

Колебания-1.

Гармоническое колебание и его характеристики. Модель гармонического осциллятора.

Уравнение свободных колебаний модельных систем (груз на пружине, математический и физический маятники). Сложение колебаний. Биения.

- Колебания – процессы, отличающиеся повторяемостью. В зависимости от природы бывают: механическими, электромагнитными, электромеханическими.
- Механическими колебаниями называются периодические (или почти периодические) изменения физической величины, описывающей механическое движение (скорость, перемещение, кинетическая и потенциальная энергия и т. п.), это движения тел, повторяющиеся точно (или приблизительно) через одинаковые промежутки времени. Колебательные явления различной физической природы подчиняются общим закономерностям.
- Свободные (собственные) колебания- колебания, происходящие в системе, предоставленной самой себе после того, как она была выведена из положения равновесия.
- Вынужденные- колебания, в процессе которых система подвергается воздействию внешней периодически изменяющейся силы.
- Параметрические колебания- колебания, при которых происходят периодические изменения какого-либо параметра системы.

- Рассмотрим систему, состоящую из шарика подвешенного на пружине. В состоянии равновесия- сила тяжести уравновешивается силой упругости:

$$mg = k \Delta l_0.$$

- X-смещение из положения равновесия, нуль совмещен с положением равновесия.
- Сместим из положения равновесия, то удлинение равно: $\Delta l_0 + x$
- Проекция результирующей силы на ось x:

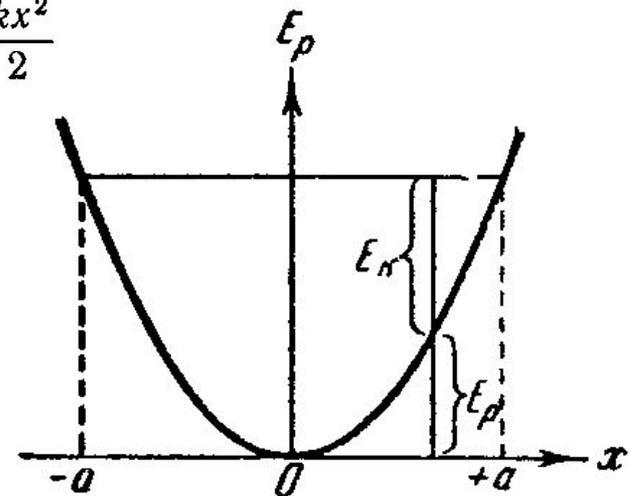
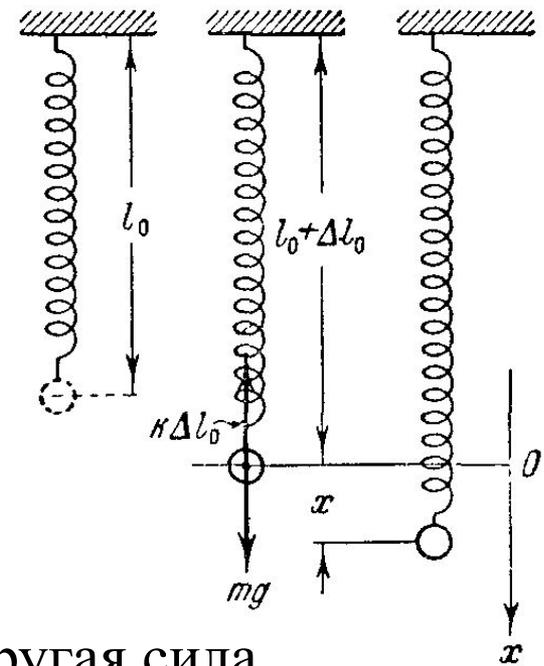
$$f = mg - k(\Delta l_0 + x) \rightarrow f = -kx \text{ - квазиупругая сила}$$

- Работа для смещения на x против квазиупругой силы:

$$A = \int_0^x (-f) dx = \int_0^x kx dx = \frac{kx^2}{2}$$

- Потенциальная энергия системы при смещении из положения равновесия:

- Кинетическая $E_p = \frac{kx^2}{2}$ и потенциальная энергии взаимнопревращаются.



- Уравнение второго закона Ньютона для шарика:

$$m\ddot{x} = -kx \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

- Обозначим $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ и получим:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Движение шарика под действием силы описывается линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка:

Общее решение имеет вид:

$$x = a \cos(\omega_0 t + \alpha)$$

Движение системы, находящейся под действием квазиупругой силы представляет собой гармонические колебания.

- Закон движения тела, совершающего колебания, задается с помощью некоторой периодической функции времени $x = f(t)$.
- Простейшим видом колебательного процесса являются простые гармонические колебания-колебания, при которых колеблющаяся величина изменяется со временем по закону косинуса или синуса: $x = x_m \cos(\omega t + \varphi_0)$.
- Здесь x – смещение тела от положения равновесия, $x_m =$ амплитуда колебаний, т. е. максимальное смещение от положения равновесия, ω – циклическая или круговая частота колебаний, t – время. Величина, стоящая под знаком косинуса $\varphi = \omega t + \varphi_0$ называется фазой гармонического процесса. При $t = 0$ $\varphi = \varphi_0$, поэтому φ_0 называют начальной фазой. Минимальный интервал времени, через который происходит повторение движения тела, называется периодом колебаний T .
- Физическая величина, обратная периоду колебаний, называется частотой колебаний: $\nu = 1/T$. Частота колебаний f показывает, сколько колебаний совершается за 1 с. Единица частоты – герц (Гц). Частота колебаний f связана с **циклической (круговой) частотой** ω и периодом колебаний T соотношениями:

$$\omega = 2\pi/T = 2\pi\nu$$

- Смещение: $x = a \cos(\omega_0 t + \alpha)$
- Скорость: $v = \dot{x} = -a\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) = a\omega_0 \cos(\omega_0 t + \alpha + \frac{\pi}{2})$
- Ускорение: $\ddot{x} = -a\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha) = a\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha + \pi)$
- Ускорение и смещение в противофазе!

- Кинетическая энергия равна:

$$E_k = \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{ma^2\omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \alpha)$$

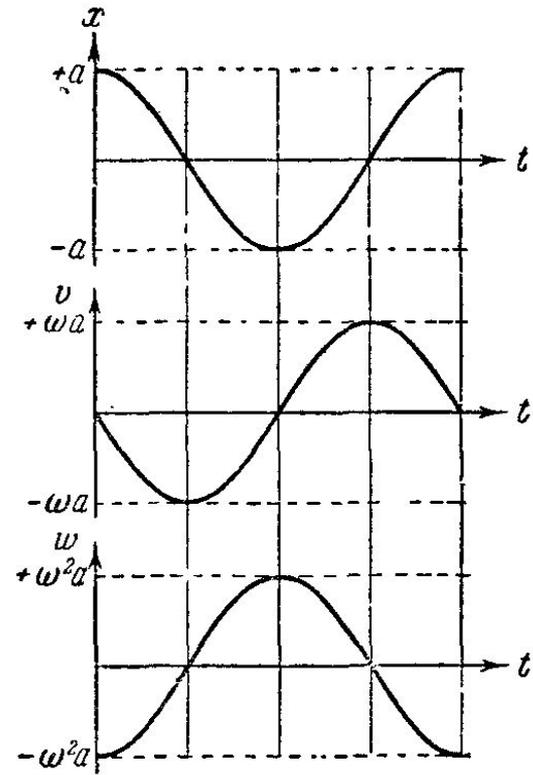
- Потенциальная энергия равна:

$$E_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{ka^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \alpha)$$

- Полная энергия:

$$E = E_k + E_p = \frac{ka^2}{2} \left(\text{или } \frac{ma^2\omega_0^2}{2} \right)$$

- E_k и E_p изменяются с частотой в два раза превышающие частоту гармонических колебаний. Среднее значение $E_k =$ среднему значению $E_p = \frac{1}{2} E$



- Систему, описываемую уравнением:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

- где ω_0^2 - постоянная положительная величина, называют гармоническим осциллятором. Решение имеет вид:

$$x = a \cos(\omega_0 t + \alpha)$$

- Гармонический осциллятор представляет собой систему, совершающую гармонические колебания около положения равновесия.

- Импульс гармонического осциллятора:

$$p = m\dot{x} = -ma\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha)$$

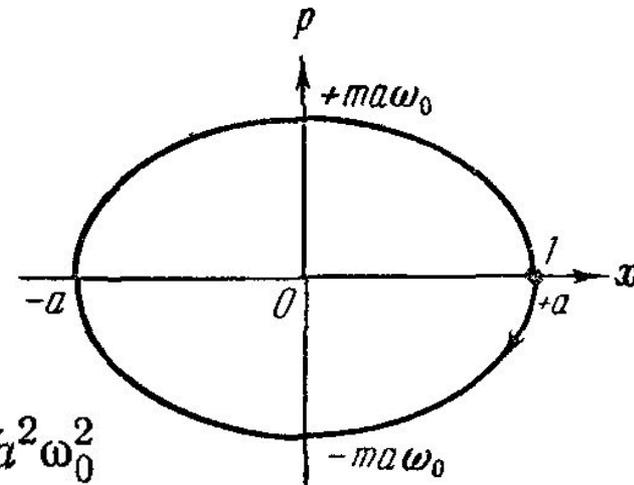
- Импульс как функция от координаты – фазовая траектория:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{p^2}{m^2 a^2 \omega_0^2} = 1$$

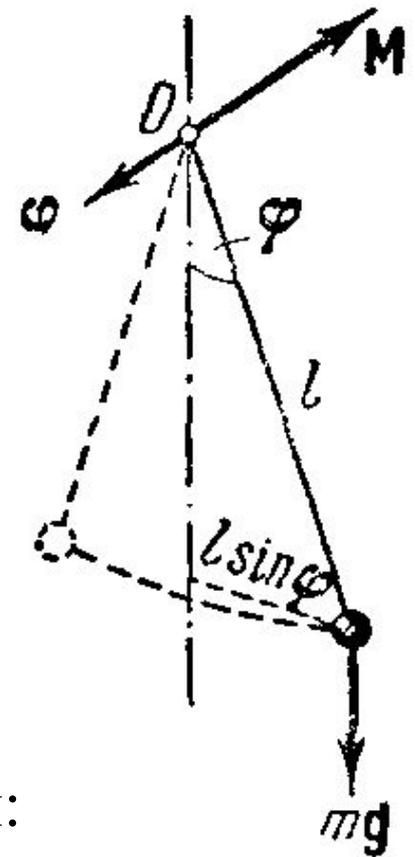
- Плоскость (p, x) – фазовая плоскость.

- Полная энергия гармонического осциллятора = произведению собственной частоты и площади эллипса:

$$E = \nu_0 S, S = \pi a m a \omega_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \frac{m a^2 \omega_0^2}{2}$$



- Математический маятник- идеализированная система, состоящая из невесомой и нерастяжимой нити, на которой подвешена масса, сосредоточенная в одной точке.



- Отклонение маятника от положения равновесия описывается углом φ .
- Вращательный момент при отклонении маятника («-» - стремится вернуть маятник в положение равновесия): $M = -mgl \sin \varphi$.

- Уравнение динамики вращательного движения:

- $ml^2\ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi \rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$

- Рассмотрим малы колебания $\sin \varphi \approx \varphi$ и обозначим $g/l = \omega_0^2$:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0$$

- Решение имеет вид: $\varphi = a \cos(\omega_0 t + \alpha)$ двое отклонение
изменяется по гармоническому закону.

- Период колебания математического маятника: $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$.

- Физическим маятником называется твёрдое тело, способное совершать колебания вокруг неподвижной точки, не совпадающей с его центром инерции.

- Вращательный момент, возникающий при смещении из положения равновесия:

$$M = -mgl \sin \varphi.$$

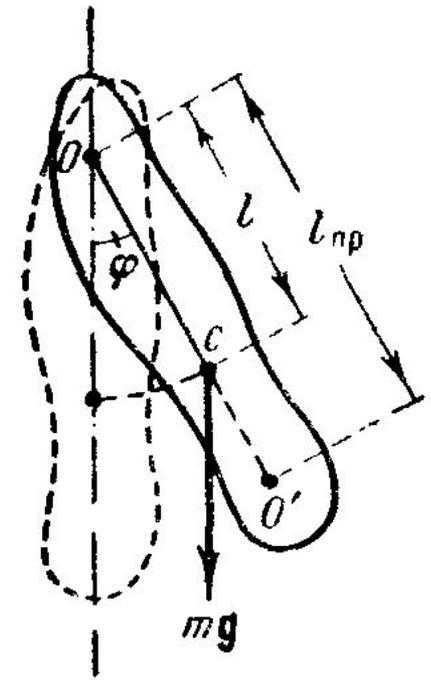
- где m – масса маятника, l – расстояние между точкой подвеса и центром инерции маятника.

- Уравнение динамики вращательного движения: $I\ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi$

- Рассмотрим малы колебания $\sin \varphi \approx \varphi$ и обозначим $mgl/I = \omega_0^2$: $\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0$.

- Отклонение от положения равновесия описывается гармоническим законом!

- Частота колебаний зависит от массы маятника, момента инерции маятника относительно оси вращения и расстояния от оси вращения до центра масс

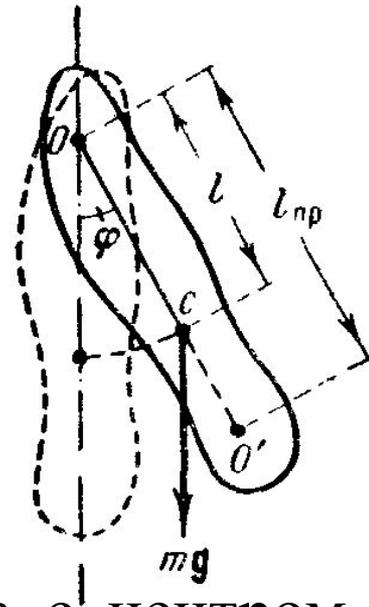


- Период колебания физического маятника:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}}$$

- Приведённая длина — это длина такого математического маятника, период колебаний которого совпадает с периодом данного физического маятника:

$$l_{\text{пр}} = \frac{I}{ml}$$



- Точка на прямой, соединяющей точку подвеса с центром инерции, лежащей на расстоянии приведённой длины от оси вращения, называется центром качения физического маятника.

- Подставим теорему Штейнера: $I = I_0 + ml^2$ и получим:

$$l_{\text{пр}} = \frac{I_0}{ml} + l$$

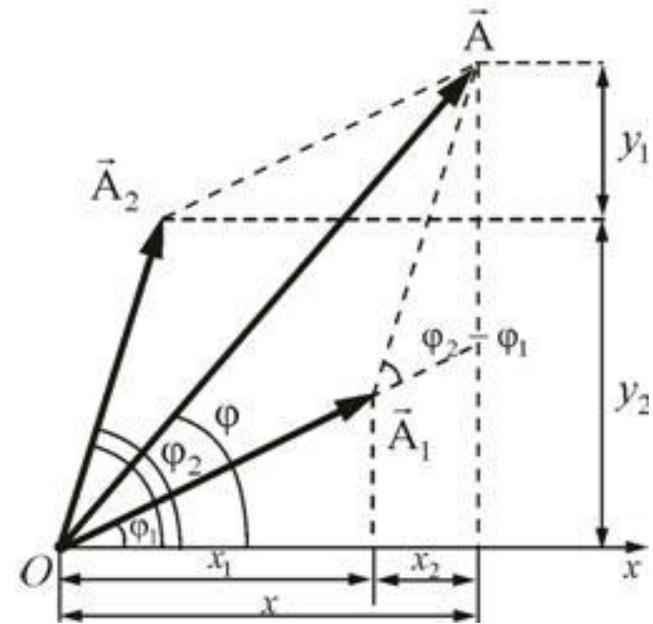
- Приведённая длина всегда больше l ! Точка подвеса и центр качения лежат по разные стороны от центра инерции.

- Период колебаний:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l_{\text{пр}}}{g}}$$

Метод векторных диаграмм

- Пусть точка одновременно участвует в двух гармонических колебаниях одинакового периода, направленных вдоль одной прямой.
- Пусть колебания заданы уравнениями:
$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \phi_1)$$
$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \phi_2)$$



- Отложим из точки O вектор под углом ϕ_1 и вектор под углом ϕ_2 . Оба вектора вращаются против часовой стрелки с одинаковой угловой скоростью ω , поэтому их разность фаз не зависит от времени. Такие колебания называют когерентными.
- Суммарная проекция вектора \mathbf{A} равна сумме проекций на ось: результирующее колебание изображено вектором амплитуды $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$, вращающимся вокруг точки O с угловой скоростью ω .
- Результирующее колебание : $x = A \cos(\omega t + \phi)$

- По правилу сложения векторов, суммарная амплитуда:

$$\begin{aligned}
 A^2 &= (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + y_1^2 + 2y_1y_2 + y_2^2 = \\
 &= A_1^2 \cos^2 \phi_1 + 2A_1A_2 \cos \phi_1 \cos \phi_2 + A_2^2 \cos^2 \phi_2 + A_1^2 \sin^2 \phi_1 + \\
 &\quad + 2A_1A_2 \sin \phi_1 \sin \phi_2 + A_2^2 \sin^2 \phi_2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \times \\
 &\times \left[\frac{1}{2} \cos(\phi_2 - \phi_1) - \frac{1}{2} \cos(\phi_2 + \phi_1) + \frac{1}{2} \cos(\phi_2 - \phi_1) + \frac{1}{2} \cos(\phi_2 + \phi_1) \right] = \\
 &= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\phi_2 - \phi_1).
 \end{aligned}$$

- Результирующая амплитуда: $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\phi_2 - \phi_1)$

- Начальная фаза: $\operatorname{tg} \phi = \frac{A_1 \sin \phi_1 + A_2 \sin \phi_2}{A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2}$

- Таким образом, тело, участвуя в двух гармонических колебаниях одного направления и одинаковой частоты, совершает также гармоническое колебание в том же направлении и с той же частотой, что и складываемые колебания.

- Амплитуда A результирующего колебания зависит от разности начальных фаз $\phi_2 - \phi_1$.

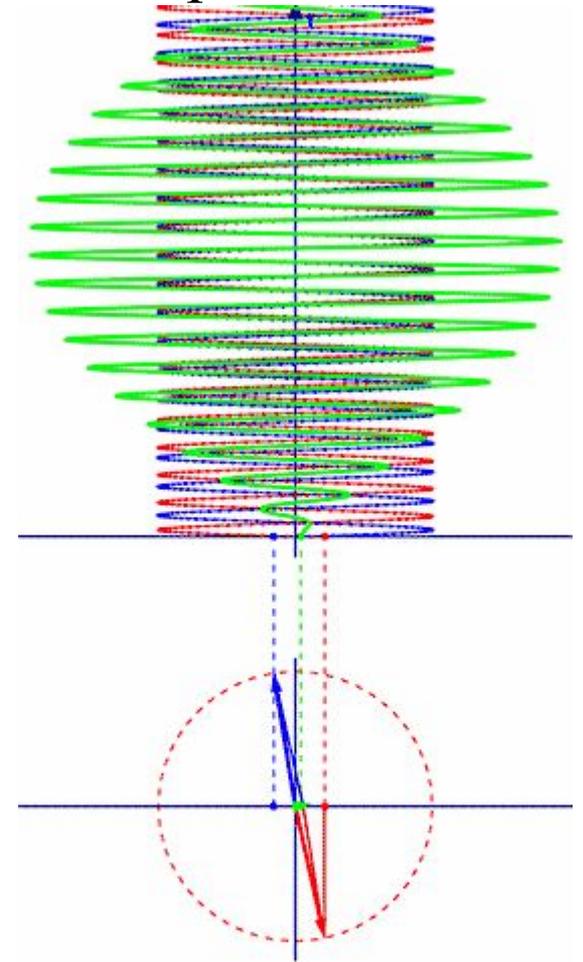
- При сложении двух гармонических колебаний одинакового направления и одинаковой частоты результирующее движение можно рассматривать как гармонические колебания с пульсирующей амплитудой - биения

- ω и a – частота и амплитуда 1-ого колебания
- $\omega + \Delta\omega$ и a - частота и амплитуда 2-ого колебания, $\Delta\omega \ll \omega$
- Уравнения:

$$x_1 = a \cos \omega t,$$

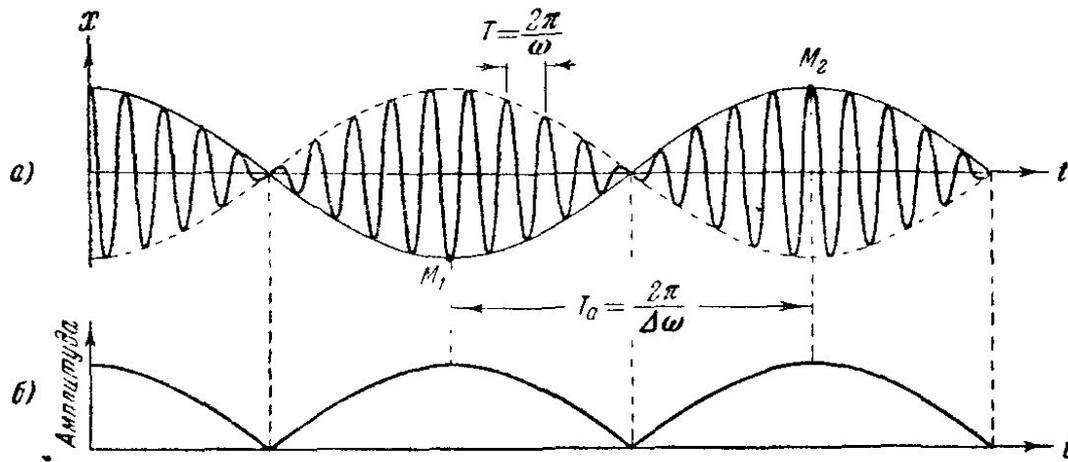
$$x_2 = a \cos (\omega + \Delta\omega) t \blacktriangleright$$

$$x = x_1 + x_2 = \left(2a \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right) \cos \omega t$$



$$U(t) = U_0 [\sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t)]$$

$$\frac{|\omega_1 - \omega_2|}{\omega_1} \ll 1$$



- Амплитуда положительная величина:

$$\text{амплитуда} = \left| 2a \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right|$$

- - это есть периодическая функция с частотой $\Delta\omega$. Частота пульсаций амплитуды называют частотой биения, равной разности частот складываемых колебаний.

Сложение двух взаимноперпендикулярных колебаний

- Два колебания с частотой ω совершаются в направлении осей x и y . Начальная фаза первого колебания равна 0.
- Уравнения колебаний:

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos \omega t, \\ y &= b \cos (\omega t + \alpha), \end{aligned} \right\}$$

- α – разность фаз колебаний

- Преобразуем:

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos \omega t, \\ y &= b \cos (\omega t + \alpha), \end{aligned} \right\} \Rightarrow \cos \omega t = \frac{x}{a} \Rightarrow \sin \omega t = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{y}{b} = \frac{x}{a} \cos \alpha - \sin \alpha \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \Rightarrow$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} \cos \alpha = \sin^2 \alpha$$

- Получили уравнение эллипса с осями вдоль x и y . Ориентация и величина полуосей эллипсов зависит от амплитуд a и b и разности фаз α

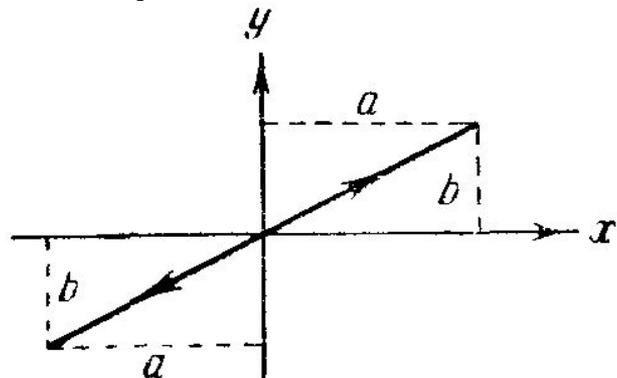
1) $\alpha = 0$

Уравнение:

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^2 = 0$$

$$y = \frac{b}{a}x$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \cos \omega t$$

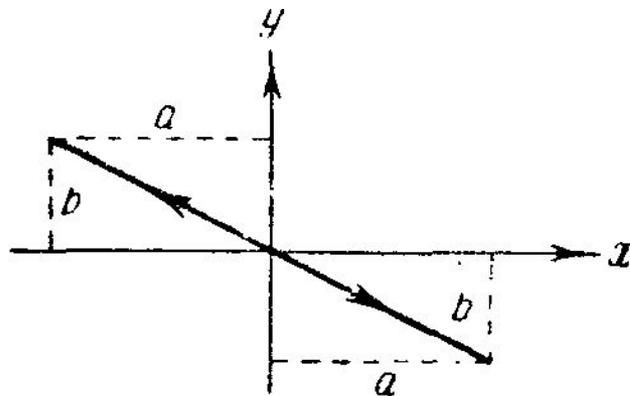


2) $\alpha = \pm \pi$

Уравнение:

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 = 0$$

$$y = -\frac{b}{a}x$$



Результирующее движение — гармонические колебания вдоль прямой с частотой ω и амплитудой: $\sqrt{a^2 + b^2}$

3) $\alpha = \pm \pi/2$ - Уравнение: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\alpha = \pi/2$

Уравнение:

$x = a \cos \omega t,$

$y = -b \sin \omega t.$

Движение по часовой стрелке

$\alpha = -\pi/2$

Уравнение:

$x = a \cos \omega t,$

$y = b \sin \omega t.$

Движение против часовой стрелки



• Равномерное движение по окружности есть сумма двух взаимно перпендикулярных колебаний:

• «+» - против часовой стрелки,

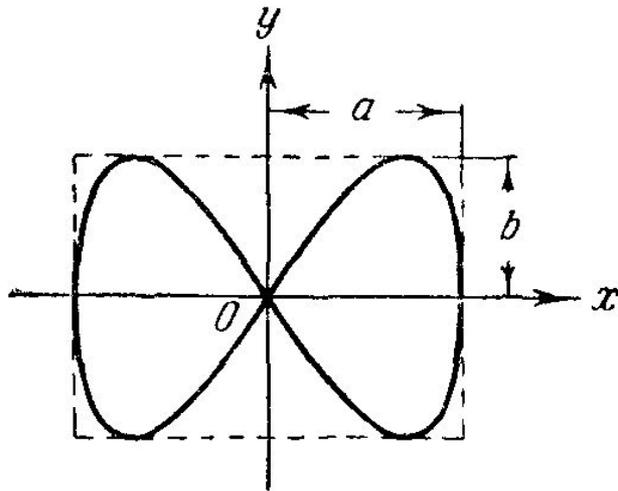
• «-»-по часовой стрелки.

$$\left. \begin{aligned} x &= R \cos \omega t, \\ y &= \pm R \sin \omega t \end{aligned} \right\}$$

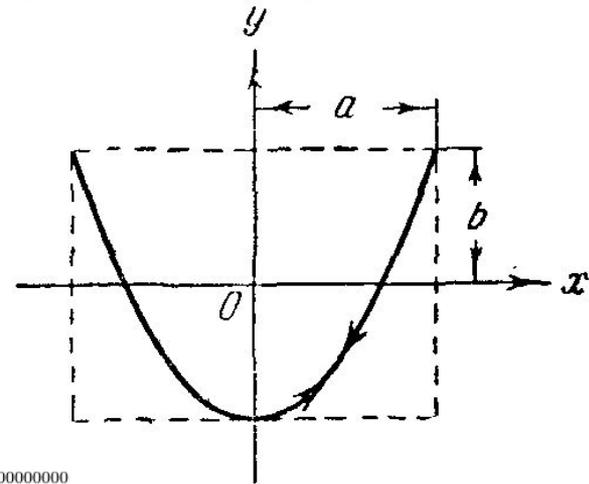
Фигуры Лиссажу:

- - замкнутые траектории, прочерчиваемые точкой, совершающей одновременно два гармонических колебания в двух взаимно перпендикулярных направлениях с разными частотами.

Отношение частот 1:2
и разность фаз $\pi/2$



Отношение частот 1:2
и разность фаз 0



a/b – от 0 до 1
разность фаз 0

