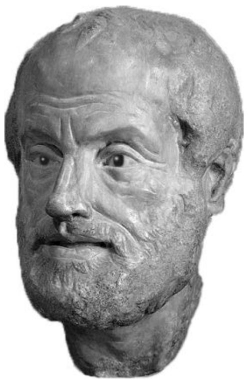
Логические основы компьютеров

Логические основы компьютеров

3.1 Логика и компьютер

Логика, высказывания

Логика (др.греч. *λογικος*) – это наука о том, как правильно рассуждать, делать выводы, доказывать утверждения.



Аристотель (384-322 до н.э.)

Формальная логика отвлекается от конкретного содержания, изучает только истинность и ложность высказываний.

Логическое высказывание – это повествовательное предложение, относительно которого можно однозначно сказать, истинно оно или ложно.

Высказывание или нет?

- ✓ Сейчас идет дождь.
- ✓ Жирафы летят на север.
- ~~История – интересный предмет~~.
- ✓ У квадрата – 10 сторон и все разные.
- Красиво!
- В городе N живут 2 миллиона человек.
- Который час?

Логика и компьютер

Двоичное кодирование – все виды информации кодируются с помощью 0 и 1.

Задача – разработать оптимальные правила обработки таких данных.

Почему «логика»?
Результат выполнения операции можно представить как истинность (1) или ложность (0) некоторого высказывания.

Джордж Буль разработал основы алгебры, в которой используются только 0 и 1 (алгебра логики, булева алгебра).

Логические основы компьютеров

3.2 Логические операции

Обозначение высказываний

A – Сейчас идет дождь.
B – Форточка открыта.

простые высказывания (элементарные)

! **Любое высказывание может быть ложно (0) или истинно (1).**

Составные высказывания строятся из простых с помощью логических связок (операций) «**и**», «**или**», «**не**», «**если … то**», «**тогда и только тогда**» и др.

A и B	Сейчас идет дождь и открыта форточка.
A или не B	Сейчас идет дождь или форточка закрыта.
если A, то B	Если сейчас идет дождь, то форточка открыта.
A тогда и только тогда, когда B	Дождь идет тогда и только тогда, когда открыта форточка.

Операция НЕ (инверсия)

Если высказывание **A** истинно, то «**не A**» ложно, и наоборот.

A	не A
0	1
1	0

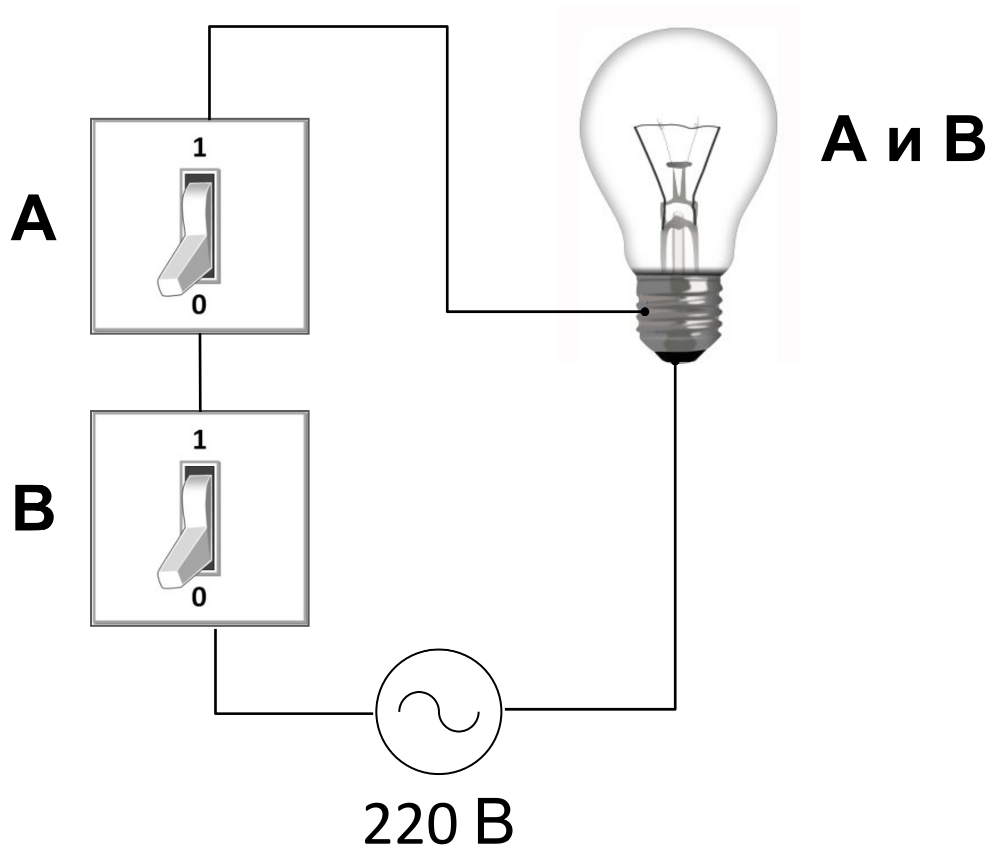
также $\overline{\mathbf{A}}$, $\neg\mathbf{A}$, **not A** (Паскаль), **! A** (Си)

таблица истинности операции НЕ

Таблица истинности логического выражения X – это таблица, где в левой части записываются все возможные комбинации значений исходных данных, а в правой – значение выражения X для каждой комбинации.

Операция И

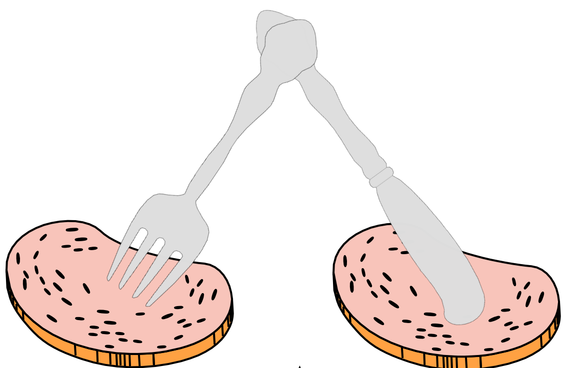
Высказывание «**А и В**» истинно тогда и только тогда, когда **А** и **В** истинны одновременно.



Операция И (логическое умножение, конъюнкция)

	A	B	A и B
0	0	0	0
1	0	1	0
2	1	0	0
3	1	1	1

также: **A·B**, **A ∧ B**, **A and B** (Паскаль), **A && B** (Си)

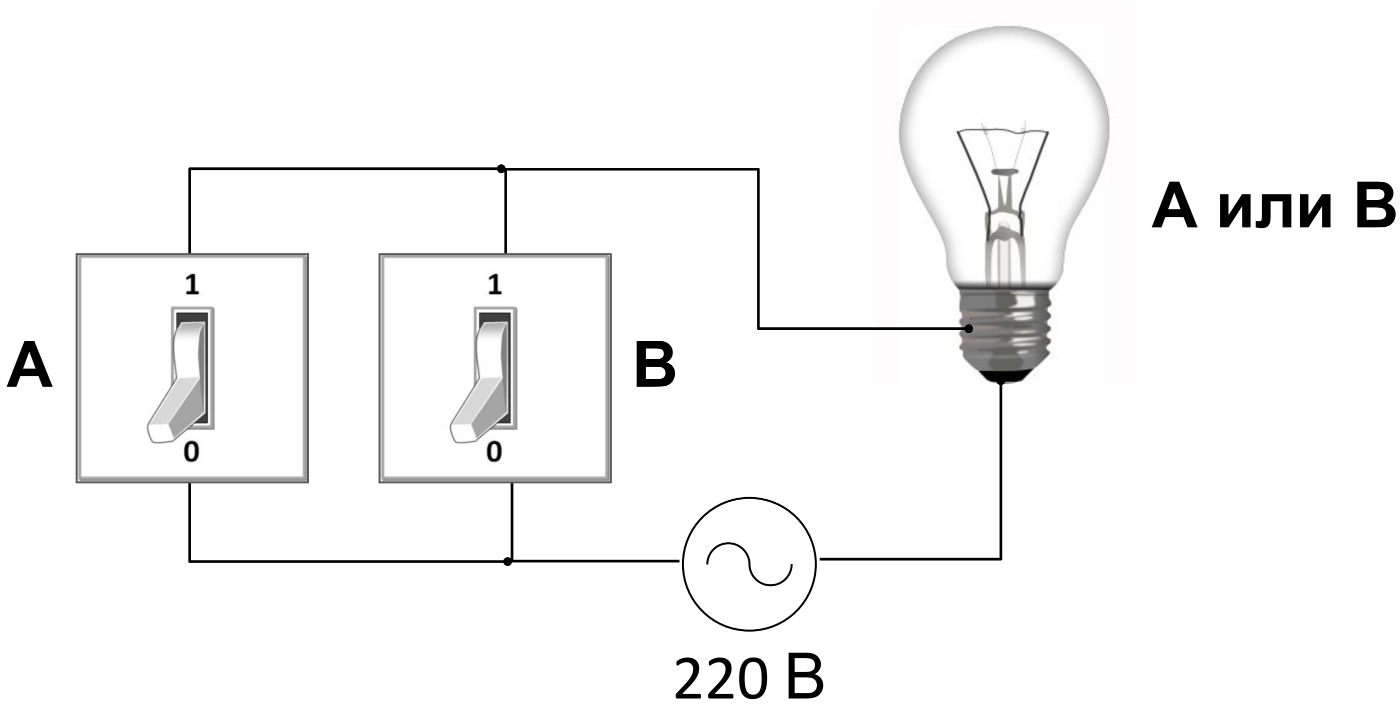


A ∧ B

конъюнкция – от лат. *conjunctio* — соединение

Операция ИЛИ (логическое сложение, дизъюнкция)

Высказывание «**А или В»** истинно тогда, когда истинно **А** или **В**, или оба вместе.



Операция ИЛИ (логическое сложение, дизъюнкция)

также: **A+B**, **A ∨ B**, **A or B** (Паскаль), **A || B** (Си)

A	B	A или B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

дизъюнкция – от лат. *disjunctio* — разъединение

Задачи

В таблице приведены запросы к поисковому серверу. Расположите номера запросов в порядке ***возрастания*** *количества страниц, которые найдет поисковый сервер по каждому запросу. Для обозначения логической операции «ИЛИ» в запросе используется символ |, а для логической операции «И» – &.*

1) **принтеры & сканеры & продажа**
2) **принтеры & продажа**
3) **принтеры | продажа**
4) **принтеры | сканеры | продажа**

1 2 3 4

Операция «исключающее ИЛИ»

Высказывание «**A ⊕ B**» истинно тогда, когда истинно **A** или **B**, но ***не оба одновременно*** (то есть **A ≠ B**).

A	B	A ⊕ B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

также:
A xor B (Паскаль),
A ^ B (Си)

арифметическое сложение, 1+1=2

остаток

сложение по модулю 2: A ⊕ B = (A + B) **mod** 2

Свойства операции «исключающее ИЛИ»

$A \oplus 0 = A$

$A \oplus 1 = \overline{A}$

$A \oplus A = 0$

$(A \oplus B) \oplus B = ?$

$$A \oplus B = A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B$$

A	B	$A \cdot \overline{B}$	$\overline{A} \cdot B$	$A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B$	$A \oplus B$
0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0

Импликация («если …, то …»)

Высказывание «**A → B**» истинно, если не исключено, что из **A** следует **B**.

A – «Работник хорошо работает».

B – «У работника хорошая зарплата».

A	B	A → B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$$A \to B = \overline{A} + B$$

Импликация («если …, то …»)

«Если Вася идет гулять, то Маша сидит дома».

A – «Вася идет гулять».

B – «Маша сидит дома».

$$A \rightarrow B = 1$$

A	B	A → B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

А если Вася не идет гулять?

Маша может пойти гулять (B=0), а может и не пойти (B=1)!

Эквивалентность («тогда и только тогда, …»)

Высказывание «**A** ↔ **B**» истинно тогда и только тогда, когда **A** и **B** равны.

A	B	A ↔ B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$A \leftrightarrow B = \overline{A \oplus B} = A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B}$$

Базовый набор операций

С помощью операций **И, ИЛИ** и **НЕ** можно реализовать любую логическую операцию.

И **ИЛИ** **НЕ**

базовый набор операций

? **Сколько всего существует логических операции с двумя переменными?**

Штрих Шеффера, «И-НЕ»

$$A \mid B = \overline{A \cdot B}$$

A	B	A | B
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Базовые операции через «И-НЕ»:

$$\overline{A} = A \mid A \qquad A \cdot B = \overline{A \mid B} = (A \mid B) \mid (A \mid B)$$

$$A + B = \overline{A} \mid \overline{B} = (A \mid A) \mid (B \mid B)$$

Стрелка Пирса, «ИЛИ-НЕ»

$$A \downarrow B = \overline{A + B}$$

A	B	A | B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Базовые операции через «ИЛИ-НЕ»:

Самостоятельно…

Формализация

Прибор имеет три датчика и может работать, если два из них исправны. Записать в виде формулы ситуацию «авария».

A – «Датчик № 1 неисправен».

B – «Датчик № 2 неисправен».

C – «Датчик № 3 неисправен».

Аварийный сигнал:

X – «Неисправны два датчика».

X – «Неисправны датчики № 1 **и** № 2» **или**
«Неисправны датчики № 1 **и** № 3» **или**
«Неисправны датчики № 2 **и** № 3».

Формализация – это переход к записи на формальном языке!

$$X = A \cdot B + A \cdot C + B \cdot C$$

логическая формула

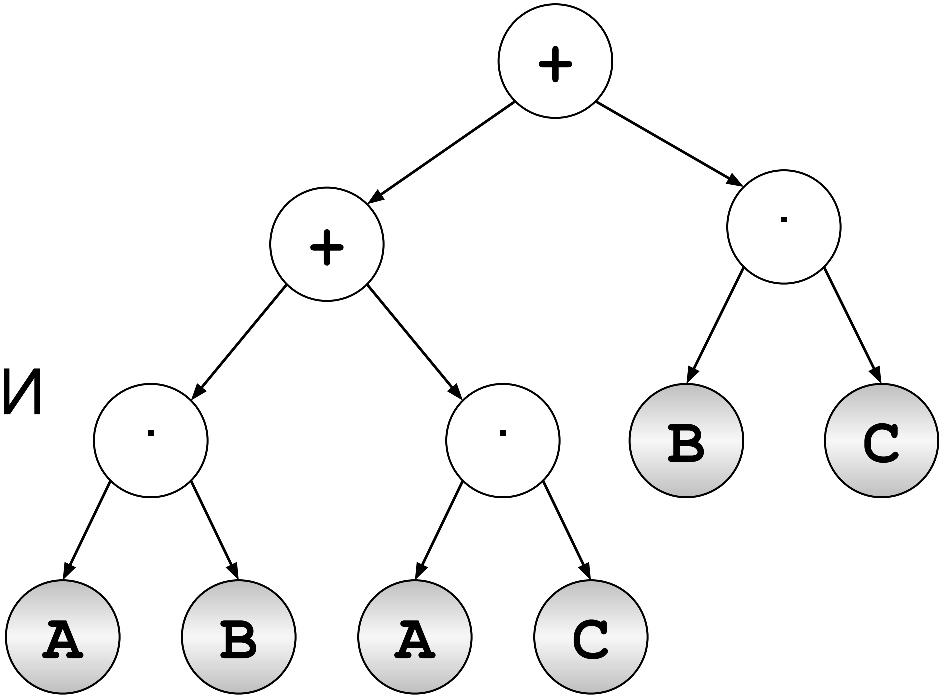
Вычисление логических выражений

$$\overset{1}{} \quad \overset{4}{} \quad \overset{2}{} \quad \overset{5}{} \quad \overset{3}{}$$

$$X = A \cdot B + A \cdot C + B \cdot C$$

Порядок вычислений:

- скобки
- НЕ
- И
- ИЛИ, исключающее ИЛИ
- импликация
- эквивалентность



Составление таблиц истинности

$$X = A \cdot B + \overline{A} \cdot B + \overline{B}$$

	A	B	$A \cdot B$	$\overline{A} \cdot B$	$\overline{B}$	X
0	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1
2	1	0	0	0	1	1
3	1	1	1	0	0	1

Логические выражения могут быть:

- **тождественно истинными** (всегда 1, тавтология)
- **тождественно ложными** (всегда 0, противоречие)
- **вычислимыми** (зависят от исходных данных)

Составление таблиц истинности

$$X = A \cdot B + A \cdot C + B \cdot C$$

	A	B	C	A·B	A·C	B·C	X
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0
3	0	1	1	0	0	1	1
4	1	0	0	0	0	0	0
5	1	0	1	0	1	0	1
6	1	1	0	1	0	0	1
7	1	1	1	1	1	1	1

Задачи (таблица истинности)

Символом F обозначено одно из указанных ниже логических выражений от трех аргументов: X, Y, Z. Дан фрагмент таблицы истинности выражения F. Какое выражение соответствует F?

X	*Y*	*Z*	*F*
1	0	0	1
0	0	0	1
1	1	1	0

1) **¬X ∧ ¬Y ∧ ¬Z**
2) **X ∧ Y ∧ Z**
3) **X ∨ Y ∨ Z**
4) **¬X ∨ ¬Y ∨ ¬Z**

1) $\overline{X} \cdot \overline{Y} \cdot \overline{Z}$
2) $X \cdot Y \cdot Z$
3) $X + Y + Z$
4) $\overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z}$

Логические основы компьютеров

3.3 Диаграммы

Диаграммы Венна (круги Эйлера)

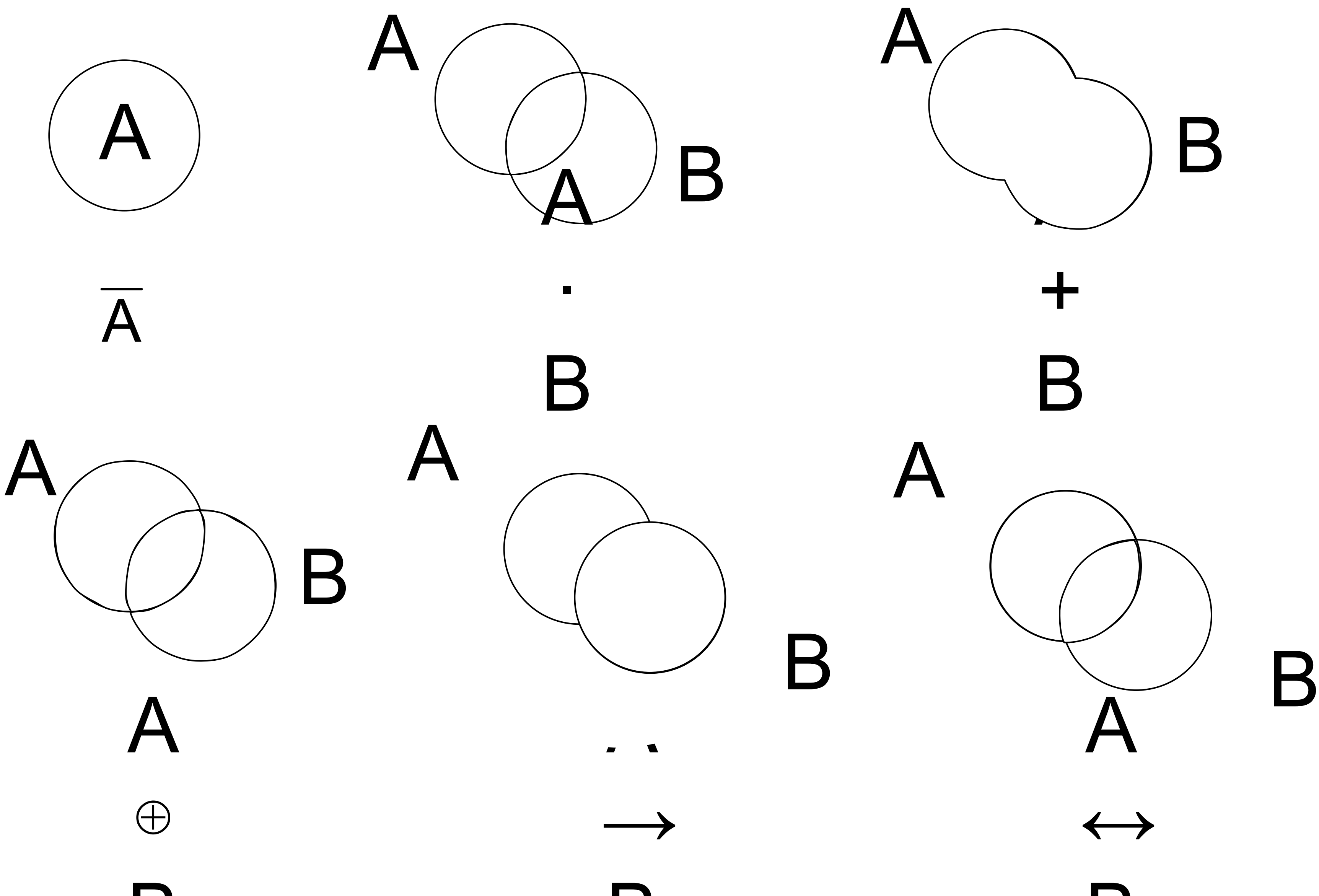
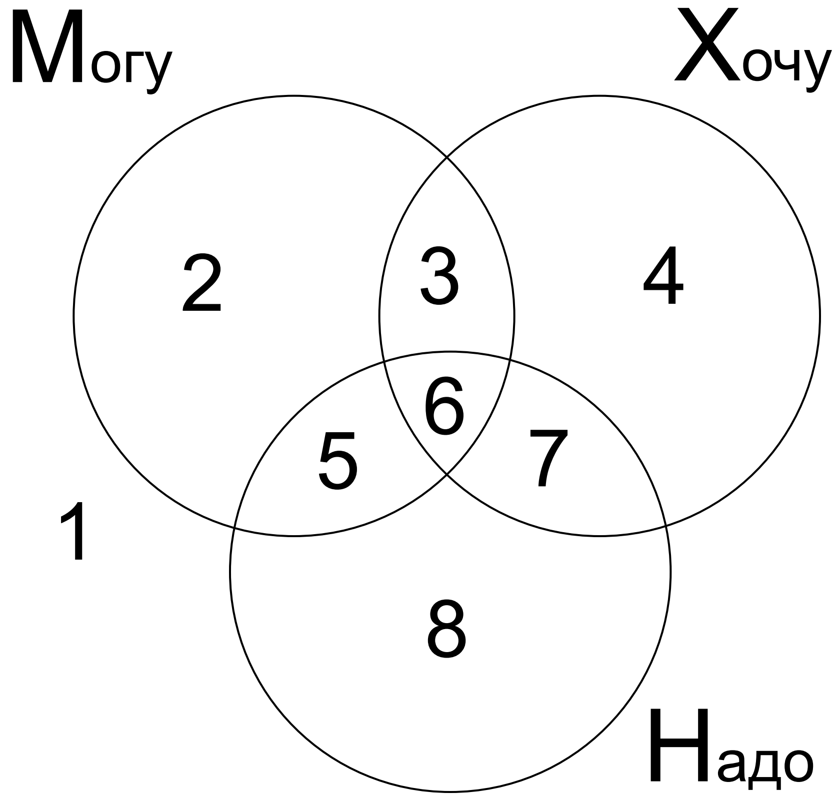


Диаграмма с тремя переменными



$1 = \overline{М} \cdot \overline{Х} \cdot \overline{Н}$

$2 = М \cdot \overline{Х} \cdot \overline{Н}$

$3 = М \cdot Х \cdot \overline{Н}$

$4 = \overline{М} \cdot Х \cdot \overline{Н}$

$5 = М \cdot \overline{Х} \cdot Н$

$6 = М \cdot Х \cdot Н$

$7 = \overline{М} \cdot Х \cdot Н$

$8 = \overline{М} \cdot \overline{Х} \cdot Н$

$3 + 4 = М \cdot Х \cdot \overline{Н} + \overline{М} \cdot Х \cdot \overline{Н}$

$3 + 4 = Х \cdot \overline{Н}$

! Логические выражения можно упрощать!

Задачи

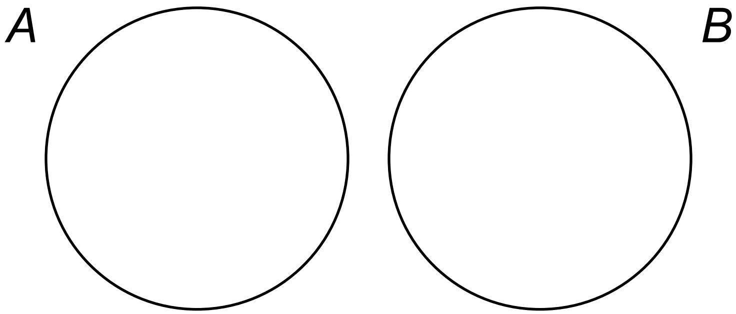
Известно количество сайтов, которых находит поисковый сервер по следующим запросам :

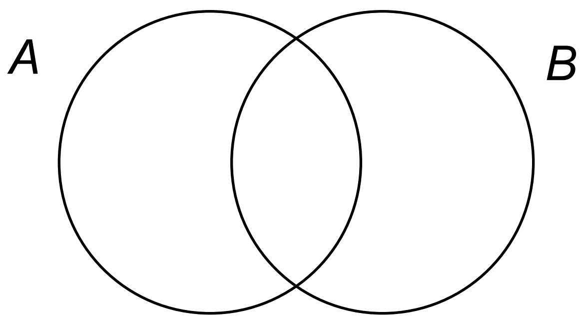
Ключевое слово	***Количество сайтов***
огурцы	*100*
помидоры	*200*
огурцы & помидоры	*50*

Сколько сайтов будет найдено по запросу

огурцы | помидоры

Задачи





$$N_{A+B} =$$

50

`огурцы & помидоры`

$$N_{A+B} = N_A + N_B - N_{A \cdot B}$$

`огурцы | помидоры`

250

`огурцы`

100

`помидоры`

200

Задачи

Некоторый сегмент сети Интернет состоит из 1000 сайтов. Поисковый сервер в автоматическом режиме составил таблицу ключевых слов для сайтов этого сегмента. Вот ее фрагмент:

Ключевое слово	**Количество сайтов, для которых данное слово является ключевым**
сканер	*200*
принтер	*250*
монитор	*450*

Сколько сайтов будет найдено по запросу

`(принтер | сканер) & монитор`

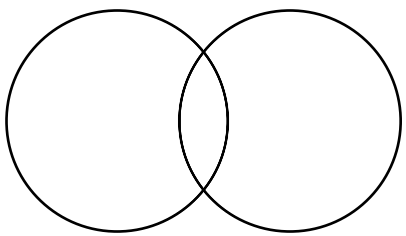
если по трем следующим запросам найдено:

`принтер | сканер` *– 450 сайтов,*
`принтер & монитор` *– 40 сайтов*
`сканер & монитор` *– 50 сайтов.*

Задачи ЕГЭ (5)

`(принтер | сканер) & монитор = ?`

A (сканер) B (принтер)



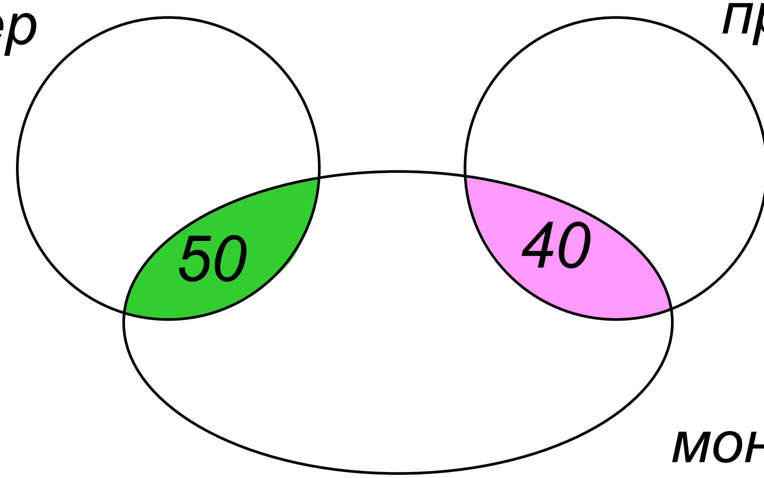
450 `принтер | сканер`

$$N_{A+B} = N_A + N_B - N_{A \cdot B}$$

0

`сканер` 200 `принтер` 250

сканер принтер



монитор

`принтер & монитор = 40`

`сканер & монитор = 50`

40 + 50 = **90**

Логические основы компьютеров

3.4 Упрощение логических выражений

Законы алгебры логики

название	для И	для ИЛИ
двойного отрицания	$\overline{\overline{A}} = A$	
исключения третьего	$A \cdot \overline{A} = 0$	$A + \overline{A} = 1$
операции с константами	$A \cdot 0 = 0, \quad A \cdot 1 = A$	$A + 0 = A, \quad A + 1 = 1$
повторения	$A \cdot A = A$	$A + A = A$
поглощения	$A \cdot (A + B) = A$	$A + A \cdot B = A$
переместительный	$A \cdot B = B \cdot A$	$A + B = B + A$
сочетательный	$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$	$A + (B + C) = (A + B) + C$
распределительный	$A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$	$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
законы де Моргана	$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$	$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

Упрощение логических выражений

Шаг 1. Заменить операции ⊕→↔ на их выражения через **И**, **ИЛИ** и **НЕ**:

$$A \oplus B = A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B$$

$$A \to B = \overline{A} + B$$

$$A \leftrightarrow B = A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B}$$

Шаг 2. Раскрыть инверсию сложных выражений по формулам де Моргана:

$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B} \qquad \overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

Шаг 3. Используя законы логики, упрощать выражение, стараясь применять закон исключения третьего.

Упрощение логических выражений

$$Q = M \cdot X \cdot \overline{H} + \overline{M} \cdot X \cdot \overline{H} = (M + \overline{M}) \cdot X \cdot \overline{H} = X \cdot \overline{H}$$

$$X = (B \to A) \cdot \overline{(A + B)} \cdot (A \to C)$$

$$= (\overline{B} + A) \cdot \overline{(A + B)} \cdot (\overline{A} + C)$$

$$= (\overline{B} + A) \cdot \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot (\overline{A} + C)$$

$$= (\overline{B} \cdot \overline{A} + A \cdot \overline{A}) \cdot \overline{B} \cdot (\overline{A} + C)$$

$$= \overline{B} \cdot \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot (\overline{A} + C)$$

$$= \overline{B} \cdot \overline{A} \cdot (\overline{A} + C)$$

$$= \overline{B} \cdot \overline{A}$$

раскрыли →

формула де Моргана

распределительный

исключения третьего

повторения

поглощения

Задачи (упрощение)

Какое логическое выражение равносильно выражению

A ∧ ¬(¬B ∨ C) *?*

1) **¬A ∨ ¬B ∨ ¬C**
2) **A ∧ ¬B ∧ ¬C**
3) **A ∧ B ∧ ¬C**
4) **A ∧ ¬B ∧ C**

1) $\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$
2) $A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$
3) $A \cdot B \cdot \overline{C}$
4) $A \cdot \overline{B} \cdot C$

$$A \cdot \overline{(\overline{B} + C)} = A \cdot \overline{\overline{B}} \cdot \overline{C} = A \cdot B \cdot \overline{C}$$

Логические уравнения

$$\overline{A}\cdot B + A\cdot\overline{B}\cdot C = 1$$

A=1, B=0, C=1

$$\overline{A}\cdot B = 1$$

или

$$A\cdot\overline{B}\cdot C = 1$$

A=0, B=1, C – **любое**
2 решения: (0, 1, 0), (0, 1, 1)

! Всего 3 решения!

$$K\cdot L + M\cdot L\cdot N + K\cdot L\cdot\overline{M} = 1$$

K=1, L=1,
M и N – **любые**
4 решения

M=1, L=1, N=1,
K – **любое**
2 решения

K=1, L=1, M=0,
N – **любое**
2 решения

$$L\cdot(K + M\cdot N) = 1$$

! Всего 5 решений!

Логические основы компьютеров

3.5 Синтез логических выражений

Синтез логических выражений

A	B	X	
0	0	1 •	$\overline{A} \cdot \overline{B}$
0	1	1 •	$\overline{A} \cdot B$
1	0	0	
1	1	1 •	$A \cdot B$

Шаг 1. Отметить строки в таблице, где **X = 1**.

Шаг 2. Для каждой из них записать логическое выражение, которое истинно только для этой строки.

Шаг 3. Сложить эти выражения и упростить результат.

$$X = \overline{A} \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B + A \cdot B \underbrace{=}_{\text{распределительный}} \overline{A} \cdot (\overline{B} + B) + A \cdot B$$

$$\underbrace{=}_{\text{исключения третьего}} \overline{A} + A \cdot B \underbrace{=}_{\text{распределительный}} (\overline{A} + A) \cdot (\overline{A} + B) \underbrace{=}_{\text{исключения третьего}} \overline{A} + B$$

Синтез логических выражений (2 способ)

A	B	X	
0	0	1	
0	1	1	
1	0	0	$A \cdot \overline{B}$
1	1	1	

Шаг 1. Отметить строки в таблице, где **X = 0**.

Шаг 2. Для каждой из них записать логическое выражение, которое истинно только для этой строки.

Шаг 3. Сложить эти выражения и упростить результат, который равен $\overline{X}$.

Шаг 4. Сделать инверсию.

$$\overline{X} = A \cdot \overline{B} \;\Rightarrow\; X = \overline{A \cdot \overline{B}} = \overline{A} + B$$

Когда удобнее применять 2-ой способ?

Синтез логических выражений (3 способ)

A	B	X	
0	0	0 •	$A+B$
0	1	1	
1	0	0 •	$\overline{A}+B$
1	1	1	

Шаг 1. Отметить строки в таблице, где **X = 0**.

Шаг 2. Для каждой из них записать логическое выражение, которое **ложно** только для этой строки.

Шаг 3. **Перемножить** эти выражения и упростить результат.

$$X=(A+B)\cdot(\overline{A}+B)\;=A\cdot\overline{A}+B\cdot\overline{A}+A\cdot B+B\cdot B$$

$$=B\cdot(\overline{A}+A)+B=B$$

Синтез логических выражений

A	B	C	X	
0	0	0	1	$\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$
0	0	1	1	$\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C$
0	1	0	1	$\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}$
0	1	1	1	$\overline{A}\cdot B\cdot C$
1	0	0	0	
1	0	1	1	$A\cdot\overline{B}\cdot C$
1	1	0	0	
1	1	1	1	$A\cdot B\cdot C$

$$X=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C$$
$$+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot B\cdot C$$
$$+A\cdot\overline{B}\cdot C+A\cdot B\cdot C$$
$$=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot(\overline{C}+C)$$
$$+\overline{A}\cdot B\cdot(\overline{C}+C)$$
$$+A\cdot C\cdot(\overline{B}+B)$$
$$=\overline{A}\cdot\overline{B}+\overline{A}\cdot B+A\cdot C$$
$$=\overline{A}\cdot(\overline{B}+B)+A\cdot C$$
$$=\overline{A}+A\cdot C$$
$$=(\overline{A}+A)\cdot(\overline{A}+C)=\boxed{\overline{A}+C}$$

Синтез логических выражений (2 способ)

A	B	C	X	
0	0	0	1	
0	0	1	1	
0	1	0	1	
0	1	1	1	
1	0	0	0	$A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$
1	0	1	1	
1	1	0	0	$A \cdot B \cdot \overline{C}$
1	1	1	1	

$$\overline{X} = A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + A \cdot B \cdot \overline{C}$$

$$= A \cdot \overline{C} \cdot (\overline{B} + B)$$

$$= A \cdot \overline{C}$$

$$X = \overline{A \cdot \overline{C}} = \boxed{\overline{A} + C}$$

3-й способ – самостоятельно.

Логические основы компьютеров

3.6 Предикаты и кванторы

Предикаты

Предикат (логическая функция) – это утверждение, содержащее переменные.

Предикат-свойство – от одной переменной:

P(*N*) = «В городе *N* живут более 2 млн человек»

P(Москва) = 1

P(Якутск) = 0

Простое(x) = «x – простое число»

Спит(x) = «x всегда спит на уроке»

Предикат-отношение – от нескольких переменных:

Больше(x, y) = «$x > y$»

Живет(x, y) = «x живет в городе y»

Любит(x, y) = «x любит y»

Предикаты и кванторы

Предикаты задают **множества:**

$$P(x) = (x > 0)$$

$$P(x, y) = (x + y = 1)$$

Предикаты, которые **всегда истинны**:

$P(x) = (x^2 \geq 0)$ для всех вещественных чисел

«Для любого допустимого x утверждение $P(x)$ истинно»:

квантор

$$\forall x \, P(x)$$

высказывание

Квантор – знак, обозначающий количество.

$\forall = A$ (*all* – все) $\exists = E$ (*exists* – существует)

Кванторы

Какой квантор использовать?

« … ∀ моря соленые».

« … ∃ кошки серые».

« … ∃ числа чётные».

« … ∀ окуни – рыбы».

« … ∃ прямоугольники – квадраты».

« … ∀ квадраты – прямоугольники».

Истинно ли высказывание?

$\cancel{\forall x\ P(x) \text{ при } P(x) = (x > 0)}$

✓ $\exists x\ P(x)$ при $P(x) = (x > 0)$

✓ $\forall x\ P(x)$ при $P(x) = (x^2 \geq 0)$

✓ $\exists x\ P(x)$ при $P(x) = (x^2 \geq 0)$

Кванторы

Дано:

A = «Все люди смертны» = 1.

B = «Сократ – человек» = 1.

Доказать:

C = «Сократ смертен» = 1.

Доказательство:

A	B	A → B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

P(x) = «x – человек» Q(x) = «x – смертен»

A = 1: $\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x))$

при «x =Сократ» $P(\text{Сократ}) \rightarrow Q(\text{Сократ}) = 1$

B = 1: $P(\text{Сократ}) = 1$

по свойствам импликации $Q(\text{Сократ}) = 1$

Несколько кванторов

Квантор **связывает** одну переменную:

$\forall x\, \mathrm{P}(x, y)$ – предикат от переменной y

$\exists y\, \mathrm{P}(x, y)$ – предикат от переменной x

Два квантора связывают две переменных:

$\forall x\, \exists y\, \mathrm{P}(x, y)$ – высказывание «для любого x существует y, при котором $\mathrm{P}(x,y)=1$»

$\exists x\, \forall y\, \mathrm{P}(x, y)$ – высказывание «существует x, такой что при любом y верно $\mathrm{P}(x,y)=1$»

Сравните два последних высказывания при:

$$\mathrm{P}(x, y) = (x + y = 0) \qquad \mathrm{P}(x, y) = (x \cdot y = 0)$$

Отрицание

НЕ «для любого x выполняется Р(x)» ⇔ «существует x, при котором не выполняется Р(x)»

$$\overline{\forall x\, \mathrm{P}(x)} = \exists x\, \overline{\mathrm{P}(x)}$$

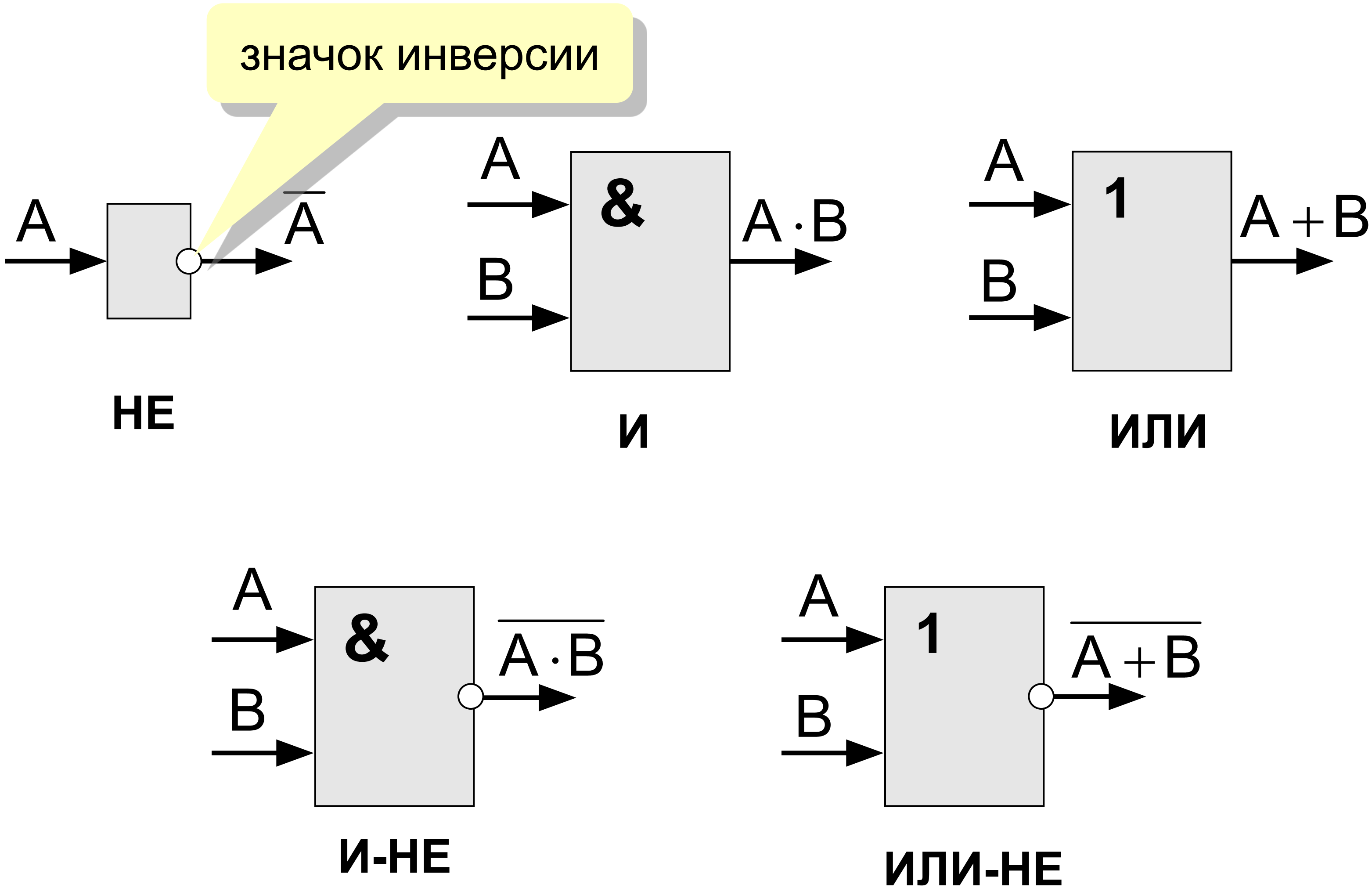
НЕ «существует x, при котором выполняется Р(x)» ⇔ «для любого x не выполняется Р(x)»

$$\overline{\exists x\, \mathrm{P}(x)} = \forall x\, \overline{\mathrm{P}(x)}$$

Логические основы компьютеров

3.7 Логические элементы компьютера

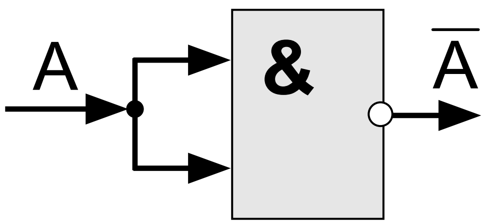
Логические элементы компьютера



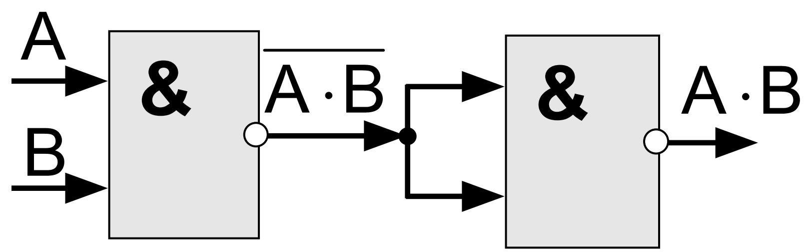
Логические элементы компьютера

Любое логическое выражение можно реализовать на элементах **И-НЕ** или **ИЛИ-НЕ.**

НЕ: $\overline{A} = \overline{A} + \overline{A} = \overline{A \cdot A}$

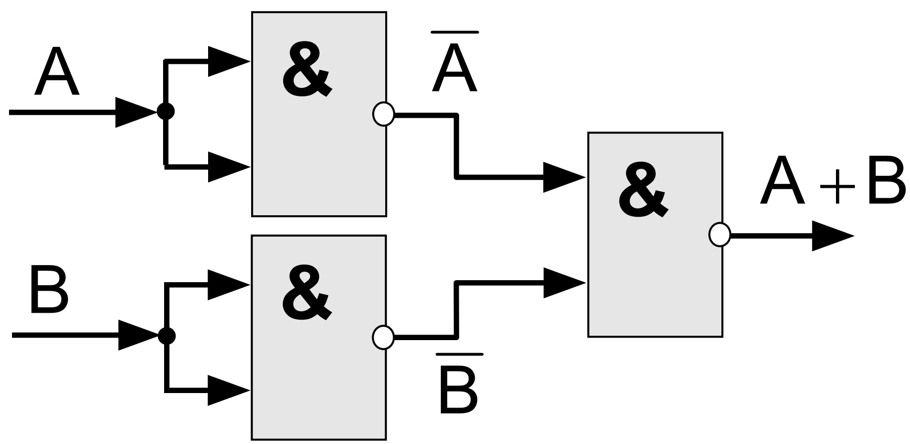


И: $A \cdot B = \overline{\overline{A \cdot B}}$



ИЛИ:

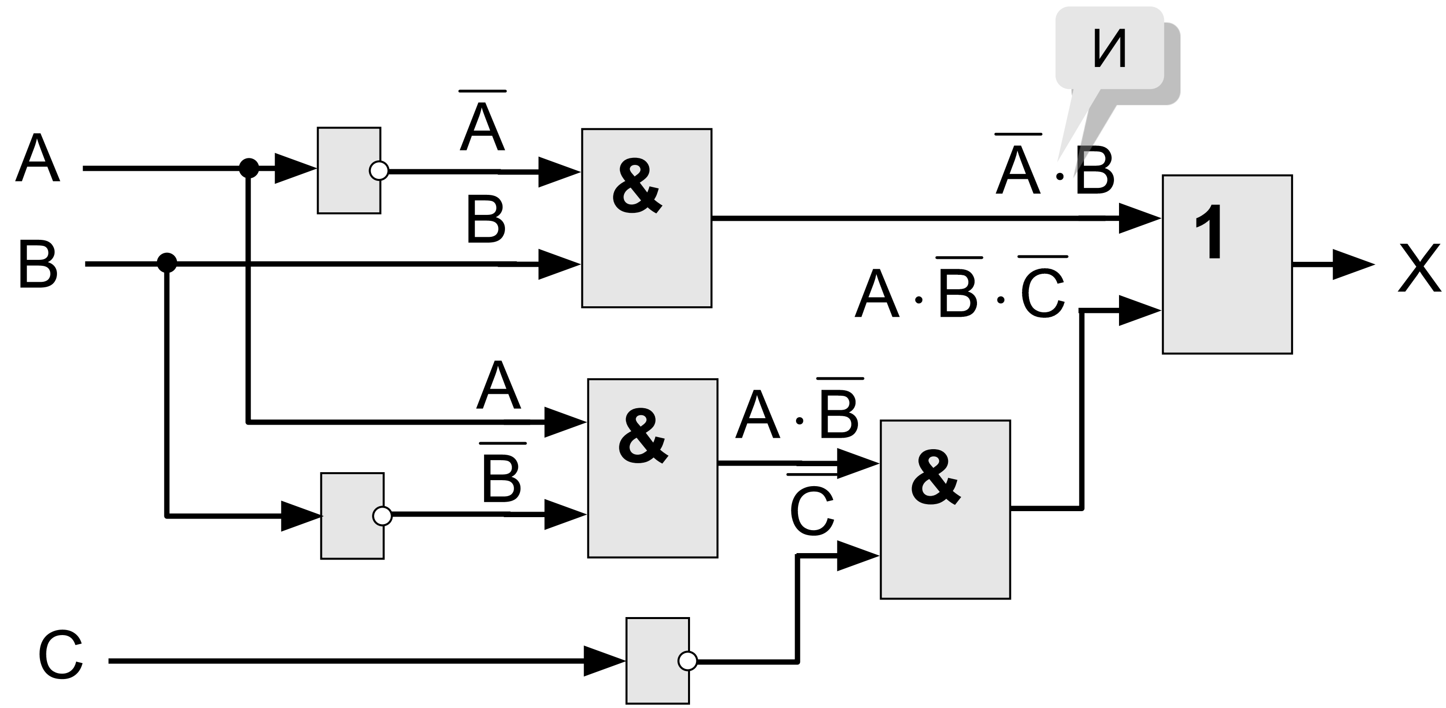
$A + B = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}}$



Составление схем

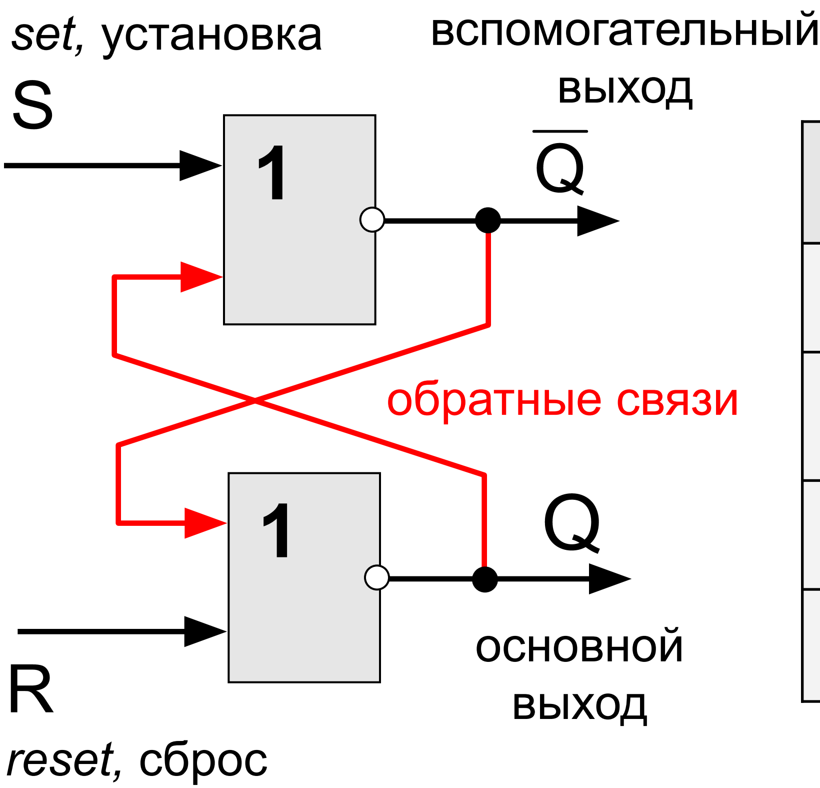
последняя операция - ИЛИ

$$X = \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$$



Триггер (англ. *trigger* – защёлка)

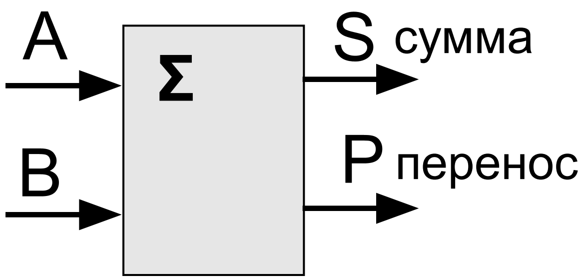
Триггер – это логическая схема, способная хранить 1 бит информации (1 или 0). Строится на 2-х элементах **ИЛИ-НЕ** или на 2-х элементах **И-НЕ.**



S	R	Q	$\overline{Q}$	режим
0	0	Q	$\overline{Q}$	хранение
0	1	0	1	сброс
1	0	1	0	установка 1
1	1	0	0	запрещен

Полусумматор

Полусумматор – это логическая схема, способная складывать два одноразрядных двоичных числа.



$P = A \cdot B$

$S = A \oplus B = A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B$

A	B	P	S
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

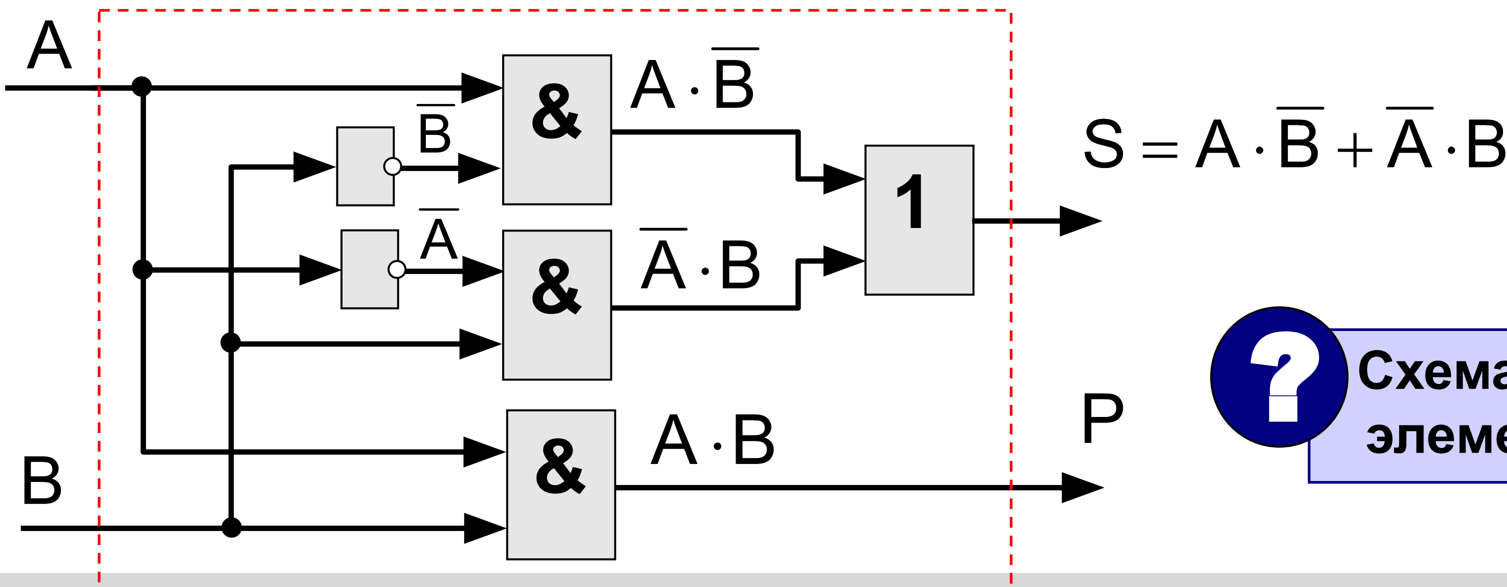
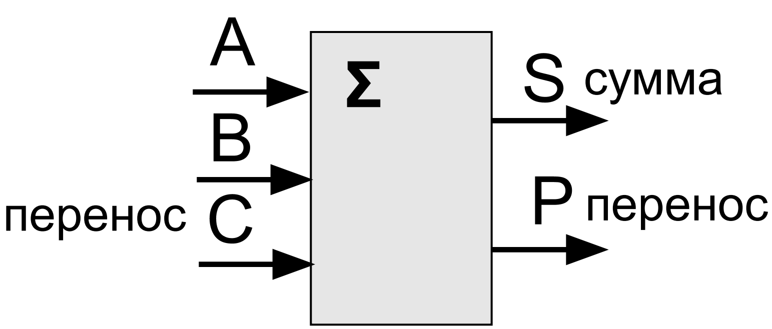


Схема на 4-х элементах?

Сумматор

Сумматор – это логическая схема, способная складывать два одноразрядных двоичных числа с переносом из предыдущего разряда.



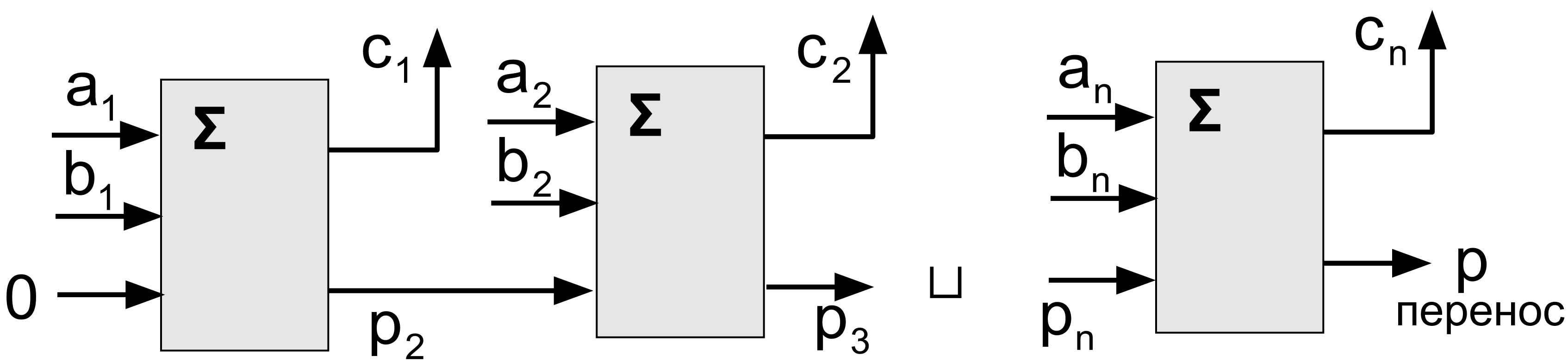
A	B	C	P	S
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

Многоразрядный сумматор

это логическая схема, способная складывать два n-разрядных двоичных числа.

$$
\begin{array}{rl}
 & A = \quad a_n \; a_{n-1} \; \square \; a_1 \\
+ & B = \quad b_n \; b_{n-1} \; \square \; b_1 \\
\hline
 & C = \boxed{p} \; c_n \; c_{n-1} \; \square \; c_1
\end{array}
$$

перенос



Логические основы компьютеров

3.8 Логические задачи

Метод рассуждений

Задача 1. Министры иностранных дел России, США и Китая обсудили за закрытыми дверями проекты договора, представленные каждой из стран. Отвечая затем на вопрос журналистов: «Чей именно проект был принят?», министры дали такие ответы:

Россия — «Проект не наш (1), проект не США (2)»;
США — «Проект не России (1), проект Китая (2)»;
Китай — «Проект не наш (1), проект России (2)».

Один из них оба раза говорил правду; второй – оба раза говорил неправду, третий один раз сказал правду, а другой раз — неправду. Кто что сказал?

проект США (?)

	(1)	(2)
Россия	+	–
США	+	–
Китай		

проект Китая (?)

	(1)	(2)
Россия	+	+
США	+	+
Китай		

проект России (?)

	(1)	(2)
Россия	–	+
США	–	–
Китай	+	+

Табличный метод

Задача 2. Дочерей Василия Лоханкина зовут Даша, Анфиса и Лариса. У них разные профессии и они живут в разных городах: одна в Ростове, вторая – в Париже и третья – в Москве. Известно, что

- Даша живет не в Париже, а Лариса – не в Ростове,
- парижанка – не актриса,
- в Ростове живет певица,
- Лариса – не балерина.

- Много вариантов.
- Есть точные данные.

Париж	Ростов	Москва		Певица	Балерина	Актриса
0	1	0	Даша	1	0	0
1	0	0	Анфиса	0	1	0
0	0	1	Лариса	0	0	1

! **В каждой строке и в каждом столбце может быть только одна единица!**

Использование алгебры логики

Задача 3. Следующие два высказывания истинны:

1. Неверно, что если корабль **A** вышел в море, то корабль **C** – нет.
2. В море вышел корабль **B** или корабль **C**, но не оба вместе.

Определить, какие корабли вышли в море.

Решение:

… если корабль **A** вышел в море, то корабль **C** – нет. $A \to \overline{C} = 1$

1. Неверно, что если корабль **A** вышел в море, то корабль **C** – нет. $A \to \overline{C} = 0$ $\boxed{\overline{A \to \overline{C}} = 1}$

2. В море вышел корабль **B** или корабль **C**, но не оба вместе. $\boxed{B \oplus C = 1}$

$$\left(\overline{A \to \overline{C}}\right) \cdot (B \oplus C) = 1 \qquad \left(\overline{\overline{A} + \overline{C}}\right) \cdot (B \cdot \overline{C} + \overline{B} \cdot C) = 1$$

$$A \cdot C \cdot (B \cdot \overline{C} + \overline{B} \cdot C) = 1$$

$$A \cdot C \cdot \overline{B} = 1$$

$$\boxed{A = 1, \;\; B = 0, \;\; C = 1}$$

Использование алгебры логики

Задача 4. Когда сломался компьютер, его хозяин сказал «Память не могла выйти из строя». Его сын предположил, что сгорел процессор, а винчестер исправен. Мастер по ремонту сказал, что с процессором все в порядке, а память неисправна. В результате оказалось, что двое из них сказали все верно, а третий – все неверно. Что же сломалось?

Решение:

A – неисправен процессор, **B –** память, **C –** винчестер

хозяин: $B = 0,\ \overline{B} = 1$ сын: $A \cdot \overline{C} = 1$ мастер: $\overline{A} \cdot B = 1$

Если ошибся хозяин: $X_1 = \overline{\overline{B}} \cdot A \cdot \cancel{\overline{C}} \cdot \overline{A} \cdot B = 1$

Если ошибся сын: $X_2 = \overline{B} \cdot \overline{A \cdot \cancel{\overline{C}}} \cdot \overline{A} \cdot B = 1$

Если ошибся мастер: $X_3 = \overline{B} \cdot A \cdot \overline{C} \cdot \overline{\overline{A} \cdot B} = 1$

$X_3 = \overline{B} \cdot A \cdot \overline{C} \cdot (A + \overline{B}) = 1$

$X_3 = \overline{B} \cdot A \cdot \overline{C} = 1$

$A = 1$

$B = 0$

$C = 0$

Использование алгебры логики

Задача 5. На вопрос «Кто из твоих учеников изучал логику?» учитель ответил: «Если логику изучал Андрей, то изучал и Борис. Однако неверно, что если изучал Семен, то изучал и Борис». Кто же изучал логику?

Решение: **A –** логику изучал Андрей, **B –** Борис, **C –** Семен

«Если логику изучал Андрей, то изучал и Борис». $A \to B = 1$

«Неверно, что если изучал Семен, то изучал и Борис». $C \to B = 0$ $\overline{C \to B} = 1$

1 способ:

$$(A \to B) \cdot (\overline{C \to B}) = 1$$

$$(\overline{A} + B) \cdot (\overline{\overline{C} + B}) = 1$$

$$(\overline{A} + \cancel{B}) \cdot C \cdot \overline{B} = 1$$

$$\overline{A} \cdot C \cdot \overline{B} = 1$$

$$\boxed{A = 0 \quad B = 0 \quad C = 1}$$

Использование алгебры логики

Задача 5. На вопрос «Кто из твоих учеников изучал логику?» учитель ответил: «Если логику изучал Андрей, то изучал и Борис. Однако неверно, что если изучал Семен, то изучал и Борис». Кто же изучал логику?

Решение: **A** – логику изучал Андрей, **B** – Борис, **C** – Семен

«Неверно, что если изучал Семен, то изучал и Борис».

«Если логику изучал Андрей, то изучал и Борис».

2 способ: $C \to B = 0$ $\qquad$ $A \to B = 1$

C	B	$C \to B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$B = 0$

$C = 1$

A	B	$A \to B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$A = 0$

$B = 0$

$C = 1$

Использование алгебры логики

Задача 6. Суд присяжных пришел к таким выводам:

- если Аськин не виновен или Баськин виновен, то виновен Сенькин
- если Аськин не виновен, то Сенькин не виновен

Виновен ли Аськин?

Решение: **A –** виновен Аськин, **B –** Баськин, **C –** Сенькин

«Если Аськин не виновен или Баськин виновен, то виновен Сенькин».

$$(\overline{A}+B)\to C=1$$

«Если Аськин не виновен, то Сенькин не виновен».

$$\overline{A}\to\overline{C}=1$$

$$((\overline{A}+B)\to C)\cdot(\overline{A}\to\overline{C})=1$$

$$((\overline{\overline{A}+B})+C)\cdot(A+\overline{C})=1$$

$$(A\cdot\overline{B}+C)\cdot(A+\overline{C})=1$$

$$A=0$$

$$\Rightarrow \quad C\cdot\overline{C}\cancel{=}1 \quad \Rightarrow$$

Аськин виновен

Использование алгебры логики

Задача 6б. Суд присяжных пришел к таким выводам:

- если Аськин не виновен или Баськин виновен, то виновен Сенькин
- если Аськин не виновен, то Сенькин не виновен

Виновен ли Баськин?

Решение: **A –** виновен Аськин, **B –** Баськин, **C –** Сенькин

$$(A \cdot \overline{B} + C) \cdot (A + \overline{C}) = 1, \quad B = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 1$$

$$(A \cdot \overline{B} + C) \cdot (A + \overline{C}) = 1, \quad B = 1 \quad \Rightarrow \quad C \cdot A = 1$$

Не получили противоречия: возможно, что и виновен

Использование алгебры логики

Задача 6в. Суд присяжных пришел к таким выводам:

- если Аськин не виновен или Баськин виновен, то виновен Сенькин
- если Аськин не виновен, то Сенькин не виновен

Виновен ли Сенькин?

Решение: **A** – виновен Аськин, **B** – Баськин, **C** – Сенькин

$$(A \cdot \overline{B} + C) \cdot (A + \overline{C}) = 1$$
$$C = 0$$
$\Rightarrow A \cdot \overline{B} = 1$

$$(A \cdot \overline{B} + C) \cdot (A + \overline{C}) = 1$$
$$C = 1$$
$\Rightarrow A = 1$

Не получили противоречия: возможно, что и виновен

Логические основы компьютеров

Задачи ЕГЭ

Задачи ЕГЭ

Для какого из указанных значений X истинно высказывание **¬((X > 2)→(X > 3))**?

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

$$\overline{(X>2)\to(X>3)}$$

$$\overline{(X>2)\to(X>3)}=1 \quad\Rightarrow\quad (X>2)\to(X>3)=0$$

$$A\to B=0 \quad\Rightarrow\quad A=1,\;\; B=0$$

$$\left.\begin{matrix}X>2\\X\le 3\end{matrix}\right\} \quad\Rightarrow\quad X=3$$

Укажите, какое логическое выражение равносильно выражению **A ∧ ¬(¬B ∨ C)**.

1) **¬A ∨ ¬B ∨ ¬C**
2) **A ∨ ¬B ∨ ¬C**
3) **A ∧ B ∧ ¬C**
4) **A ∧ ¬B ∧ C**

$$A\cdot\overline{(\overline{B}+C)}$$

1) $\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$
2) $A+\overline{B}+\overline{C}$
3) $A\cdot B\cdot\overline{C}$
4) $A\cdot B\cdot C$

Задачи ЕГЭ (2)

Каково наибольшее целое число X, при котором истинно высказывание

(50 < X·X) → (50 > (X+1)·(X+1))

В целых числах:

A

B

$$50 < X^2 \quad \Leftrightarrow \quad |X| \geq 8$$

$$50 > (X+1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad |X+1| \leq 7 \quad \Leftrightarrow$$

$$A \to B = 1 \quad \Rightarrow \quad A = 0, \quad B = 0$$

$$A = 0, \quad B = 1 \qquad \Rightarrow \quad \boxed{X_{max} = 7}$$

$$A = 1, \quad B = 1$$

Задачи ЕГЭ (6)

Перед началом Турнира Четырех болельщики высказали следующие предположения по поводу своих кумиров:

А) Макс победит, Билл – второй;

В) Билл – третий, Ник – первый;

С) Макс – последний, а первый – Джон.

Когда соревнования закончились, оказалось, что каждый из болельщиков был прав только в одном из своих прогнозов. Какое место на турнире заняли Джон, Ник, Билл, Макс? (В ответе п

пробелов места участников в

	A	B	C
Джон			1
Ник		1	
Билл	2	3	
Макс	1		4

Ответ: 3124

Задачи ЕГЭ (7)

На одной улице стоят в ряд 4 дома, в каждом из них живет по одному человеку. Их зовут Василий, Семен, Геннадий и Иван. Известно, что все они имеют разные профессии: скрипач, столяр, охотник и врач. Известно, что

(1) Столяр живет правее охотника.
(2) Врач живет левее охотника.
(3) Скрипач живет с краю.
(4) Скрипач живет рядом с врачом.
(5) Семен не скрипач и не живет рядом со скрипачом.
(6) Иван живет рядом с охотником.
(7) Василий живет правее врача.
(8) Василий живет через дом от Ивана.

Определите, кто где живет, и запишите начальные буквы имен жильцов всех домов слева направо. Например, если бы в домах жили (слева направо) Кирилл, Олег, Мефодий и Пафнутий, ответ был бы КОМП.

Задача Эйнштейна

Условие: Есть 5 домов разного цвета, стоящие в ряд. В каждом доме живет по одному человеку отличной от другого национальности. Каждый жилец пьет только один определенный напиток, курит определенную марку сигарет и держит животное. Никто из пяти человек не пьет одинаковые напитки, не курит одинаковые сигареты и не держит одинаковых животных.

Известно, что:

1. Англичанин живет в красном доме.
2. Швед держит собаку.
3. Датчанин пьет чай.
4. Зеленой дом стоит слева от белого.
5. Жилец зеленого дома пьет кофе.
6. Человек, который курит *Pallmall*, держит птицу.
7. Жилец среднего дома пьет молоко.
8. Жилец из желтого дома курит *Dunhill*.
9. Норвежец живет в первом доме.
10. Курильщик *Marlboro* живет около того, кто держит кошку.
11. Человек, который содержит лошадь, живет около того, кто курит *Dunhill*.
12. Курильщик *Winfield* пьет пиво.
13. Норвежец живет около голубого дома.
14. Немец курит *Rothmans*.
15. Курильщик *Marlboro* живет по соседству с человеком, который пьет воду.

Вопрос: У кого живет рыба?

Конец фильма

ПОЛЯКОВ Константин Юрьевич
д.т.н., учитель информатики высшей категории,
ГОУ СОШ № 163, г. Санкт-Петербург
kpolyakov@mail.ru