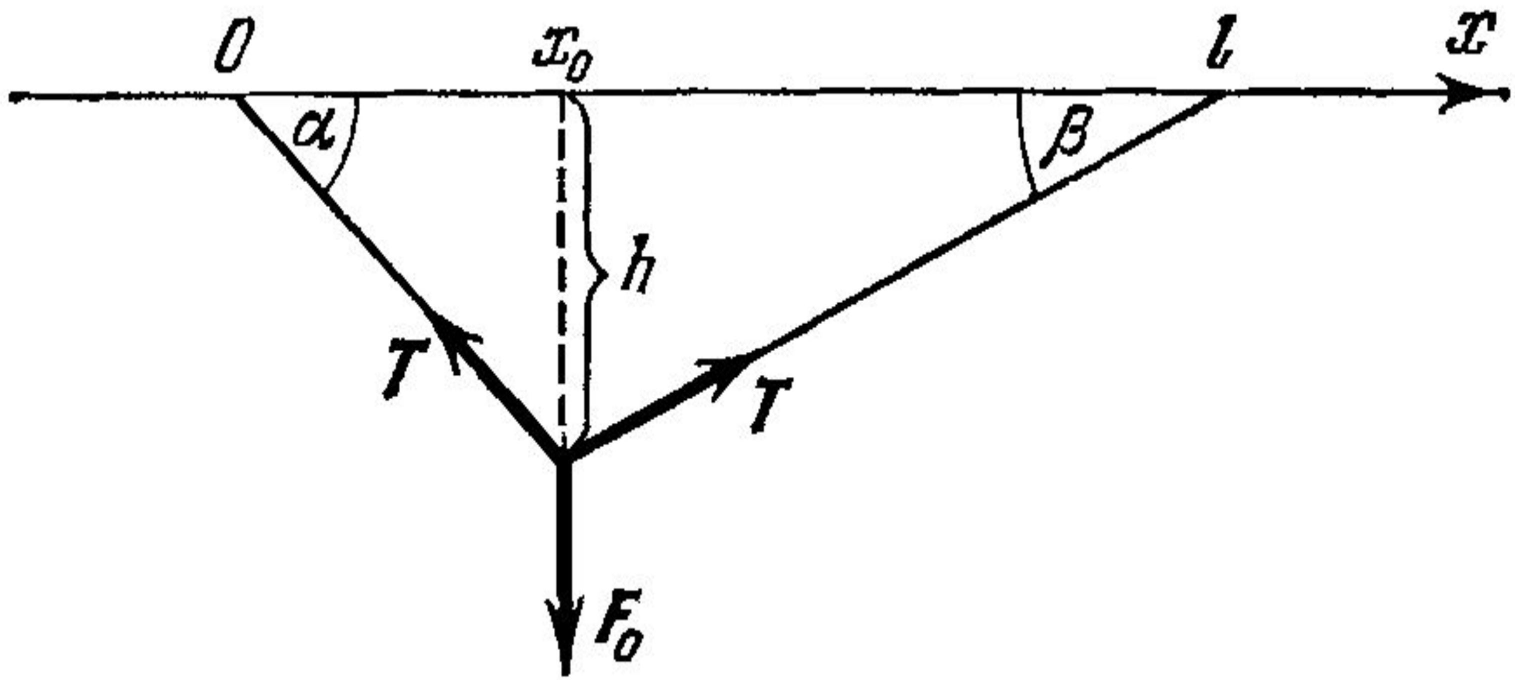
Математические методы моделирования и прогнозирования

Расчетные задания

к лабораторным работам

1. Собственные колебания струны.

Задание: Найти колебания струны с жестко закрепленными концами при $x = 0$ и $x = l$. Начальные отклонения изображены на рисунке. Начальные скорости равны нулю.



1. Собственные колебания струны.

Решение краевой задачи

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\,, \qquad 0 < x < l, \qquad t > 0$$

для струны с закрепленными концами:

$$u(0,t) = 0, \qquad u(l,t) = 0, \qquad t \geq 0$$

и начальными условиями

$$u(x,0) = \frac{hx}{x_0}, \qquad 0 \leq x \leq x_0;$$

$$u(x,0) = \frac{h(l-x)}{l-x_0}, \qquad x_0 \leq x \leq l;$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0\,, \qquad 0 \leq x \leq l$$

1. Собственные колебания струны.

имеет вид сходящегося ряда

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{k\pi a t}{l}\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi a t}{l}\right) \right) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right).$$

Коэффициенты разложения определяются начальными условиями

$$b_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^l \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) dx = 0,$$

т.к.

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0\,, \qquad\qquad 0 \le x \le l;$$

1. Собственные колебания струны.

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l u(x,0)\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)dx =$$

$$\frac{2}{l}\int_0^{x_0}\frac{hx}{x_0}\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)dx + \frac{2}{l}\int_{x_0}^{l}\frac{h(l-x)}{l-x_0}\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)dx =$$

$$\frac{2hl^2}{\pi^2 x_0(l-x_0)k^2}\sin\left(\frac{k\pi x_0}{l}\right).$$

1. Собственные колебания струны.

Окончательное решение можно представить в виде:

$$u(x,t) = \frac{2hl^2}{\pi^2 x_0 (l - x_0)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin\left(\frac{k\pi x_0}{l}\right) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{k\pi a t}{l}\right).$$

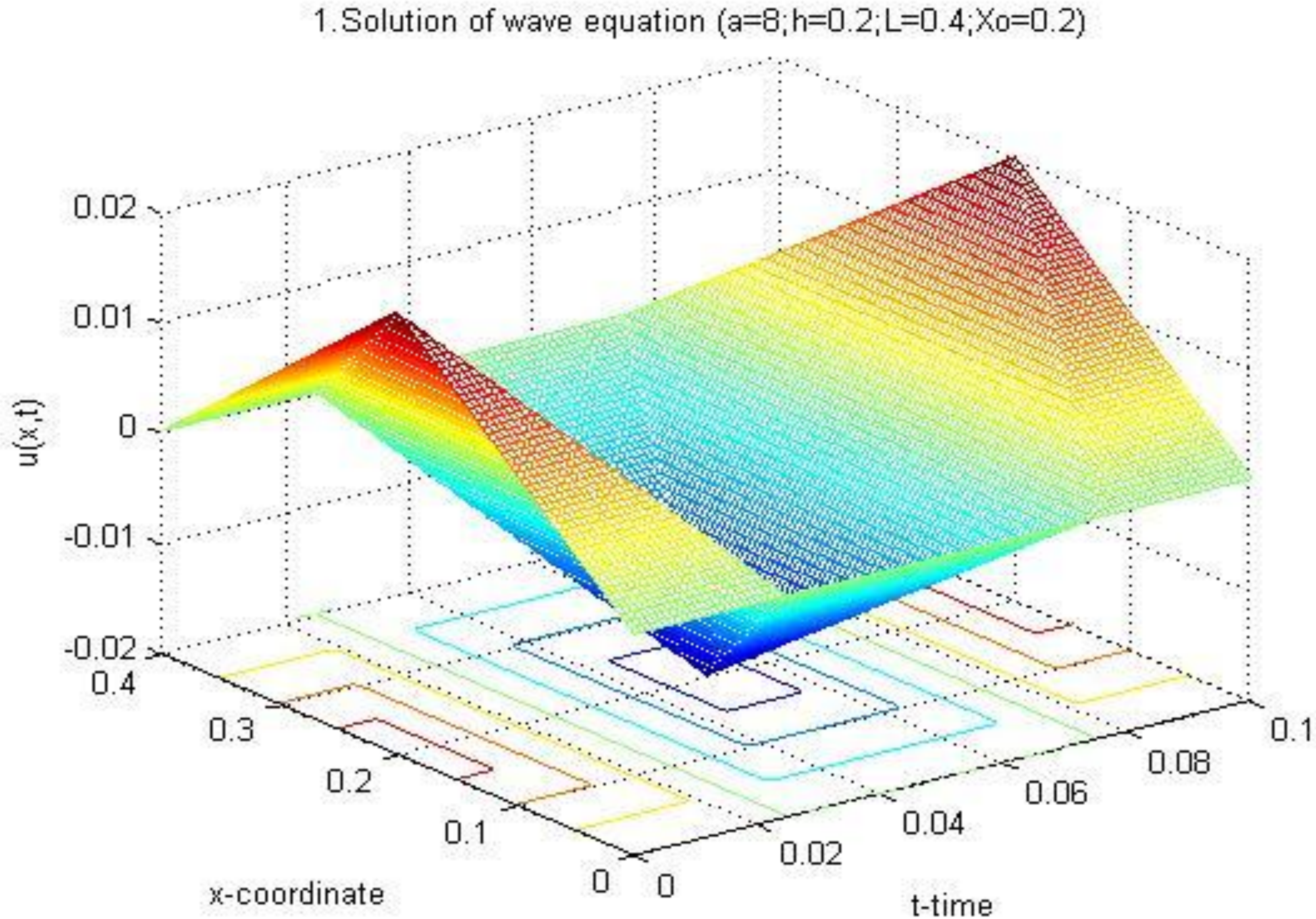
Построим график этой функции.

Вычисления выполним в системе MATLAB:

1. Собственные колебания струны.

```
a=8;h=0.02;xm=0.4;x0=0.2;dx=0.004;tm=0.1;dt=0.001;
au=2*h*(xm/pi)^2/x0/(xm-x0);b0=pi*x0/xm;b1=pi/xm;b2=b1*a;
x=0:dx:xm;
t=0:dt:tm;
[t,x]=meshgrid(t,x);
u=au*sin(b0)*sin(b1*x).*cos(b2*t);k=1;
while k<100
k=k+1;
u=u+au/k^2*sin(b0*k)*sin(b1*k*x).*cos(b2*k*t);
end;
meshc(t,x,u);
title(['1.Solution of wave equation (a=8;h=0.2;L=0.4;Xo=0.2)']);
xlabel('t-time');
ylabel('x-coordinate');
zlabel('u(x,t)');
```

1. Собственные колебания струны.



2. Собственные колебания однородного стержня.

Задание: Найти продольные колебания упругого стержня со свободными концами, получившего в начальный момент времени продольный импульс I в один из концов.

Решение краевой задачи для стержня со свободными концами

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < l, \qquad t > 0;$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x), \qquad 0 \le x \le l;$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0, \qquad t > 0$$

имеет вид сходящегося ряда:

2. Собственные колебания однородного стержня.

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{k\pi at}{l}\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi at}{l}\right) \right) \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right).$$

Коэффициенты разложения

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_0^l \varphi(x)\, dx; \quad b_0 = \frac{t}{l} \int_0^l \psi(x)\, dx;$$

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) dx, \qquad k = 1, 2, \cdots \;;$$

$$b_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^l \psi(x) \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) dx, \qquad k = 1, 2, \cdots \;;$$

2. Собственные колебания однородного стержня.

определяются начальными условиями:

$$\varphi(x) = 0, \qquad 0 \le x \le l;$$

$$\psi(x) = 0, \qquad 0 \le x \le l - \delta;$$

$$\psi(x) = -\frac{I}{\rho\delta}, \qquad l - \delta < x \le l;$$

$$\delta \to 0.$$

Из определения импульса стержня единичной длины

$$p = \rho\frac{\partial u}{\partial t} \qquad \text{имеем} \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{p}{\rho}.$$

2. Собственные колебания однородного стержня.

В начальный момент времени $t = 0$ импульсом I обладал участок стержня $l - \delta < x \leq l$ длиной $\delta \to 0$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x) = -\frac{I}{\rho\delta}, \qquad l - \delta < x \leq l,$$

где знак минус указывает на направление распространения импульса, противоположное направлению оси x, в начальный момент времени.

2. Собственные колебания однородного стержня.

Теперь, зная $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, можно вычислить коэффициенты разложения:

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right)dx = 0, \qquad k = 0, 1, 2, \cdots;$$

$$b_0 = \frac{t}{l}\int_{l-\delta}^{l}\left(-\frac{I}{\rho\delta}\right)dx = -\frac{It}{\rho l},$$

2. Собственные колебания однородного стержня.

$$b_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^l \psi(x)\cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right)dx =$$

$$\frac{2}{k\pi a}\int_{l-\delta}^{l}\left(-\frac{I}{\rho\delta}\right)\cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right)dx =$$

$$-\frac{2I}{k\pi a\rho\delta}\frac{l}{k\pi}\left[\sin\left(\frac{k\pi l}{l}\right)-\sin\left(\frac{k\pi(l-\delta)}{l}\right)\right] =$$

$$-\frac{2I}{k\pi a\rho\delta}\frac{l}{k\pi}2\sin\left(\frac{k\pi\delta}{2l}\right)\cos\left(\frac{k\pi(2l-\delta)}{2l}\right)$$

для всех $k = 1, 2, \cdots.$

2. Собственные колебания однородного стержня.

Нас же интересует предел этого выражения при $\delta \to 0$:

$$\lim_{\delta\to 0}\left[-\frac{2I}{k\pi a\rho\delta}\frac{l}{k\pi}2\sin\left(\frac{k\pi\delta}{2l}\right)\cos\left(\frac{k\pi(2l-\delta)}{2l}\right)\right] = -\frac{2I(-1)^k}{k\pi a\rho}.$$

Окончательное решение можно представить в виде:

$$u(x,t) = -\frac{It}{\rho l} - \frac{2I}{\pi a\rho}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{k\pi at}{l}\right).$$

2. Собственные колебания однородного стержня.

Полученное решение указывает на то, что стержень, получивший продольный импульс I, будет испытывать как колебательные движения, так и поступательное движение со скоростью, равной

$$\frac{I}{\rho l}$$

в направлении, совпадающим с направлением импульса.

Построим график полученной функции $u(x, t)$.

Вычисления выполним в системе MATLAB:

2. Собственные колебания однородного стержня.

```
a=5930;p=7800;I=0.5;xm=0.02;dx=0.0002;tm=0.00001;dt=0.0000001;
x=0:dx:xm;
t=0:dt:tm;
[t,x]=meshgrid(t,x);
u=-I*t/p/xm;z=1;
k=0;while k<1000
k=k+1;z=-z;
u=u-2*I/pi/a/p*z/k*sin(pi/xm*a*k*t).*cos(pi/xm*k*x);
end;
figure
surf(t,x,u);
title(['2.Solution of wave equation (a=5930;p=7800;I=0.5)']);
xlabel('t-time');
ylabel('x-coordinate');
zlabel('u(x,t)');
```

2. Собственные колебания однородного стержня.