

Математика

Матрицы.



Виды матриц.

- **Матрицей** называется упорядоченная таблица чисел, состоящая из **m строк и n столбцов**.
- Число строк и столбцов (m n) называется **размером** матрицы.
- a_{ij} называется **элементом** матрицы, где i -номер строки, j -номер столбца матрицы.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Матрицы. Виды матриц.

Пример ¶

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ размер матрицы 2×2 , $a_{11}=1$, $a_{21}=3$. ¶

б) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 6 & 10 \\ 8 & 11 & 13 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ размер матрицы 4×3 , $a_{33}=13$, $a_{41}=4$, $a_{12}=0$. ¶

Матрицы. Виды матриц.

Матрица называется **квадратной**, если в ней число строк равно числу столбцов.

Если в матрице число строк не равно числу столбцов, то такая матрица называется **прямоугольной**.

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 9 \\ 0 & 11 & -5 \end{pmatrix} \text{ -квадратная матрица; } B = \begin{pmatrix} 1 & -34 \\ 13 & 0 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \text{ -прямоугольная матрица.}$$

Матрицы. Виды матриц.

- Матрица, элементы которой составляют строку, называется **матрица строка**.
- Матрица, элементы которой составляют столбец, называется **матрица столбец**.

Пример $A = (1 \ 10 \ -2 \ 7)$ - матрица строка; $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 99 \end{pmatrix}$ - матрица столбец.

Матрицы. Виды матриц.

- Главная диагональ квадратной матрицы- это диагональ, которая начинается с элемента a_{11} .
- Квадратная матрица, у которой на главной диагонали единицы, а все остальные элементы равны нулю, называется **единичной матрицей**.
- Матрица, у которой все элементы равны нулю, называется **нулевой матрицей**.

Пример

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \text{единичная матрица; } O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \text{нулевая матрица.}$$

Матрицы. Виды матриц.

- Матрица, в которой строки и столбцы заменены местами, называется **транспонированной матрицей A^T** .

Пример

Если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, тогда $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

Действия над матрицами

▣ 1. Равенство матриц.

- ▣ Две матрицы называются **равными**, если они одного размера и равны их соответствующие элементы.

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, тогда $A=B$, если $a_{ij}=b_{ij}$.

Действия над матрицами

- ▣ **2. Сложение матриц.**
- ▣ При сложении матриц (одного размера) складываются их соответствующие элементы.

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, $A+B=C$, $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$, где $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. [1.1]

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, A+B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Умножение матрицы на число.

- При умножение матрицы на число, каждый элемент матрицы умножается на это число.

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $\lambda \neq 0$, $\lambda = \text{const}$, то $\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix}$ [1.2].

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \lambda = 3, \lambda A = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 12 & 18 \end{pmatrix}$$

Умножение матриц.

▣ 1) Квадратные матрицы (одного размера)

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, $AB = C$ $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$, где $c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}$;

$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}$; $c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}$; $c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}$ [1.3].

Пример

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 7 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 11 \\ 0 & -11 & 19 \\ 13 & 13 & 29 \end{pmatrix}.$$

Умножение матриц.

- ▣ **2) Прямоугольные матрицы.**
- ▣ **Прямоугольные матрицы можно перемножать тогда, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы. В результате получится новая матрица, в которой столько строк, сколько строк в первой и столько столбцов, сколько столбцов во второй.**

Умножение матриц.

$$\bigcirc \quad AB = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boxed{3} & 4 & 5 \\ \boxed{6} & 0 & -2 \\ \boxed{7} & 1 & 8 \end{pmatrix} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{1-я строка матрицы } A \text{ прикладывается} \\ \text{к первому столбцу матрицы } B, \\ \text{соответствующие элементы перемножаются,} \\ \text{а произведения складываются} \end{array} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} \boxed{1 \cdot 3 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 7} & 1 \cdot 4 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 5 + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 8 \\ 1 \cdot 3 + 0 \cdot 6 + (-1) \cdot 7 & 1 \cdot 4 + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot 5 + 0 \cdot (-2) + (-1) \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & 7 & 25 \\ -4 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Произведением BA не существует, так как число столбцов матрицы B не совпадает с числом строк матрицы A ($3 \neq 2$). ●

Умножение матриц.

Пример

а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 11 \\ 2 & 17 \end{pmatrix}$, 3 столбца=3 строкам, (2×2) -новая матрица;

б) $\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & -7 & 35 \\ 15 & -1 & 20 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 2 столбца=2 строкам, (3×3) -новая матрица;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 8 & 13 & 14 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (1 \ 15 \ 6)$, 3 столбца $\neq$ 1 строке- перемножать матрицы нельзя.