

Лекция №5

МЕТОД ГАУССА.

Пусть задана система из m уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Составим для нее расширенную матрицу, отделив столбец правых частей вертикальной чертой:

$$P = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Каждая строка расширенной матрицы является образом одного уравнения :
элементы a_{ij} изображают коэффициенты при неизвестных;

элемент b_i изображает правую часть

вертикальная черта изображает знак
равенства.

Вспомним элементарные преобразования, не изменяющие решение системы

Для расширенной матрицы системы P

допустимы:

- перестановка любых двух строк;
- перестановка любых двух столбцов, КРОМЕ СТОЛБЦА ПРАВЫХ ЧАСТЕЙ (СТОЛБЕЦ ПРАВЫХ ЧАСТЕЙ ПЕРЕСТАВЛЯТЬ НЕЛЬЗЯ);
- умножение элементов любой строки на число $\alpha \neq 0$;
- сложение любых двух строк.

Метод Гаусса состоит в последовательном исключении неизвестных с помощью элементарных преобразований.

Вычисления проводятся в два этапа, называемых ПРЯМЫМ и ОБРАТНЫМ ХОДОМ

Преобразования коэффициентов при неизвестных и правых частей системы удобно выполнять в матричной форме.

ЗАМЕЧАНИЕ: рекомендуется нумеровать столбцы или проставлять под столбцами соответствующие неизвестные:

$$P = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{array}}$

Прямой ход

Приведем расширенную матрицу системы Р к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований :

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1r} & a_{1r+1} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & 1 & \cdots & a_{2r} & a_{2r+1} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ & \vdots & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{rr+1} & \cdots & a_{rn} & b_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{r+1} \\ & \vdots & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_m \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & \cdots & x_r & x_{r+1} & \cdots & x_n \end{array}$$

Возможны
две
ситуации:

I) среди чисел $b_{r+1}, \dots, b_m$ есть хотя бы одно, не равное нулю, например: $b_{r+1} \neq 0$

II) все числа $b_{r+1}, \dots, b_m$ равны нулю:
 $b_{r+1} = 0; \dots, b_m = 0$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c}
 1 & a_{12} & \cdots & a_{1r} & a_{1r+1} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
 0 & 1 & \cdots & a_{2r} & a_{2r+1} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\
 & \vdots & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{rr+1} & \cdots & a_{rn} & b_r \\
 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{r+1} \\
 & & & & & & & \vdots \\
 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_m
 \end{array} \right)$$

$x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_r \quad x_{r+1} \quad \dots \quad x_n$

- l) Если среди чисел $b_{r+1}, \dots, b_m$ есть хотя бы одно, не равное нулю, например: $b_{r+1} \neq 0$, то это означает, что в системе есть уравнение:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n = b_{r+1} \neq 0,$$

**которое не имеет
решений.**

Если сравнить ранги матриц, то $\text{rang } A = r$, а $\text{rang } P = r + 1$; по теореме Кронекера-Капелли система

несовместна.

Решение закончено, обратный ход метода Гаусса не нужен.

Какой ответ следует дать

?

II) Если все числа $b_{r+1}, \dots, b_m$ равны нулю: $b_{r+1} = 0; \dots, b_m = 0$,

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1r} & a_{1r+1} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & 1 & \cdots & a_{2r} & a_{2r+1} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ & \vdots & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{rr+1} & \cdots & a_{rn} & b_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & \vdots & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_r \quad x_{r+1} \quad \dots \quad x_n$

это значит, что $\text{rang } A = \text{rang } P = r$, и система уравнений

Выделим базисный минор и отбросим нулевые строки:

$$\left(\begin{array}{cccc|cc|c} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1r} & a_{1r+1} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & 1 & \cdots & a_{2r} & a_{2r+1} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ & \vdots & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{rr+1} & \cdots & a_{rn} & b_r \end{array} \right)$$

$x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_r \quad x_{r+1} \quad \dots \quad x_n$

Останется укороченная система из r уравнений.

Обратный ход

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1r} & a_{1r+1} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & 1 & \cdots & a_{2r} & a_{2r+1} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ & & \ddots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & a_{rr+1} & \cdots & a_{rn} & b_r \end{array} \right)$$

$x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_r \quad x_{r+1} \quad \dots \quad x_n$

В укороченной системе из r уравнений
ВОЗМОЖНЫ два
случая:

Случай

Число¹ неизвестных
 n равно рангу системы r :

$$n = r$$

Почему невозможен
случай

Случай

Число² неизвестных
 n больше ранга системы r :

$$n > r$$

$$n < r ?$$

Случай 1

Число неизвестных n равно рангу системы r : $n = r$

то есть матрица системы стала
треугольной :

$$\begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \\ \hline x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{array}$$

Если вернуться к уравнениям, то
получим

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ x_n = b_n \end{cases}$$

Решая последовательно уравнения системы снизу вверх, каждый раз
будем иметь дело с уравнением, содержащим только одно

неизвестное. Набор значений $x_1, x_2, \dots, x_n$ определяется однозначно, то есть система
имеет **ЕДИНСТВЕННОЕ** решение.

(называется
определённой)

Случай 2

Число неизвестных n **больше** ранга системы r : $n > r$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1r} & a_{1r+1} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & 1 & \cdots & a_{2r} & a_{2r+1} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ & & \ddots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & a_{rr+1} & \cdots & a_{rn} & b_r \end{array} \right)$$

$\begin{array}{cccc} | & x_1 & x_2 & \cdots & x_r & | \\ \cdot & & & & & \cdot \end{array}$ $x_{r+1} \quad \cdots \quad x_n$

БАЗИСН
ЫЕ

СВОБОДН
ЫЕ

В базисный минор вошли коэффициенты при неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_r$;

назовем их **БАЗИСНЫМИ**.

Неизвестные $x_{r+1}, \dots, x_n$, не вошедшие в базисный минор, назовем **СВОБОДНЫМИ**

ВОПРОС: сколько свободных
неизвестных?

ОТВЕТ: свободных неизвестных $k = n - r$

Перейдем от матричной формы записи к уравнениям:

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc|c} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1r} & a_{1r+1} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & 1 & \cdots & a_{2r} & a_{2r+1} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ & & \ddots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & a_{rr+1} & \cdots & a_{rn} & b_r \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{cccc|ccc} x_1 & x_2 & \cdots & x_r & x_{r+1} & \cdots & x_n & \end{array}$$

БАЗИСН
ЫЕ

СВОБОДН
ЫЕ

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1r}x_r + a_{1r+1}x_{r+1} + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2r}x_r + a_{2r+1}x_{r+1} + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ x_r + a_{rr+1}x_{r+1} + \cdots + a_{rn}x_n = b_r \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{ccc} \vdots & & \vdots \\ \vdots & \text{БАЗИСН} & \vdots \\ \vdots & \text{ЫЕ} & \vdots \end{array}$$

БАЗИСН
ЫЕ

СВОБОДН
ЫЕ

Придадим свободным переменным любые значения и подставим их в уравнения:

$$x_{r+1} = c_1$$

$$x_{r+2} = c_2$$

...

$$x_n = c_{n-r}$$

Пример 1

Решить систему уравнений методом

Гаусса:

РЕШЕНИ *Прямой*

Е: **ход**

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

$$P = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & -2 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & -2 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} \times (-2) \\ \times (-1) \end{array} \sim$$

$x_1 \quad x_2 \quad x_3$ $x_1 \quad x_2 \quad x_3$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 \cdot (-2) + 2 & 2 \cdot (-2) - 1 & 3 \cdot (-2) + 1 & (-1) \cdot (-2) - 2 \\ 1 \cdot (-1) + 1 & 2 \cdot (-1) - 3 & 3 \cdot (-1) - 2 & (-1) \cdot (-1) + 3 \end{array} \right) =$$

$x_1 \quad x_2 \quad x_3$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 4 \end{array} \right) : (-5) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 4 \end{array} \right) \times 5 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right)$$

$x_1 \quad x_2 \quad x_3$

1) $b_3 = \neq 0$; система **несовместн** **ОТВЕТ** : нет

решений

Пример 2

Решить систему уравнений методом

Гаусса:

РЕШЕНИ **Прямой**
Е: **ход**

$$n < r$$

В упрощенной системе из 3 уравнений

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 4 \\ 0 & 3 & -2 & | & 8 \\ 1 & 1 & -1 & | & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \times (-1) \\ \\ \leftarrow + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 4 \\ 0 & 3 & -2 & | & 8 \\ 0 & -1 & -2 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \times (-1) \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 4 \\ 0 & 3 & -2 & | & 8 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 4 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 3 & -2 & | & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \times (-3) \\ \leftarrow \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 4 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & -8 & | & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ : (-8) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 4 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 \end{pmatrix}$$

$x_1 \quad x_2 \quad x_3$

$$\text{rang } A = 3;$$

$$\text{rang } P = 3;$$

$$n = 3;$$

Система **совместна**,
случай 1.

Обратный ход

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \sim \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

$x_1 \quad x_2 \quad x_3$

$$x_2 + 2 \cdot (-1) = 0; \quad x_2 = 2;$$

$$x_1 + 2 \cdot 2 - 1 = 4; \quad x_1 = 1;$$

ОТВЕ $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Т:

Дома сделать
проверку

Пример 3

Решить систему уравнений методом

Гаусса:

РЕШЕНИ **Прямой**

Е: **ход**

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_2 - 2x_3 = 8 \\ -x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 12 \end{cases}$$

$$P = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & 8 \\ -1 & 4 & -5 & 12 \end{array} \right) \xrightarrow{+} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & 8 \\ 0 & 6 & -4 & 16 \end{array} \right) : 3 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 6 & -4 & 16 \end{array} \right) \times (-6) \xrightarrow{+}$$

$x_1 \quad x_2 \quad x_3$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\text{rang } A = 2;$$

$$\text{rang } P = 2;$$

$$n = 3;$$

Система **совместна**,
случай 2.

Обратный ход

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \end{array} \right) \begin{array}{c} 4 \\ \frac{8}{3} \end{array} \sim$$

БАЗИСН
ЫЕ

СВОБОДН
АЯ

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_2 - \frac{2}{3}x_3 = \frac{8}{3} \end{cases}$$

$$x_3 = C;$$

$$x_2 - \frac{2}{3}C = \frac{8}{3}; \quad x_2 = \frac{8}{3} + \frac{2}{3}C;$$

$$x_1 + 2\left(\frac{8}{3} + \frac{2}{3}C\right) + C = 4; \quad x_1 = -\frac{4}{3} - \frac{7}{3}C;$$

ОТВЕ
Т:

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} - \frac{7}{3}C \\ \frac{8}{3} + \frac{2}{3}C \\ C \end{pmatrix}, \text{ где } C - \text{любое число.}$$

Дома сделать