

Методы решения тригонометрических уравнений

- Решение простейших тригонометрических уравнений
- Решение тригонометрических уравнений разложением на множители
- Решение тригонометрических уравнений сводящихся к квадратным уравнениям
 - Решение тригонометрических уравнений преобразованием суммы тригонометрических функций в произведение
 - Решение тригонометрических уравнений преобразованием произведения тригонометрических функций в сумму
- Решение тригонометрических уравнений с применением формул понижения степени
- Решение тригонометрических уравнений как однородное
- Решение тригонометрических уравнений с помощью введения вспомогательного аргумента
- Решение тригонометрических уравнений с помощью универсальной тригонометрической подстановки
- Решение тригонометрических уравнений с помощью замены неизвестного
- Решение тригонометрических уравнений с помощью оценки левой и правой частей уравнения (метод оценок)
- Решение тригонометрических уравнений содержащих тригонометрические функции под знаком радикала

К определению тригонометрического уравнения различные авторы учебных пособий подходят по-разному. Мы назовём тригонометрическим уравнением равенство тригонометрических выражений, содержащих неизвестное (переменную) только под знаком тригонометрических функций. Уравнения вида

$$\cos 3x = \sin x \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 11x\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi - 5x\right) = 0 \quad \sin 3x + \sin 5x = \sin 4x$$

и т.д. – тригонометрические уравнения ■

Уравнения вида

$$\sin x = \frac{1}{2}x \quad \cos 2x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3} \quad \operatorname{tg} 2x = x$$

и т.д. не являются тригонометрическими, они относятся к типу трансцендентных уравнений и, как правило, решаются приближенно или графически.

Решить тригонометрическое уравнение – значит, найти все его корни – все значения неизвестного, удовлетворяющие уравнению.

- Простейшими тригонометрическими уравнениями являются:

- $\sin x = a$ $\cos x = a$, где $|a| \leq 1$

$$\operatorname{tg} x = a \qquad \operatorname{ctg} x = a \quad , \text{ где } a \in R$$

1. Решение простейших тригонометрических уравнений

$$\sin \pi \sqrt{x} = -1$$

$$\pi \sqrt{x} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\sqrt{x} = -\frac{1}{2} + 2n, n \in \mathbb{Z}$$

По определению арифметического квадратного корня перейдем к равносильной системе уравнений.

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} + 2n \geq 0, n \in \mathbb{Z} \\ x = \left(-\frac{1}{2} + 2n\right)^2, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} n \geq \frac{1}{4}, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \left(-\frac{1}{2} + 2n\right)^2, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Отве

$$\sqrt{f(x)} = g(x)$$

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$$

$$x = \left(-\frac{1}{2} + 2n\right)^2, n \in \mathbb{N}$$

2. Решение тригонометрических уравнений разложением на множители

Пример.

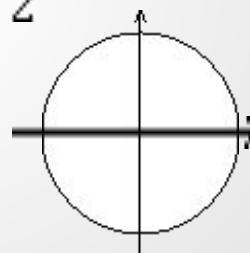
$$\frac{1}{\sin x} - 1 = \operatorname{ctgx} - \cos x, x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{1 - \sin x}{\sin x} = \frac{\cos x - \cos x \sin x}{\sin x}$$

$$\begin{aligned} 1 - \sin x &= \cos x(1 - \sin x) \\ 1 - \sin x - \cos x(1 - \sin x) &= 0 \\ (1 - \sin x)(1 - \cos x) &= 0 \end{aligned}$$

$$\sin x = 1$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$



$$\cos x = 1$$

$$x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Отметим полученные решения и область определения на тригонометрическом круге.

Ответ:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$$

3. Решение тригонометрических уравнений

сводящихся к квадратным уравнениям

$$\sin^4 x + \cos^4 x - 2 \sin 2x + \frac{3}{4} \sin^2 2x = 0$$

$$1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x - 2 \sin 2x + \frac{3}{4} \sin^2 2x = 0$$

$$4 - 2 \sin^2 2x - 8 \sin 2x + 3 \sin^2 2x = 0$$

$$\sin^2 2x - 8 \sin 2x + 4 = 0$$

Пусть $\sin 2x = y$

тогда

$$y^2 - 8y + 4 = 0$$

$$D_1 = 12$$

$$y_{1,2} = 4 \pm 2\sqrt{3}$$

$$\sin 2x = 4 - 2\sqrt{3}$$

или

$$\sin 2x = 4 + 2\sqrt{3}$$

$$\sin 2x = 4 - 2\sqrt{3}$$

$$2x = (-1)^k \arcsin(4 - 2\sqrt{3}) + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{1}{2}(-1)^k \arcsin(4 - 2\sqrt{3}) + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin 2x = 4 + 2\sqrt{3}$$

$$|\sin 2x| \leq 1$$

Корней нет

Ответ: $x = \frac{1}{2}(-1)^k \arcsin(4 - 2\sqrt{3}) + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$

4. Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение

При решении уравнений данным
способом необходимо знать формулы:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2},$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2},$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin (\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}, \quad \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin (\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta},$$

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin (\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}, \quad \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin (\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) - \sin 2x = 0$$

По формулам
приведения

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = \sin 3x$$

преобразуем разность
синусов в произведение:

$$\sin 3x - \sin 2x = 2 \sin \frac{3x - 2x}{2} \cos \frac{3x + 2x}{2} = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{5x}{2}$$

$$2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{5x}{2} = 0$$

ил
и

$$\cos \frac{5x}{2} = 0$$

$$\sin \frac{x}{2} = 0$$

$$x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{5}k, k \in \mathbb{Z}$$

**Отве
т:**

$$2\pi k, \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{5}k, k \in \mathbb{Z}$$

5. Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму

При решении уравнений данным способом необходимо знать формулы:

$$\sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta,$$

$$\sin (\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta,$$

$$\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\operatorname{tg} (\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}, \quad \operatorname{tg} (\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta},$$

$$\operatorname{ctg} (\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \alpha}, \quad \operatorname{ctg} (\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha}.$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)],$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) + \cos (\alpha + \beta)],$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin (\alpha - \beta) + \sin (\alpha + \beta)].$$

$$\sin 2x \sin 6x = \cos x \cos 3x$$

$$\frac{1}{2}[\cos(2x - 6x) - \cos(2x + 6x)] = \frac{1}{2}[\cos(x - 3x) + \cos(x + 3x)]$$

$$\cos 4x - \cos 8x = \cos 2x + \cos 4x$$

$$\cos 8x + \cos 2x = 0$$

$$2\cos 5x \cos 3x = 0$$

$$\cos 5x = 0, \quad x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{или} \quad \cos 3x = 0, \quad x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

**Отве
т:**

$$\frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5}, \quad \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

6. Использование формул понижения степени

При решении уравнений данным способом необходимо знать формулы:

$$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}, \quad 1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\cos^2 3x + \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} + 5x \right) = \cos^2 7x + \cos^2 9x + \cos \frac{3\pi}{2}$$

$$\cos^2 3x + \cos 5x = \cos^2 7x + \cos^2 9x$$

$$\frac{1}{2}(1 + \cos 6x) + \frac{1}{2}(1 + \cos 10x) = \frac{1}{2}(1 + \cos 14x) + \frac{1}{2}(1 + \cos 18x)$$

$$\cos 6x + \cos 10x = \cos 14x + \cos 18x$$

$$2 \cos 8x \cos 2x = 2 \cos 16x \cos 2x,$$

$$\cos 2x (\cos 16x - \cos 8x) = 0.$$

$$-2 \sin 4x \sin 12 \cos 2x = 0$$

$$\sin 4x = 0$$

ил

$$\sin 12x = 0$$

ил

$$\cos 2x = 0$$

и

$$x = \frac{\pi k}{4}, \quad x = \frac{\pi n}{12}, \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi l}{2}, \quad k, n, l \in \mathbb{Z}$$

и

$$x = \frac{\pi n}{12}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Отве

$$\frac{\pi n}{12}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

т:

7. Однородные уравнения

$$a \sin x + b \cos x = 0;$$

Уравнения

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0;$$

$$a \sin^3 x + b \sin^2 x \cos x + c \sin x \cos^2 x + d \cos^3 x = 0$$

и т.

д.

называют **однородными**

относительно
суммы показателей

$\sin x$ и $\cos x$
и $\cos x$

степеней при

всех членов такого уравнения одинакова. Эта сумма называется степенью однородного уравнения. Рассмотренные уравнения имеют соответственно первую, вторую и третью степень.

Делением $\cos^k x$, где k - степень однородного уравнения, уравнение приводится к алгебраическому относительно функции $\operatorname{tg} x$

$$2 \sin x - 3 \cos x = 0$$

Разделим обе части

$$\cos x \neq 0$$

$$2 \cdot \operatorname{tg} x - 3 = 0$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{3}{2}$$

$$x = \operatorname{arctg} \frac{3}{2} + \pi k \quad k \in \mathbb{Z}$$

**Отве
т:**

$$x = \operatorname{arctg} \frac{3}{2} + \pi k \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$4 \sin^2 x + 2 \sin x \cos x = 3$$

Умножим правую часть
уравнения на

$$\sin^2 x + \cos^2 x$$

$$4 \sin^2 x + 2 \sin x \cos x = 3 \sin^2 x + 3 \cos^2 x;$$

$$\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - 3 \cos^2 x = 0$$

Разделим
на

$$\cos^2 x$$

$$\operatorname{tg}^2 x + 2 \cdot \operatorname{tg} x - 3 = 0;$$

$$\operatorname{tg} x = -3$$

и

$$\operatorname{tg} x = 1$$

$$x = -\operatorname{arctg} 3 + \pi k$$

и

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n$$

$$n, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = -\operatorname{arctg} 3 + \pi k$ $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$ $n, k \in \mathbb{Z}$

8. Введение вспомогательного

Рассмотрим уравнение вида: $a \sin x + b \cos x = c$

где a, b — $x = c$ x —

Разделим обе части этого уравнения на $\sqrt{a^2 + b^2}$ (корректно ли это?):

$$\underbrace{\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}}_{\cos \varphi} \sin x + \underbrace{\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}}_{\sin \varphi} \cos x = \underbrace{\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}}_C,$$

Теперь коэффициенты уравнения обладают свойствами синуса и косинуса,

а именно: модуль (абсолютное значение) каждого из них не больше 1,

а сумма их квадратов равна 1.

Тогда можно обозначить их соответственно как $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$
 φ — так называемый **вспомогательный угол**

и наше уравнение
принимает вид:

$$\cos \varphi \cdot \sin x + \sin \varphi \cdot \cos x = C ,$$

или

$$\sin (x + \varphi) = C ,$$

и его решение: $x = (-1)^k \cdot \arcsin C - \varphi + \pi k ,$

$$\text{где } \varphi = \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} .$$

Заметим, что введённые обозначения $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$ взаимно заменяемы.

$$\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = 1$$

Так как $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$, то $\frac{1}{2}$ и $\frac{\sqrt{3}}{2}$ уже являются

соответственно

косинусом и синусом
определенного

угла; ясно, что
этот угол

$$\frac{\pi}{3}$$

$$\sin x \cos \frac{\pi}{3} + \cos x \sin \frac{\pi}{3} = 1 \Leftrightarrow \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = 1$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

**Отве
т:**

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Пример. Решить уравнение: $\sqrt{3} \sin 3x - \cos 3x = 1$.

Решение. Здесь $a = \sqrt{3}$, $b = -1$, поэтому делим обе части на $\sqrt{3+1}=2$:

$$(\sqrt{3}/2) \cdot \sin 3x - (1/2) \cdot \cos 3x = 1/2,$$

$$\cos(\pi/6) \cdot \sin 3x - \sin(\pi/6) \cdot \cos 3x = 1/2,$$

$$\sin(3x - \pi/6) = 1/2,$$

$$\text{отсюда, } x = (-1)^k \cdot \pi/18 + \pi/18 + \pi k/3.$$

9. Метод рационализации (метод универсальной тригонометрической подстановки) для уравнения вида

$$a \sin x + b \cos x = c$$

Известно, что
если
выражаются рационально
через

$$\alpha \neq (2n+1)\pi, n \in \mathbb{Z}, \quad \text{то} \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

$$\begin{aligned} \sin \alpha, \cos \alpha, \operatorname{tg} \alpha \\ \sin \alpha &= \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \\ \cos \alpha &= \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \end{aligned}$$

Вводим вспомогательное
неизвестное так,
получило рациональное уравнение
сх. вспомогательного относительно
неизвестного.

чтобы после
подстановки

$$a \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} + b \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = c$$

Обозначим

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = t$$

получим:

$$a \frac{2t}{1+t^2} + b \frac{1-t^2}{1+t^2} = c$$

Решим данное уравнение и получим следующие ответы:

1.
если

$$a^2 + b^2 < c^2$$

то
о

у уравнения нет
корней;

2.
если

$$a^2 + b^2 \geq c^2, c \neq -b$$

то
о

$$x = 2 \arctg \frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{b + c} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

3.
если

$$c \neq -b$$

то
о

$$x = \begin{cases} (2n+1)\pi \\ -2 \arctg \frac{b}{a} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$3\sin x + 4\cos x = 3$$

$$a=3, b=4, c=3, a^2 + b^2 > c^2$$

- уравнение имеет решение.

$$3\frac{2t}{1+t^2} + 4\frac{1-t^2}{1+t^2} = 3 \Rightarrow 7t^2 - 6t - 1 = 0, t_{1,2} = \frac{3 \pm 4}{7}$$

$$t_1 = 1, \quad \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + n\pi, \quad x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$t_2 = -\frac{1}{7}, \quad \frac{x}{2} = -\arctg \frac{1}{7} + n\pi, \quad x = -2\arctg \frac{1}{7} + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

**Отве
т:**

$$x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, \quad x = -2\arctg \frac{1}{7} + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$3\sin x + 4\cos x = 5, x \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

$$3 \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} + 4 \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = 5 \quad (2)$$

$$\frac{6\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 4 - 4\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 5 - 5\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = 0$$

$$\begin{cases} 9\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 6\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 = 0 \\ 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \neq 0 \end{cases}$$

$$\left(3\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right)^2=0$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{x}{2}=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$$

$$x=2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$$

При переходе от уравнения (1) могла произойти потеря корней, являются ли корни уравнения корнями данного уравнения.

к уравнению (2), значит необходимо проверить,

$$\cos\frac{x}{2}=0$$

$$\cos \frac{x}{2} = 0$$

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pi + 2\pi, n \in \mathbb{Z}$$

Проверк

а.

Есл

и

$$x = \pi + 2\pi, n \in \mathbb{Z}, \quad \text{тогда}$$

$$3 \sin(\pi + 2\pi) + 4 \cos(\pi + 2\pi) = 5, x \in \mathbb{Z}$$

$$0 + 4(-1) = 5 \quad - \text{ не верно,}$$

значит

$$x = \pi + 2\pi, n \in \mathbb{Z}$$

не является корнями
уравнения. исходного

Ответ

:

$$x = 2 \arctg \frac{1}{3} + 2\pi, n \in \mathbb{Z}$$

11. Решение тригонометрических уравнений с помощью оценки левой и правой частей уравнения (метод оценок)

Пример 1.

$$2 \sin^3 5x + 7 \cos 5x = 9,$$

$$2 \sin^3 5x \leq 2,$$

$$7 \cos 5x \leq 7,$$

$$2 \sin^3 5x + 7 \cos^5 x \leq 9,$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin 5x = 1, \\ \cos 5x = 1, \end{cases} \text{ что невозможно.}$$

Ответ. Решений нет.

Пример

2.

$$\sin^{19} x + \cos^{19} x = \frac{\pi}{3},$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

$$\left. \begin{array}{l} \sin^{19} x \leq \sin^2 x, \\ \cos^{19} x \leq \cos^2 x, \end{array} \right| \Rightarrow \sin^{19} x + \cos^{19} x \leq 1,$$

$$\pi/3 > 1.$$

Пример

3.

$$\sin 3x + \sin 7x = 2,$$

$$\begin{cases} \sin 3x = 1, \\ \sin 7x = 1, \end{cases}$$

$$\sin 3x = 1,$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Пусть
ь

$$x \in [0; 2\pi[, x \in \left\{ \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{3\pi}{2} \right\}.$$

Подставляем во второе уравнение:

$$\sin \frac{7\pi}{6} \neq 1; \sin \frac{35\pi}{6} \neq 1; \sin \frac{21\pi}{2} = 1.$$

Отве
т.

$$\left\{ \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Пример
4.

$$\cos^3 x \cos 2x = -1,$$

$$|\cos x| \leq 1, \quad |\cos 2x| \leq 1, \quad |\cos^3 x \cos 2x| \leq 1,$$

$$\begin{cases} \cos x = 1, \\ \cos 2x = -1, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \cos x = -1, \\ \cos 2x = 1. \end{cases}$$

Есл
и

$$\cos x = 1,$$

т
о

$$\cos 2x = \cos^2 x - 0 = 1 \neq -1$$

Есл
и

$$\cos x = -1,$$

т
о

$$\cos 2x = 1$$

$$\begin{cases} \cos x = -1, \\ \cos 2x = 1. \end{cases} \iff \cos x = -1.$$

Отве
т.

$$\{\pi + 2\pi k | k \in \mathbb{Z}\}$$

12. Решение тригонометрических уравнений содержащих

тригонометрические функции под знаком радикала
пример №1

$$\sqrt{1 - \cos x} = \sin x$$

$$\begin{cases} \sin x \geq 0 & (1) \\ 1 - \cos x = \sin^2 x & (2) \end{cases}$$

Решим уравнение
2.

$$1 - \cos x = \sin^2 x$$

$$\cos^2 x - \cos x = 0$$

$$\cos x (\cos x - 1) = 0$$

$$\cos x = 0$$

или

$$\cos x = 1$$

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Учитывая условие 1, $\sin x \geq 0$, решением системы будут серии :

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$