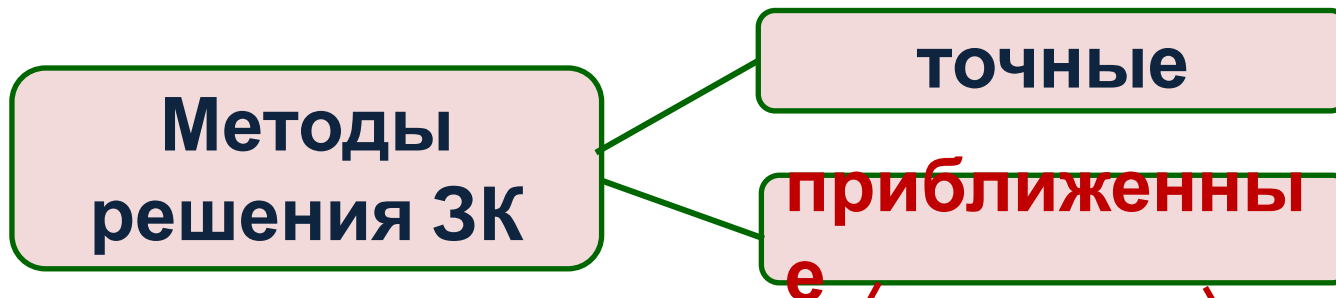
Если правая часть $f(x, y)$ непрерывна в области **R**:

$|x - x_0| < a, |y - y_0| < b$, то существует по меньшей мере одно решение $y = y(x)$, определенное в некоторой окрестности $|x - x_0| < h$, где $h > 0$.

Это решение единственно, если в **R** выполнено **условие**

Липшица: $|f(x, \tilde{y}) - f(x, y)| \leq N|\tilde{y} - y|$.

Если $f(x, y)$ имеет в **R** ограниченную производную $f_y'(x, y)$, то $N = \max |f_y'(x, y)|$ при $(x, y) \in R$.



аналитические
дают приближенное решение в виде
некоторого
аналитического
выражения (формулы)
искомой функции
(ряда, интеграла и т.д.)

численные
дают приближенное решение в виде
таблицы значений
искомой функции в
выбранных точках
интервала



В **1-шаговых методах** (Эйлера, Рунге-Кутта, решение уравнений с помощью **рядов Тейлора**) используется информация о самой интегральной кривой в предыдущей точке.

Недостаток: трудно оценить допускаемую ошибку (погрешность) вычисления.

В **многошаговых методах** следующую точку интегральной кривой можно получить, не делая повторных вычислений функции (как в 1-шаговых), а используя приемы прогноза и корреляции.

Недостаток: необходимость получения некоторых начальных точек, сложность организации вычислительной процедуры.

ЧМ – это алгоритмы вычисления приближенных (а иногда и точных) значений искомого решения на некоторой выбранной сетке значений аргумента. Решение при этом получается в виде таблицы.

— ЧМ не позволяют найти общего решения, а могут дать какое-то частное решение.

+ ЧМ применимы к очень широким классам уравнений и всем типам задач для них. При появлении ЭВМ – это основные методы.

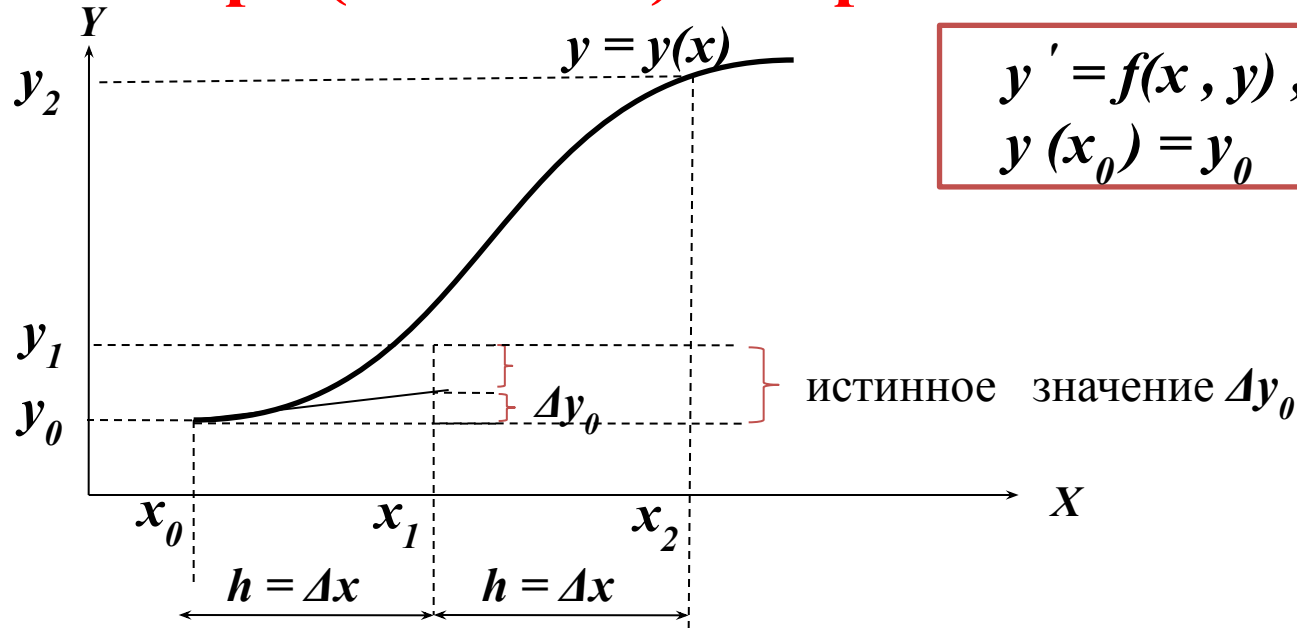
ЧМ применяются только для хорошо обусловленных задач!!! ДУ наз. **плохо обусловленным**, если небольшие изменения начальных условий или эквивалентные этим изменениям небольшие погрешности ЧМ могут сильно исказить решение.

Пример: $y' = y - x, \quad 0 \leq x \leq 100, \quad y(0) = 1.$

Общее решение : $y = 1 + x + Ce^x$. При $x=0$ $C=0$, а **$y(100)=101$** .

При небольшом изменении начального условия $\tilde{y}(0) = 1.0000001$ слегка меняется постоянная $\hat{C} = 10^{-6}$ но тогда **„**

Метод Эйлера (ломанных) для решения задачи Коши



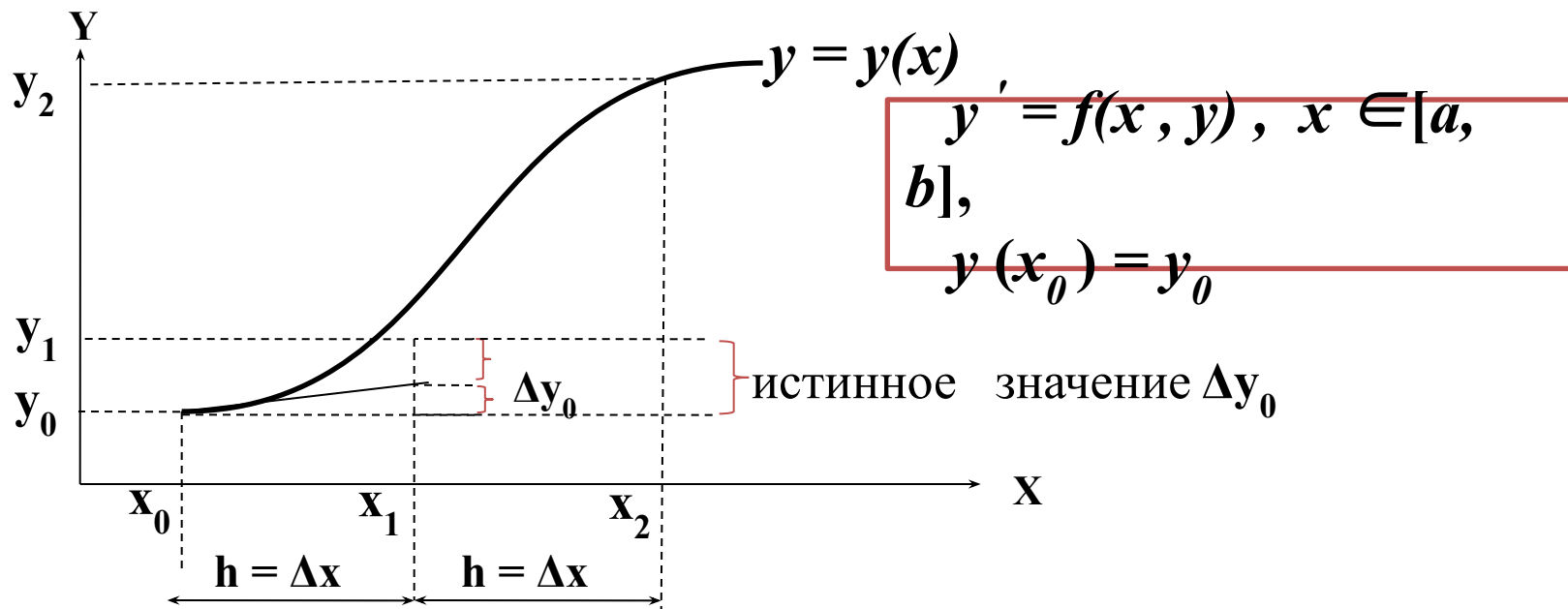
$$y' = f(x, y), \quad x \in [a, b], \\ y(x_0) = y_0$$

Выбираем достаточно малый шаг $h > 0$ и строим систему равноотстоящих точек $x_i = a + i \cdot h$, $i = 0, 1, \dots, n$ или $x_i = x_0 + i \cdot h$

Основная идея метода Эйлера — использование геометрического смысла первой производной

Заменяем производную в т. x_i правой разностью $y'_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$

$$\text{Для } i = 0 \quad y'_0 = \frac{y_1 - y_0}{h}$$



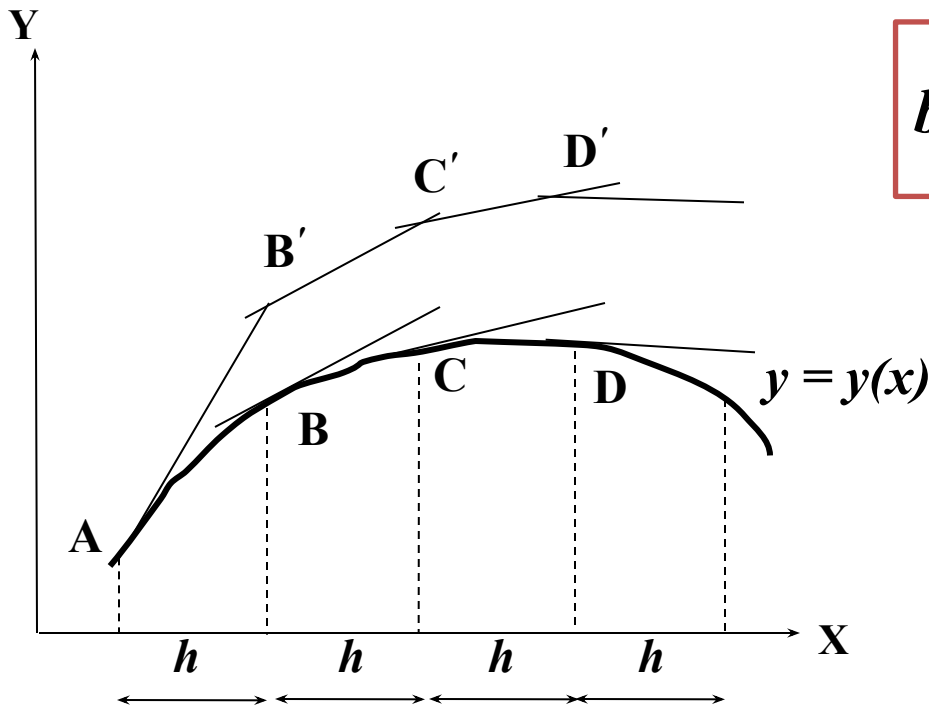
С другой стороны $y'_i = f(x_i, y_i)$, т.о.

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, \dots, n$$

Откуда $y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i) \quad i = 0, 1, \dots, n$

Обозначим $h \cdot f(x_i, y_i) = \Delta y_i$ тогда

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$$



$$y' = f(x, y), \quad x \in [a, b]$$

$y(x_0) = y_0$
Порядок точности – 1-й $O(h)$

Модификации метода
Эйлера имеют 1-й – $O(h)$
и 2-й $O(h^2)$ порядок точности

Недостатки метода: малая
точность и систематическое
накопление ошибок.

Кривая ABCD – график решения $y = y(x)$.

Фактически заменяем искомую кривую $y = y(x)$ некоторой ломаной, звенья которой параллельны касательным, проведенным к графику функции $y = y(x)$ в точках x_i .

Ломаная AB'C'D' – график приближенного решения

По мере удаления от начальной точки $x = x_0$ ломаная будет удаляться от истинной кривой и **погрешность вычисления накапливается.**

Метод Рунге – Кутта

$$y' = f(x, y), \quad x \in [a, b],$$

$$y(x_0) = y_0$$

Выбираем достаточно малый шаг $h > 0$ и строим систему равноотстоящих точек $x_i = a + i \cdot h, \quad i = 0, 1, \dots, n$ или $x_i = x_0 + i \cdot h$

Основная идея метода

Проинтегрируем ДУ из задачи Коши в пределах от x до $x + h$.

Получим равенство

$$y(x + h) = y(x) + h \int_x^{x+h} f(t, y(t)) dt$$

которое посредством интеграла связывает ДУ в двух точках, удаленных друг от друга на расстояние h .

Если решать этот интеграл методом левых прямоугольников

$$\int_a^b \varphi(t) dt = (b - a)\varphi(a), \quad \text{то получим метод Эйлера.}$$

Т.о. метод Эйлера – это метод **Рунге – Кутта 1-го порядка.**

**Наибольшее распространение получила схема метода
Рунге Кутта 4-го порядка точности**

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

$$\Delta y_i = 1/6 [K_1^{(i)} + 2K_2^{(i)} + 2K_3^{(i)} + K_4^{(i)}],$$

$$K_1^{(i)} = h f(x_i, y_i)$$

$$K_2^{(i)} = h f(x_i + h/2, y_i + K_1^{(i)}/2)$$

$$K_3^{(i)} = h f(x_i + h/2, y_i + K_2^{(i)}/2)$$

$$K_4^{(i)} = h f(x_i + h, y_i + K_3^{(i)})$$

+ Преимущества методОВ Рунге-Кутта:

- Достаточно высокая точность (кроме метода Эйлера);
- Являются явными (т.е. значение y_{i+1} вычисляется по ранее найденным значениям за определенное число действий по определенным формулам);
- Возможность производить вычисления с переменным шагом (там, где функция быстро меняется, нетрудно уменьшить шаг, и наоборот);
- Для начала расчета достаточно выбрать сетку x_i и задать значение y_0 , далее вычисления идут по одним и тем же формулам.

— Недостатки:

- На каждом шаге приходится вычислять функцию $f(x, y)$ в нескольких точках;
- Трудности при получении оценки погрешности вычисления.

Погрешность метода Рунге-Кутта $\approx h^5$. При выборе шага h можно руководствоваться критерием:

$$q = \left| \frac{k_2 - k_3}{k_1 - k_2} \right|$$

Если $q < 10^{-2}$, то шаг выбран правильно, в противном случае шаг нужно уменьшить.

Для практической оценки погрешности методов Рунге-Кутты порядка p используют «**принцип Рунге**», согласно которому погрешность метода вычисляется (приближенно) по формуле:

$$y(x_i + 2h) - y_{i+1}^h \approx \frac{y_{i+1}^h - y_{i+1}^{2h}}{2^p - 1}$$

(для метода Эйлера $p=1$, для метода Рунге-Кутты 4-го порядка точности $p=4$).

Лекция №3

**РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ (КЗ)
для ОДУ**

Постановка линейной краевой задачи для

СДУ

В общем случае КЗ состоит в нахождении функции $y = y(x)$ для интервала $x \in [a, b]$, удовлетворяющей ДУ и краевым условиям.

$$\left\{ \begin{aligned} p_0(x) y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \dots + p_n(x) y &= f(x), \quad x \in [a, b], \end{aligned} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_k^v y^{(k)}(a) + \beta_k^v y^{(k)}(b)) &= \gamma_v, \quad v = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \right. \quad (2)$$

Величины α_k^v , β_k^v и γ_v — заданные постоянные.
 $p_0(x)$, $p_1(x)$... $p_n(x)$, $f(x)$ — заданные функции.

В уравнение (2) входят n уравнений, из которых определяют n постоянных общего решения..

Понятие функционала и оператора

Понятие **функционала** связано с соответствием между множеством определенного класса функций и множеством чисел.

Если каждой функции $y = f(x)$ определенного класса ставится в соответствие по некоторому закону определенное числовое значение переменной I , то эту переменную называют функционалом от одной функциональной переменной

$$I = I[y] = I[y(x)] = I[f(x)],$$

y – независимая переменная для функционала.

Областью определения функционала является определенный класс функций.

Понятие оператора

Оператор – закон преобразования функций - прообразов в функции-образы.

Оператор дифференцирования действует по закону

$$D f = f'$$

Пример

$$D (\sin x) = \cos x$$

Функция – прообраз



функция - образ

$$D (x^3) = 3 x^2$$

Функция – прообраз



функция - образ

$$\left\{ \begin{array}{l} p_0(x) y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \dots + p_n(x) y = f(x), \quad x \in [a, b], \\ \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_k^\nu y^{(k)}(a) + \beta_k^\nu y^{(k)}(b)) = \gamma_\nu, \quad \nu = 1, 2, \dots, n \end{array} \right. \quad (1)$$

Введем в рассмотрение дифференциальный оператор Ly и функционал $l_\nu[y]$, тогда (1) и (2) можно записать в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} Ly = f(x), \quad x \in [a, b] \\ l_\nu[y] = \gamma_\nu, \quad \nu = 1, 2, \dots, n \end{array} \right. \quad (3)$$

или при $n = 2$

$$\left\{ \begin{array}{l} Ly = f(x), \quad x \in [a, b] \\ l_1[y] = \gamma_1 \\ l_2[y] = \gamma_2 \end{array} \right. \quad (4)$$

КЗ – однородная	КЗ – неоднородная
$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = 0 \\ \gamma_\nu = 0 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = 0 \\ \gamma_\nu \neq 0 \end{array} \right. \quad \text{или} \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x) \neq 0 \\ \gamma_\nu = 0 \end{array} \right.$

Теорема: Для того, чтобы существовало единственное решение неоднородной КЗ, необходимо и достаточно, чтобы однородная КЗ имела только тривиальное решение $y(x) \equiv 0$

МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ (приближенный численный метод)

Для ОДУ 2-го порядка

$$\begin{cases} p_0(x) y'' + p_1(x) y' + p_2(x) y = f(x), & x \in [a, b], \\ \alpha_0^1 y(a) + \cancel{\beta_0^1} y(b) + \alpha_1^1 y'(a) + \cancel{\beta_1^1} y'(b) = \gamma_1 \\ \cancel{\alpha_0^2} y(a) + \beta_0^2 y(b) + \cancel{\alpha_1^2} y'(a) + \beta_1^2 y'(b) = \gamma_2 \end{cases}$$

Пусть $p_0(x)=1$, $\beta_0^1 = \beta_1^1 = 0$ $\alpha_0^2 = \alpha_1^2 = 0$ $\gamma_1 = \alpha$ $\gamma_2 = \beta$

$$p_1(x) = p(x), \quad p_2(x) = q(x), \quad \text{т.е.}$$

$$\begin{cases} y'' + p(x) y' + q(x) y = f(x), & x \in [a, b], \end{cases} \quad (5)$$

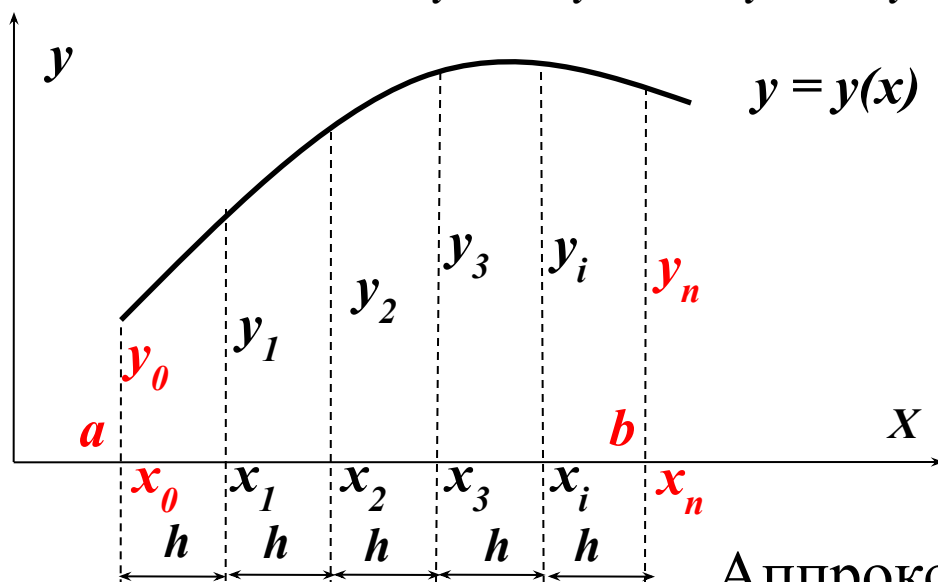
$$\begin{cases} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = \alpha \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = \beta \end{cases} \quad (6)$$

Разобьем $[a, b]$ на n равных частей длиной $h = (b - a) / n$.

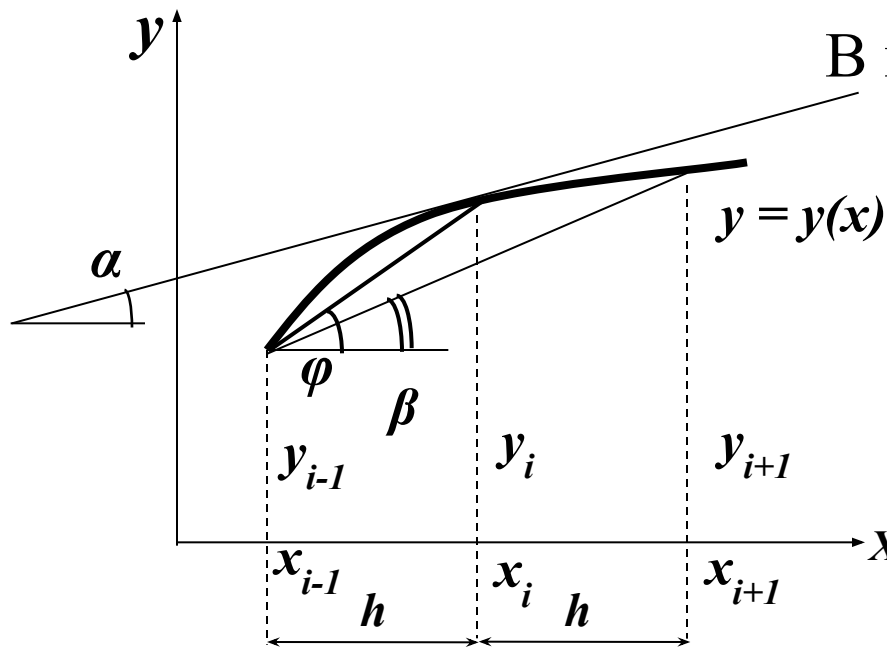
Координаты узлов : $x_i = a + i \cdot h$, $i = 0, 1, \dots, n$.

x_0 и x_n – **граничные**, $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{n-1}$ – **внутренние**.

Обозначим $y(x_i) = y_i$, $p(x_i) = p_i$, $f(x_i) = f_i$



Аппроксимируем производные конечно – разностными отношениями, которые позволяют заменить ДУ на СЛАУ, относительно неизвестных значений функции y_i в точках x_i ($i = 0, 1 \dots n$)



В центральном узле x_i заменим

$$y'_i = \operatorname{tg}(\alpha) \quad \text{на}$$

$$y'_i = \operatorname{tg}\beta = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} \quad (7)$$

Формулы **центральных разностей** для внутренних узлов

$$y''_i = (y'_i)' = \left(\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}\right)' = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} \quad (8)$$

Для граничных узлов используем **правые (левые) разности**

$$y'_0 = \frac{y_1 - y_0}{h}, \quad y'_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{h} \quad (9)$$

$$\begin{cases} y_i'' + p(x_i) y_i' + q(x_i) y_i = f(x_i), & i = 1, \dots, n-1, & (5) \\ \alpha_0 y(x_0) + \alpha_1 y'(x_0) = \alpha & \\ \beta_0 y(x_n) + \beta_1 y'(x_n) = \beta & \end{cases}$$

$$y'_0 = \frac{y_1 - y_0}{h}, \quad \frac{y_n - y_{n-1}}{h} \quad (6)$$

В ДУ (5) производные заменяются центральными разностями для каждого внутреннего узла (8), а в уравнениях (6) - разностями для краевых узлов (9).

В результате система диф. уравнений преобразуется в **СЛАУ**

$$\begin{cases} \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i & i = 1, \dots, n-1 & (10) \\ \alpha_0 y_0 + \alpha_1 \frac{y_1 - y_0}{h} = \alpha & \\ \beta_0 y_n + \beta_1 \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = \beta & \end{cases} \quad (11)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i \end{array} \right. \quad (10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_0 y_0 + \alpha_1 \frac{y_1 - y_0}{h} = \alpha \\ \beta_0 y_n + \beta_1 \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = \beta \end{array} \right. \quad (11)$$

После преобразований получим

$$\left\{ \begin{array}{l} (\alpha_0 h - \alpha_1) y_0 + \alpha_1 y_1 = \alpha h \\ (1 + \frac{h}{2} p_i) y_{i+1} + (h^2 q_i - 2) y_i + (1 - \frac{h}{2} p_i) y_{i-1} = f_i h^2, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \\ -\beta_1 y_{n-1} + (\beta_0 h + \beta_1) y_n = \beta h \end{array} \right. \quad (12)$$

Полученная система (12) представляет собой **СЛАУ с трёхдиагональной матрицей коэффициентов.**

Решается методом прогонки.