Линейное программирование

Линейное программирование — математическая дисциплина, посвященная теории и методам решения задач об экстремумах линейных функций на множествах, задаваемых системами линейных неравенств и равенств.

Примеры задач линейного программирования

- Для изготовления трех видов сплавов *А*, *В* и *С* используется медь, олово и цинк. Данные о сплавах приведены в табл. 1.

Процентное содержание и общая масса компонентов

Компоненты сплава	Содержание компонентов в %			Общая масса данной компоненты сплава, т.
	A	*B*	*C*	
Медь	20	10	30	120
Олово	10	80	60	280
Цинк	70	10	10	240
Стоимость 1кг.	10	14	12	—

Требуется определить, какое количество сплавов каждого вида следует изготовить предприятию, чтобы стоимость продукции была максимальной.

Изготовлено x_1 кг сплава *А,* x_2 кг сплава *В* и x_3 кг сплава *С.* Для производства такого количества сплавов потребуется затратить $20x_1 + 10x_2 + 30x_3$ кг меди.

$$\begin{cases} 20x_1 + 10x_2 + 30x_3 \le 120\,000 \\ 10x_1 + 80x_2 + 60x_3 \le 280\,000 \\ 70x_1 + 10x_2 + 10x_3 \le 240\,000 \end{cases} \qquad (8.2)$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0. \qquad (8.1)$$

$$F = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3 \qquad (8.3)$$

Функция (8.3) линейная, а система (8.2) содержит линейные неравенства,

задача (8.1)—(8.3) является задачей линейного программирования.

Общая и каноническая задачи линейного программирования

Определение. *Общей (основной) задачей* линейного программирования называется задача, которая состоит в определении максимального (минимального) значения функции

$$F=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (8.6)$$

при выполнении условии

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \ (i=1,\dots k) \qquad (8.7)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ (i=k+1,\dots m) \qquad (8.8)$$

$$x_j \ge 0 \ (j=1,\dots l;\ l \le n) \qquad (8.9)$$

где a_{ij}, b_i и c_j — заданные постоянные величины и $k \le m$.

Определение. Функция (8.6) называется *целевой функцией* задачи (8.6)—(8.9), а условия (8.7)—(8.9) — *ограничениями* данной задачи.

Общая и каноническая задачи линейного программирования

Определение. *Канонической задачей* линейного программирования называется задача, которая состоит в определений максимального значения функции (8.6) при выполнении условий (8.8) и (8.9), где $k = 0$ и $l = n$.

Определение. Вектор $X = (x_1, x_2,\ldots x_n)^T$, удовлетворяющий

ограничениям задачи (8.7)—(8.9), называется *допустимым решением*, или *планом*.

Определение. План $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots x_n^*)^T$, при котором целевая функция принимает свое максимальное (минимальное) значение, называется *оптимальным.*

$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$

$F_1 = -F = -c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - c_nx_n$

$\min F = \max(-F)$

Общая и каноническая задачи линейного программирования

Ограничение-неравенство

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i$$

Ограничение-равенство

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + x_{n+1} = b_i, \quad x_{n+1} \ge 0,$$

Ограничение-неравенство

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \ge b_i$$

Ограничение-равенство

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n - x_{n+1} = b_i, \quad x_{n+1} \ge 0.$$

Если переменная x_k по условию задачи отрицательна, то ее следует заменить двумя неотрицательными переменными u_k и v_k, приняв $x_k = u_k - v_k$.

Линейное программирование (Пример)

Записать в форме канонической задачи линейного программирования задачу нахождения максимума функции $F = 3x_1 - 2x_2 - 5x_4 + x_5$ при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 + x_5 \le 2, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 \le 3, \\ 2x_1 + x_3 - x_4 + 2x_5 \le 6, \\ x_1 + \ldots + x_4 + 5x_5 \ge 8, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0$$

Запись в форме канонической задачи => переход от ограничений-неравенств к ограничениям-равенствам.

Переход может быть осуществлен введением четырех дополнительных неотрицательных переменных. При этом к левым частям каждого неравенства вида «$\le$» соответствующая переменная прибавляется, а из левых частей каждого из неравенства вида «$\ge$» вычитается.

Каноническая задач а: максимизировать функцию $F = 3x_1 - 2x_2 + 5x_4 + x_5$

при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 + x_5 + x_6 = 2, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 + x_7 = 3, \\ 2x_1 + x_3 - x_4 + 2x_5 + x_8 = 6, \\ x_1 + \ldots + x_4 + 5x_5 - x_9 = 8, \end{cases}$$

$$x_1, \ldots x_9 \ge 0.$$

Геометрическое истолкование задач линейного программирования

Определение. Непустое множество планов общей (основной) задачи линейного программирования называется многогранником решений.

Свойство. Если основная задача линейного программирования имеет оптимальный план, то максимальное значение целевая функция принимает в одной из вершин многогранника решений.

$n - r \leq 2$, где n – число переменных, r – ранг матрицы.

Определение максимального значения

$F = c_1x_1 + c_2x_2$

при условии

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i,\ \ i = 1, \dots k \qquad (8.11)$$

$$x_1, x_2 \geq 0. \qquad (8.12)$$

Каждое из неравенств (8.11), (8.12) геометрически определяет полуплоскость соответственно с граничными прямыми

$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$, $i = 1, \dots k$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$.

Геометрическое истолкование задач линейного программирования

Исходная задача линейного программирования:

нахождение вершины многоугольника решений, в которой целевая функция (8.10) принимает максимальное значение.

Такая вершина существует тогда, когда многоугольник решений не пуст и на нем целевая функция ограничена сверху.

Для определения этой вершины строят линию уровня $c_1x_1 + c_2x_2 = h$, и перемещают ее в направлении вектора $\overline{C} = (c_1, c_2)$, ортогонального ей, до тех пор пока она не пройдет через последнюю общую точку с многоугольником решений.

Координаты точки определяют оптимальный план задачи.

Линейное программирование (Пример)

Для изготовления двух видов изделий *A* и *B* предприятие использует три вида сырья. Нормы расхода каждого вида сырья на изготовление единицы продукции данного вида приведены в табл.

Вид сырья	Нормы затрат сырья на одно изделие		Общее количество сырья
	A	*B*	
I	12	4	300
II	4	4	120
III	3	12	252
Прибыль от реализации изделия	30	40	–

Требуется определить такой план выпуска, при котором прибыль предприятия от реализации совокупности изделий будет максимальной.

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 \le 300, \\ 4x_1 + 4x_2 \le 120, \\ 3x_1 + 12x_2 \le 252, \end{cases}$$

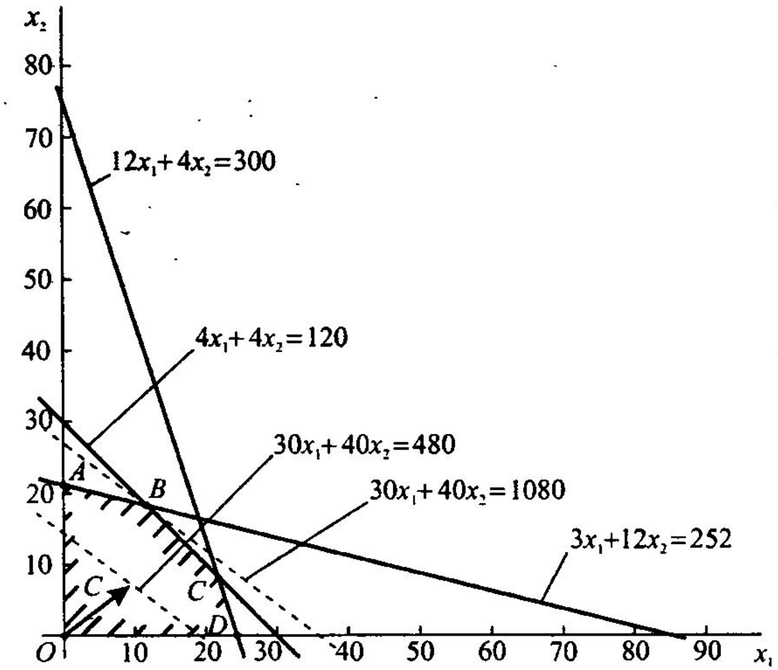
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Общая прибыль от реализации всей продукции составит $F = 30x_1 + 40x_2$.

Найдем решение данное! задачи, используя ее геометрическую интерпретацию. Сначала определим многоугольник решений. Для этого в неравенствах системы ограничений и условиях неотрицательности переменных следует заменить знаки неравенств знаками точных равенств и найти соответствующие прямые.

Линейное программирование (Пример)

- Многоугольником решений является пятиугольник OABCD.
Найти точку, принадлежащей пятиугольнику OABCD, в которой $F = 30x_1 + 40x_2$ принимает максимальное значение.
Построим вектор $\bar{C} = (30; 40)$ и прямую $30x_1 + 40x_2 = h$. Положим, например, $h = 480$ и построим прямую
$30x_1 + 40x_2 = 480$.
Общей точкой прямой с многоугольником решений является точка B. Прибыль от его реализации является максимальной, и удовлетворяют уравнениям прямых



Графическое решение

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 = 120, \\ 3x_1 + 12x_2 = 252. \end{cases}$$

Решив систему, получим $x_1 = 12$, $x_2 = 18$. Следовательно, если предприятие изготовит 12 изделий вида A и 18 вида B, то оно получит максимальную прибыль $F = 30 \cdot 12 + 40 \cdot 18 = 1080$.

Аналитическое решение задач линейного программирования

- Каноническая задача линейного программирования:

найти максимальное значение функции $F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

при условиях $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, \dots m, \; x_j \geq 0, \; j = 1, \dots n.$

Перепишем условия в форме

$$x_1 P_1 + x_2 P_2 + \dots + x_n P_n = P_0 \qquad (8.13)$$

$$x_j \geq 0 \;\; (j = 1, \dots n) \qquad (8.14)$$

где P_0, ... P_n - m-мерные векторы-столбцы, составленные из коэффициентов a_{ij} при неизвестных $x_j \geq 0$, $j = 1, \dots n$ и свободных членах b_i ($i = 1, \dots m$) системы уравнений задачи:

$$P_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}; \; P_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}; \; P_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix}; \dots P_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Аналитическое решение задач линейного программирования

Определение. Если система векторов $\{P_j\}$ входящих в левую часть уравнения (8.13), (8.14) с положительными коэффициентами $\{x_j > 0\}$ линейно независима, то план $X = (x_1, x_2, \dots x_n)^T$ называется *опорным планом* канонической задачи линейного программирования.

Определение. Опорный план $X = (x_1, x_2, \dots x_n)^T$ называется *невырожденным*, если он содержит ровно m ненулевых компонент $\{x_j > 0\}$, а если их меньше т, то *вырожденным.*

Необходимо обратить внимание на следующее.

- Если задача линейного программирования разрешима, то максимум целевой функции достигается хотя бы при одном опорном плане.

- Опорный план является угловой точкой множества планов, целевая функция принимает максимальное значение именно на множестве опорных планов задачи (в одной из вершин многогранника решений).

Симплекс-метод

Симплекс-метод — алгоритм решения оптимизационной задачи линейного программирования путём перебора вершин выпуклого многогранника в многомерном пространстве.

Нахождение решения симплекс-методом гарантируется только в том случае, когда на каждом шаге рассматриваемый опорный план является невырожденным.

Постановка задачи и определение исходного опорного плана.

- Пусть требуется найти максимальное значение функции $F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 \qquad + a_{1m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \quad x_2 \quad + a_{2m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad \ldots \\ \qquad x_m + a_{mm+1}x_{m+1} + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0$$

$$i = 1, \ldots m; \;\; j = 1, \ldots n; \;\; m < n,$$

где a_{ij}, b_i и c_j — заданные постоянные числа, причем все $b_i > 0$.

В векторной форме задача формируется следующим образом: найти максимум функции $F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ (8.15)

при условиях $x_1P_1 + x_2P_2 + \ldots + x_nP_n = P_0,$ (8.16)

$x_j \geq 0, \; (j = 1, \ldots n),$ (8.17)

где

$$P_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}, \; P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}, \; P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots P_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix}, \; P_{m+1} = \begin{pmatrix} a_{1m+1} \\ a_{2m+1} \\ \ldots \\ a_{mm+1} \end{pmatrix}, \; P_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Исходным опорным планом является совокупность $X = (b_1, b_2, \ldots b_m, 0, \ldots 0)^T$, которая удовлетворяет $b_1P_1 + b_2P_2 + \ldots + b_mP_m + 0 \cdot P_{m+1} + \ldots + 0 \cdot P_n = P_0$.

Проверка оптимального опорного плана.

$$F=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j=\sum_{i=1}^{m}c_ix_i+\sum_{j=m+1}^{n}c_jx_j=\sum_{i=1}^{m}c_i(b_i-\sum_{j=m+1}^{n}a_{ij}x_j)+\sum_{j=m+1}^{n}c_jx_j=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}c_ib_i+\sum_{j=m+1}^{n}(c_j-\sum_{i=1}^{m}c_ia_{ij})x_j=\sum_{i=1}^{m}c_ib_i-\sum_{j=m+1}^{n}(z_j-c_j)x_j=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}c_ib_i-\sum_{j=m+1}^{n}\Delta_jx_j=F_0-\sum_{j=m+1}^{n}\Delta_jx_j,$$

где $z_j=\sum_{i=1}^{m}c_ia_{ij},\ \Delta_j=z_j-c_j=\sum_{i=1}^{m}c_ia_{ij}-c_j.$

$F_0=\sum_{i=1}^{m}c_ib_i$ - значение целевой функции при выбранном опорном плане

Величина $\Delta_j=\sum_{i=1}^{m}c_ia_{ij}-c_j$ показывает, на сколько изменится F_0 при увеличении компоненты x_j ($j = m + 1, \dots n$). Следует говорить только об увеличении x_j, так как одним из условий задачи является $x_j \geq 0$ ($j = 1, \dots n$), а при данном опорном плане все $x_j = 0$ ($j = m + 1, \dots n$).

Если $\Delta_j \geq 0$ для любого j ($j = m + 1, \dots n$), то очевидно, что увеличение компоненты x_j ($j = m + 1, \dots n$) приведет к уменьшению значения функции

$$F=F_0-\sum_{j=m+1}^{n}\Delta_jx_j<F_0$$

Если $\Delta_j \geq 0$ для любого j ($j = 1, \dots n$), то данный опорный план задачи (8.15)—(8.17) является оптимальным, а максимальное значение функции найдено и равно $F=\sum_{i=1}^{m}c_ib_i$

Переход к новому опорному плану

- Если среди Δ_j ($j = m + 1, \dots n$) найдутся $\Delta_p < 0$, то имеет смысл ввести в опорный план ту переменную x_k, которой соответствует значение

$\Delta_k = -\max_p |\Delta_p|$, что приведет к максимальному увеличению целевой функции на данном шаге. При этом можно не рассчитывать значения Δ_i при $j = 1, \dots m$, так как P_j — базисные векторы, следовательно, для таких j

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_j a_{ij} - c_j = c_1 \times 0 + \dots c_j \times 1 + \dots c_m \times 0 - c_j = 0.$$

Рассмотрим, как изменится значение целевой функции при включении в опорный план компоненты x_k

$$F = F_0 - \Delta_k x_k \equiv F_0 - (\sum_{i=1}^{m} c_i a_{ik} - c_k) x_k = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ik} x_k + c_k x_k =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} c_i (b_i - a_{ik} x_k) + c_k x_k.$$

Если при этом $a_{ik} < 0, i = 1, \dots m,$ то $F = \sum_{i=1}^{m} c_i (b_i - a_{ik} x_k) + c_k x_k \xrightarrow[x_k \to \infty]{} \infty,$

т. е. функция не ограничена на множестве планов.

Если среди величин $a_{ik}, i = 1, \dots m$ есть такие, что $a_{ik} > 0$, то необходимо, чтобы выполнялось условие $(b_i - a_{ik} x_k) \geq 0$ для всех $a_{ik} > 0$. Это условие будет выполняться при $x_k = \min\limits_{\substack{i \\ a_{ik} > 0}} (\frac{b_i}{a_{ik}}) = \frac{b_l}{a_{lk}}$

Переход к новому опорному плану

В результате получим, что $(b_l - a_{lk} x_l) = 0$ и компоненту x_l следует исключить из опорного плана, а вместо включить компоненту x_k. Базисный вектор P_l исключается, вместо него в базис включается вектор P_k. Значение $F = F_0 - \Delta_k x_k = F_0 - \Delta_k \frac{b_l}{a_{lk}} > F_0$

при этом увеличится

$$x_k = \min_{\substack{i \\ a_{ik}>0}} \left(\frac{b_i}{a_{ik}}\right)$$

Возможна ситуация, когда достигается при нескольких i. В таком случае получим, что несколько компонент нового опорного плана будут равны нулю, и невырожденный опорный план превратится в вырожденный.

Описание симплекс-таблицы

Общий вид симплекс-таблицы

i	Базис	$C_б$	P_0	c_1	...	c_m	c_{m+1}	...	c_k	...	c_n
				P_1	...	P_m	P_{m+1}	...	P_k	...	P_n
1	P_1	c_1	b_1	1	...	0	a_{1m+1}	...	a_{1k}	...	a_{1n}
2	P_2	c_2	b_2	0	...	0	a_{2m+1}	...	a_{2k}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
l	P_l	c_l	b_l	0	...	0	a_{lm+1}	...	a_{lk}	...	a_{ln}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
m	P_m	c_m	b_m	0	...	1	a_{mm+1}	...	a_{mk}	...	a_{mn}
			F_0	0	...	0	Δ_{m+1}	...	Δ_k	...	Δ_n

В столбце $C_б$ записывают коэффициенты при неизвестных целевой функции, имеющие те же индексы, что и векторы данного базиса.

В столбце P_0 записывают положительные компоненты исходного опорного плана, в нем же в результате вычислений получают компоненты оптимального плана.

Столбцы векторов P_j представляют собой коэффициенты разложения этих векторов по векторам данного базиса.

$\Delta_j = z_j - c_j$. Величина z_j - скалярное произведение вектора P_j на вектор P_0.

Аналитическое решение задач линейного программирования (Пример)

Для изготовления различных изделий *A*, *B* и *C* предприятие использует три различных вида сырья. Нормы расхода сырья на производство одного изделия каждого вида, цена одного изделия, а также общее количество сырья каждого вида приведены в табл. 2.

Вид сырья	Нормы затрат сырья на одно изделие			Общее количество сырья
	A	*B*	*C*	
I	18	15	12	360
II	6	4	8	192
III	5	3	3	180
Цена одного изделия	9	10	16	–

Составить план производства изделий, при котором общая стоимость произведенной продукции будет максимальной.

Система неравенств

$$\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 \le 360, \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 \le 192, \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 180. \end{cases} \qquad (8.22)$$

Общая стоимость произведенной предприятием продукции составляет

$$F = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3. \qquad (8.23)$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0. \qquad (8.24)$$

Аналитическое решение задач линейного программирования (Пример)

Каноническая форма. Переход от ограничений-неравенств к ограничениям-равенствам. Вводим три дополнительные переменные.

$$\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 + x_4 = 360, \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 + x_5 = 192, \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_6 = 180, \end{cases}$$

$$(n = 6,\ m = 3).$$

Преобразованную систему уравнений запишем в векторной форме

$$x_1P_1 + x_2P_2 + x_3P_3 + x_4P_4 + x_5P_5 + x_6P_6 = P_0,$$

где

$$P_1 = \begin{pmatrix} 18 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 15 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}, P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, P_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, P_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, P_0 = \begin{pmatrix} 360 \\ 192 \\ 180 \end{pmatrix}.$$

Поскольку среди векторов P_1, ... P_6 имеются три единичных вектора, то можно непосредственно записать опорный план $X = (0,0,0,360,192,180)^T$, определяемый системой трехмерных единичных векторов P_4, P_5, P_6 , которые образуют базис векторного пространства.

Аналитическое решение задач линейного программирования (Пример)

Составим симплекс-таблицу для итерации 1 и проверим исходный план на оптима

$$F_0 = (C_б, P_0) = 0;\ \ z_1 = (C_б, P_1) = 0;\ \ z_2 = (C_б, P_2) = 0;\ \ z_3 = (C_б, P_3) = 0;$$

$$z_1 - c_1 = 0 - 9 = -9;\ \ z_2 - c_2 = 0 - 10 = -10;\ \ z_3 - c_3 = 0 - 16 = -16.$$

Для векторов базис $\Delta_j = z_i - c_i = 0.$ Таблица 1.1

i	Базис	$C_б$	P_0	9	10	16	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	360	18	15	12	1	0	0
2	P_5	0	192	6	4	8	0	1	0
3	P_6	0	180	5	3	3	0	0	1
4			0	–9	–10	–16	0	0	0

Опорный план *x* не является оптимальным: имеются отрицательные числа.

Для определения вектора, подлежащего исключению, находим $\min(b_i / a_{i3})$ при $a_{i3} > 0$, т.е. min (360/12; 192/8; 180/3) = 192/8 = 24. Таким образом, из базиса следует исключить вектор P5. Ограничивающим фактором для производства изделий *C* является имеющийся объем сырья II вида. С учетом этого предприятие может выпустить 24 изделия *C*.

Аналитическое решение задач линейного программирования (Пример)

Столбец P_3 и строка P_5 являются в симплекс-таблице направляющими. Составим таблицу для итерации 2

Таблица

i	Базис	$C_б$	P_0	9	10	16	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	72	9	9	0	1	–3/2	0
2	P_3	16	24	3/4	1/2	1	0	1/8	0
3	P_6	0	108	11/4	3/2	0	0	–3/8	1
4			384	3	–2	0	0	2	0

Для определения элементов применяем правило треугольника. Элементы можно вычислены непосредственно по формулам (8.18)—(8.21).

Вычислим число, являющееся первым элементом вектора P_0 . Для его вычисления находим три числа, расположенные:

1) в табл. 1.1 на пересечении столбца вектора P_0 и первой строки (360);

2) в табл. 1.1 на пересечении столбца вектора P_3 и первой строки (12);

3) в табл. 1.1 на пересечении столбца вектора P_0 и второй строки (24).

360 -12 • 24 = 72. Аналогично находим элементы столбцов P_1, P_2, P_5.

Новый опорный план X = (0,24,0,72,0,108)^T и значения Δ'_j и F'_0

Аналитическое решение задач линейного программирования (Пример)

Найдем вектор, подлежащий исключению из базиса.

min(72/9, 48/1, 360/3) = 72/9 = 8. Следовательно, исключению из базиса подлежит вектор P_4. Число 9 является разрешающим элементом, а столбец P_2 и строка P_4 являются направляющими. Составим таблицу итерации 3.

i	Базис	$C_б$	P_0	9	10	16	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_2	10	8	1	1	0	1/9	–1/6	0
2	P_3	16	20	1/4	0	1	–1/18	5/24	0
3	P_6	0	96	5/4	0	0	–1/6	–1/8	1
4			400	5	0	0	2/9	5/3	0

Новый опорный план $X = (0,8,20,0,0,96)^T$ и коэффициенты разложения векторов P_i (i = 1, ... 6) через базисные векторы P_2, P_3, P_6, а также значения Δ''_j и F''_0.

Найденный план является оптимальным и F_{max} = 400.

С экономической точки зрения план выпуска продукции, включающий изготовление 8 изделий *B* и 20 изделий *C*, является оптимальным. Оптимальным планом не предусматривается изготовление изделий *A*.