

План проведения занятия по теме

Функции и их свойства



**Скуднева Оксана
Валентиновна**

Образование: МГТУ им. Н. Э. Баумана, специальность
«Системы автоматического управления»;

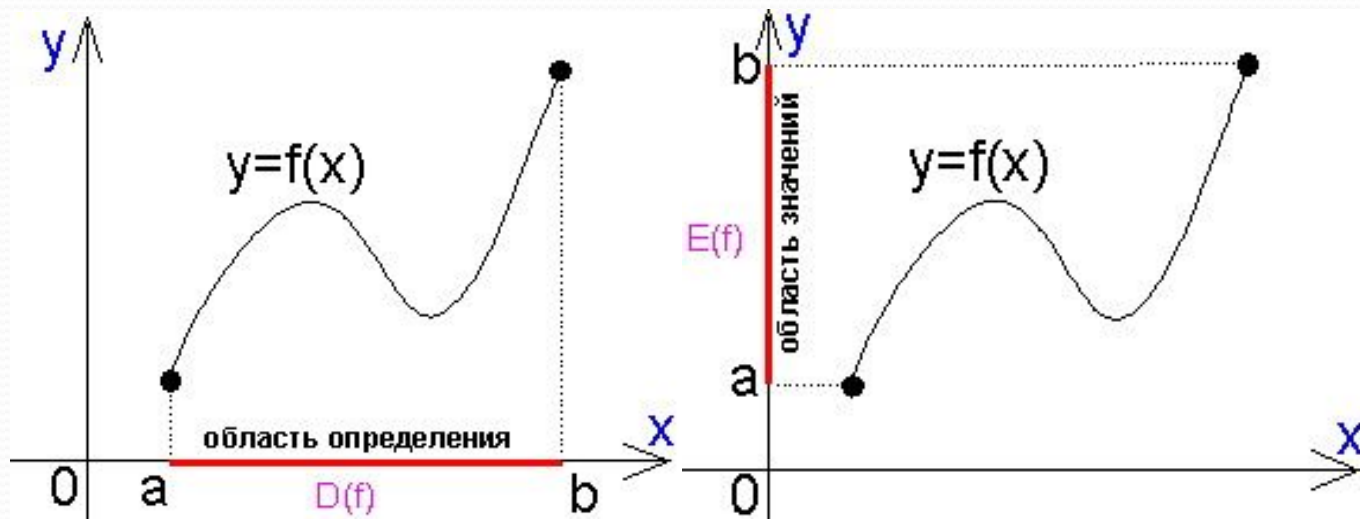
МГУ им. М. В. Ломоносова, специальность
«Математика. Прикладная математика».

Место работы: МГТУ им. Н. Э. Баумана, НУК ФН, кафедра
«Вычислительная математика и математическая физика»,
должность – старший преподаватель.

Опыт работы: средняя школа, 2002-2011 гг., факультативные
курсы по подготовке к Олимпиадам МГТУ им. Н. Э. Баумана
«Шаг в будущее», «Олимпиада Жуковского», ЕГЭ по математике,
основной курс алгебры физ-мат. класса.

Основные понятия и определения.

Закон, ставящий каждому элементу из множества X (область определения - $D(f)$), не более одного элемента из множества Y , (область значений - $E(f)$), называется числовой функцией $y=f(x)$.



Способы задания функции

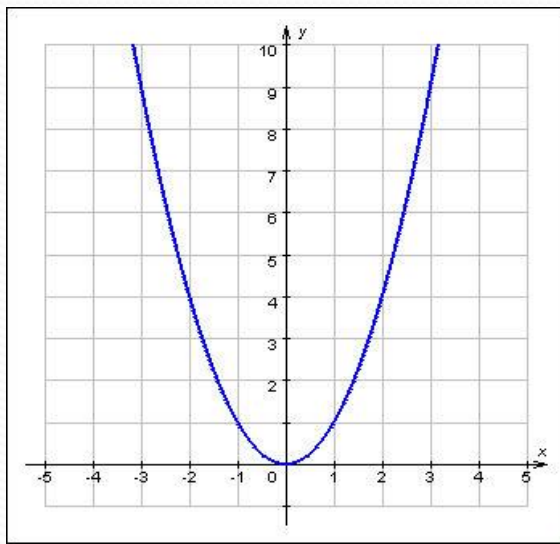
1) табличный

Пример:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y=f(x)	16	9	4	1	0	1	4	9	16

2) Графический

Пример:



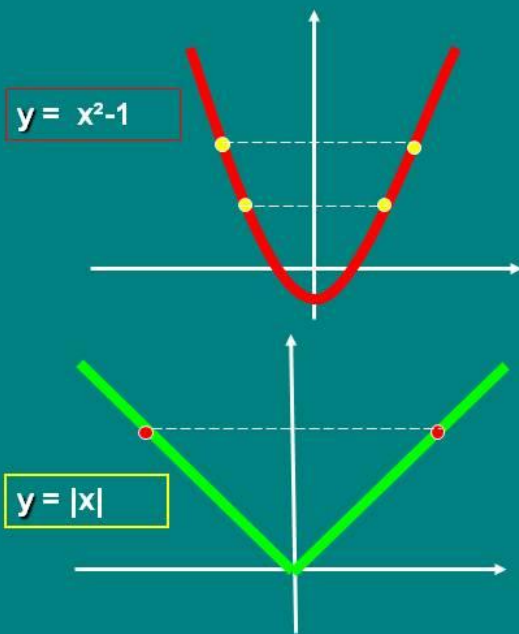
3) аналитический(формулой):

Пример: $y = x^2$

Если область определения функции $D(f)$ симметрична относительно начала координат, и для каждого значения $x \in D(f)$ выполняется условие $f(-x) = f(x)$, функция называется **чётной**. График чётной функции симметричен относительно оси OY .

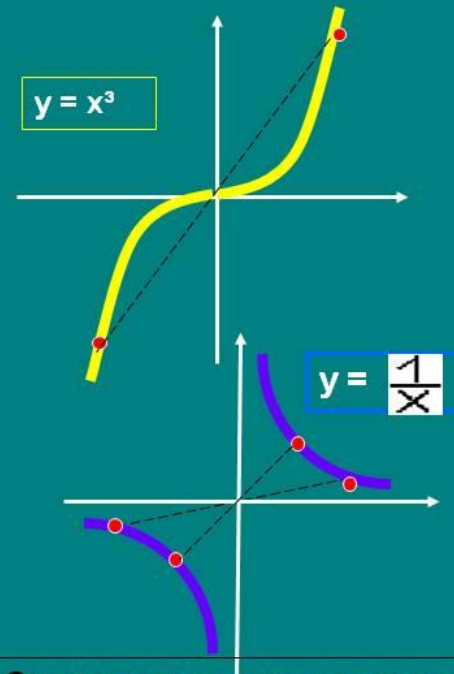
Если область определения функции $D(f)$ симметрична относительно начала координат, и для каждого значения $x \in D(f)$ выполняется условие $f(-x) = -f(x)$, функция называется **нечётной**. График нечётной функции симметричен относительно начала координат.

Чётные функции



Симметрия относительно оси Oy

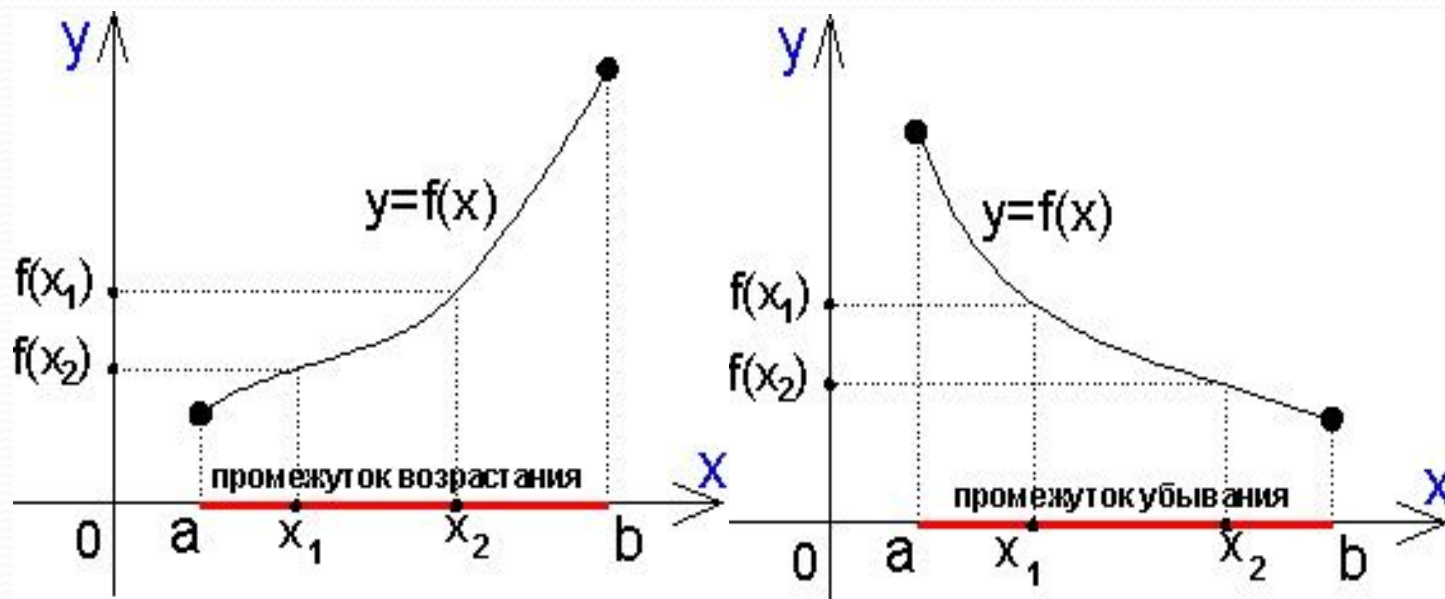
Нечётные функции



Симметрия относительно
начала координат

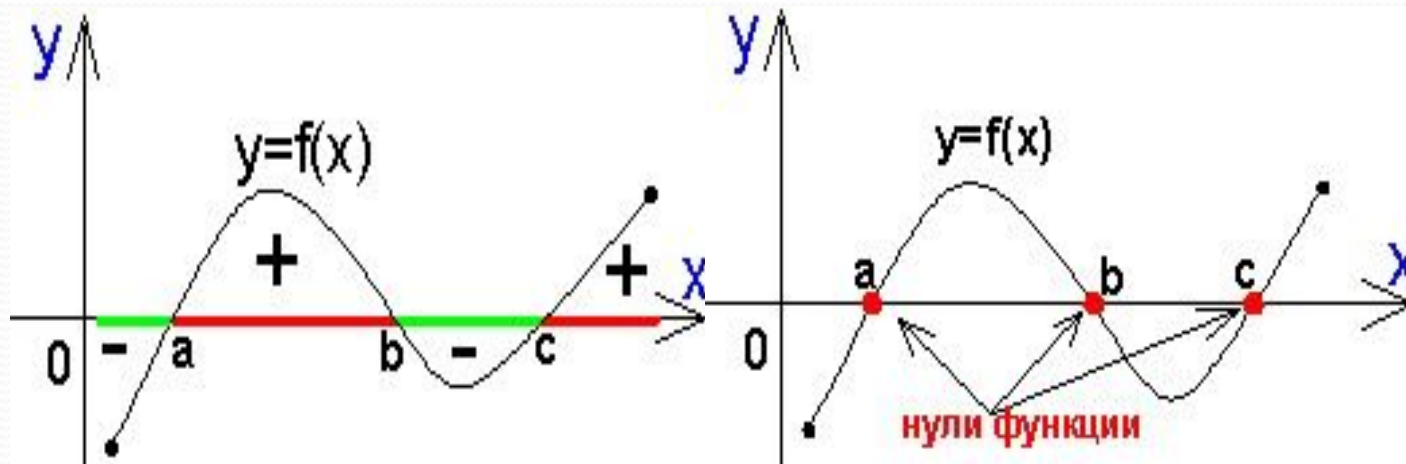
Если для любых x_1 и x_2 , причём $x_2 > x_1$, выполняется условие $f(x_2) > f(x_1)$, то говорят, что функция $y = f(x)$ **возрастает** на интервале $(a; b)$.

Если для любых x_1 и x_2 , причём $x_2 > x_1$, выполняется условие $f(x_2) < f(x_1)$, то говорят, что функция $y = f(x)$ **убывает** на интервале $(a; b)$.

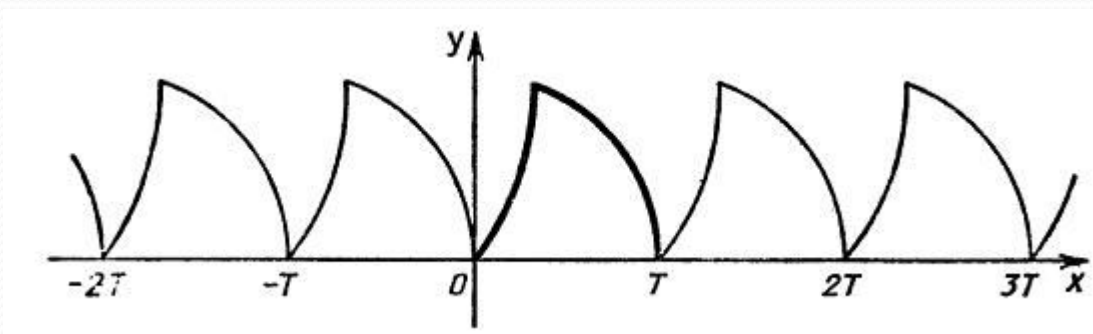


Возрастание и убывание функции объединяется понятием **монотонности**.

Если на промежутке области определения функция имеет значения одного знака (плюс или минус), такой интервал называется промежутком знакопостоянства функции. Числа, в которых значение функции равно нулю, называются нулями функции.



Если существует положительное число T , такое, что на всей области определения выполняется равенство $f(x+T) = f(x)$, то функция называется периодической, а число T – периодом.

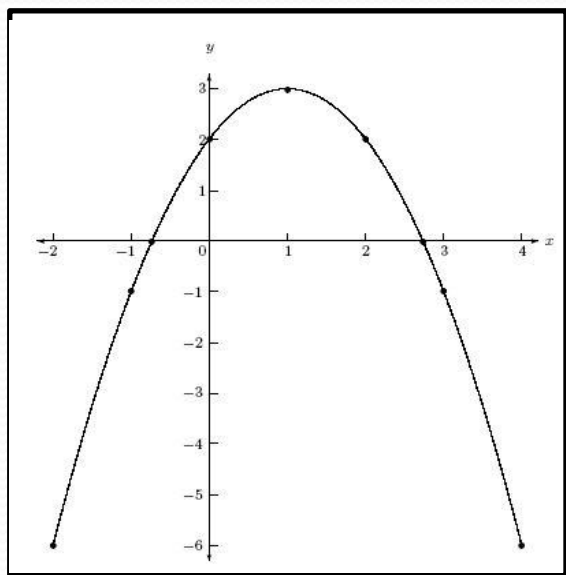


Ограниченные функции.

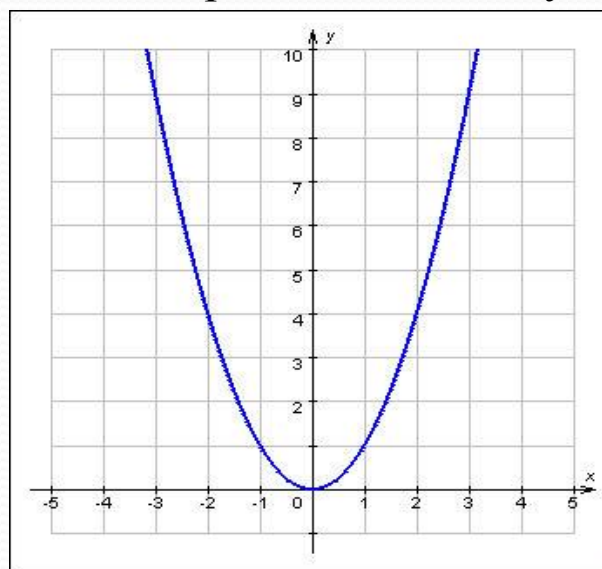
Функция $f(x)$ называется ограниченной сверху (снизу) на множестве X , если

$$\exists M(m) \in \mathbb{R} \forall x \in X \Rightarrow f(x) \leq M \ (f(x) \geq m).$$

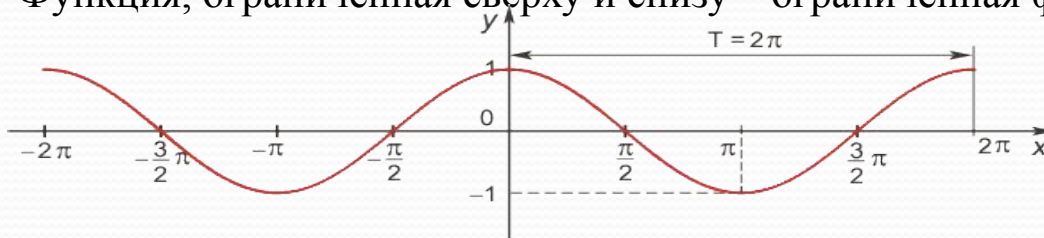
Пример. Функция, ограниченная сверху:



Функция, ограниченная снизу:

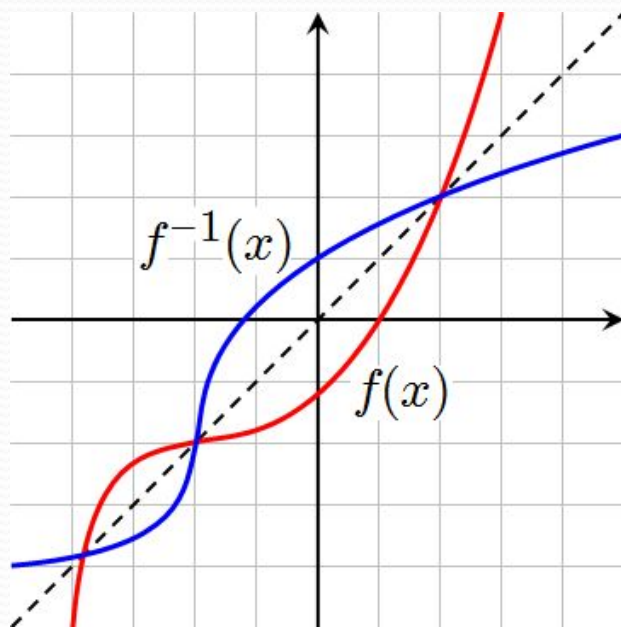


Функция, ограниченная сверху и снизу – ограниченная функция.



Обратная функция.

Пусть на множестве X определена строго монотонная функция $y = f(x)$, осуществляющая отображение $x \rightarrow y$ обратной функцией к ней, $x = f^{-1}(y)$ называется функция, осуществляющая отображение $y \rightarrow x$ такое, что для каждого $y \in \text{обл. значений}$ $f^{-1}(f(x)) = x$. Графики исходной и обратной функций, таким образом, симметричны относительно прямой $y = x$.

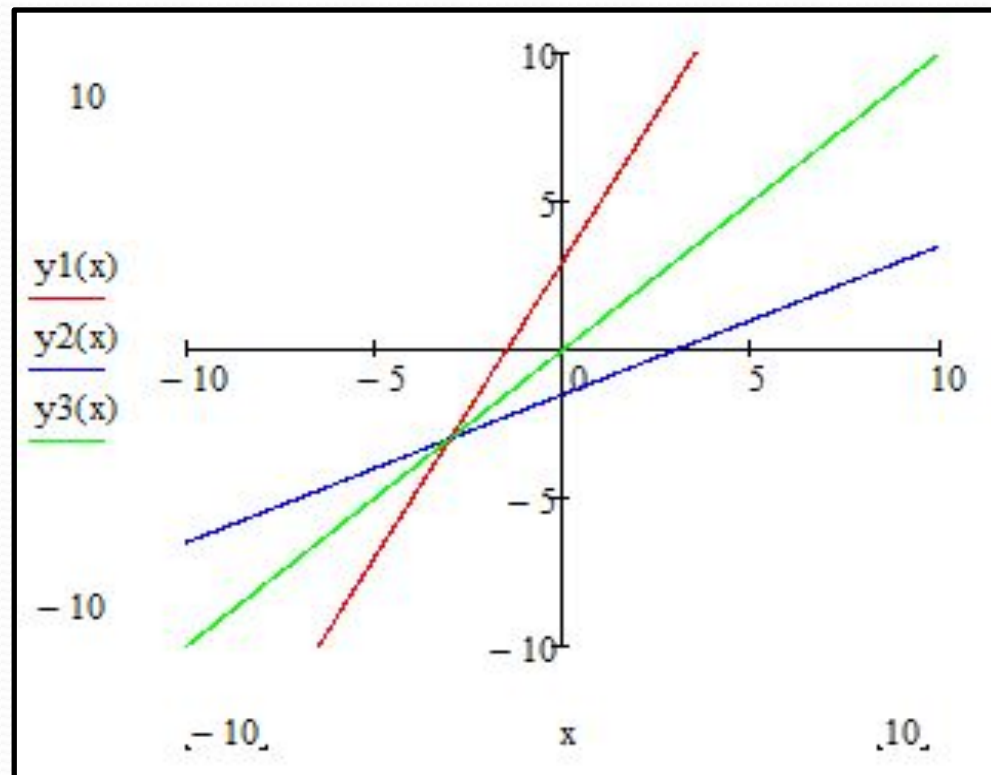


Чтобы получить обратную функцию:

- 1) Определить участки монотонности функции $y = f(x)$;
- 2) Для каждого участка монотонности составить функцию $x = f^{-1}(y)$;
- 3) Выразим из данного выражения переменную y , получим обратную функцию, $y = f^{-1}(x)$.

Пример.

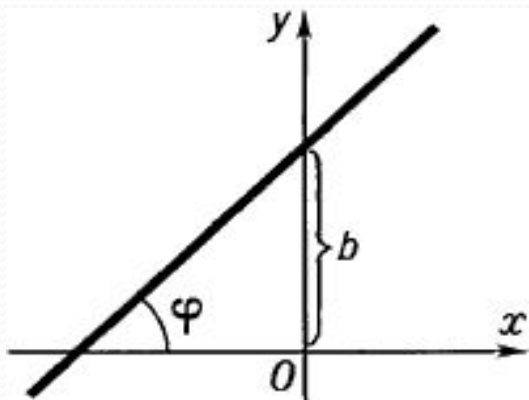
- 1) $y = 2x + 3$ возрастает на всей области определения $\text{обл. значений} = \mathbb{R}$;
- 2) Механически меняем местами переменные: $x = 2y + 3$;
- 3) выражаем переменную y : $y = \frac{x-3}{2}$. Это и есть обратная функция. Строим графики и убеждаемся в симметрии относительно прямой $y = x$.



Основные элементарные функции.

Линейная функция

$$y = kx + b$$



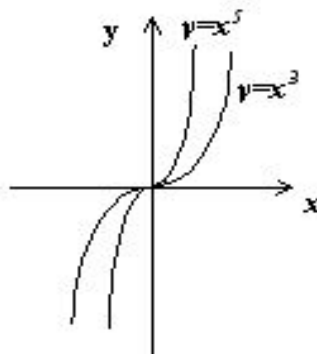
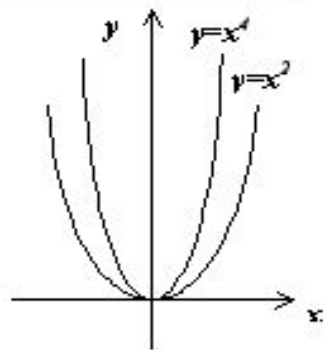
$[-\infty; +\infty] = \mathbb{R}$ - функция определена на всей числовой оси.

$$[-\infty; +\infty] = \mathbb{R}$$

$$[-\infty; +\infty] = [-\infty; +\infty]$$

Степенная функция.

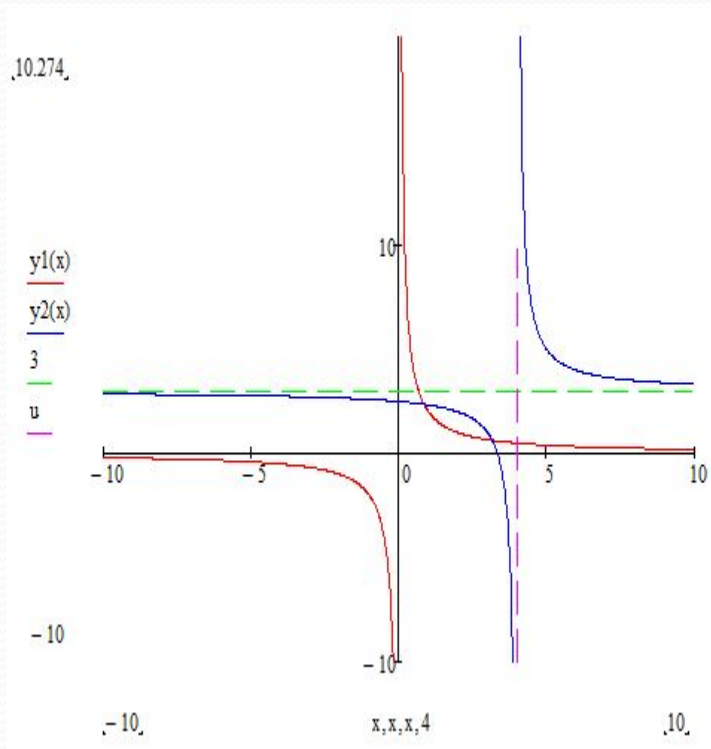
$$y = x^n$$



$n \in \mathbb{N}, n = 2k$ - чётное $[-\infty; +\infty] = \mathbb{R}, [-\infty; +\infty] = [0; +\infty]$

$n \in \mathbb{N}, n = 2k + 1$ - нечётное $[-\infty; +\infty] = \mathbb{R}, [-\infty; +\infty] = \mathbb{R}$

Дробно-рациональная функция.



$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x) + 0 \cdot q(x)}{q(x) + 0 \cdot q(x)}, \quad \frac{p(x)}{q(x)} \neq -\frac{p(x)}{q(x)}$$

Приводится к виду $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x)}{q(x)}$,

где $\frac{p(x)}{q(x)} = -\frac{p(x)}{q(x)}$, $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x)}{q(x)}$,

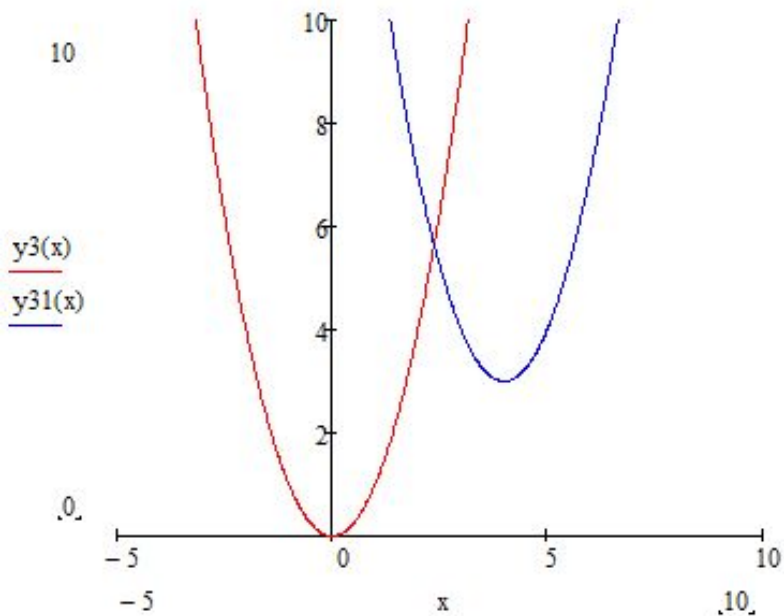
$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x) - p(x)}{q(x)}$$

Пример. $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{2}{x}$

$$\frac{p(x)}{q(x)} = 3 + \frac{2}{x-4}$$

Квадратичная функция.

$$y^2 = y^2 + y^2 + y^2$$



Приводится к виду

$$y^2 - y^2 = y^2 - y^2,$$

$$\text{где } y^2 = y^2 - \frac{y^2}{y^2},$$

$$y^2 = -\frac{y^2}{y^2}.$$

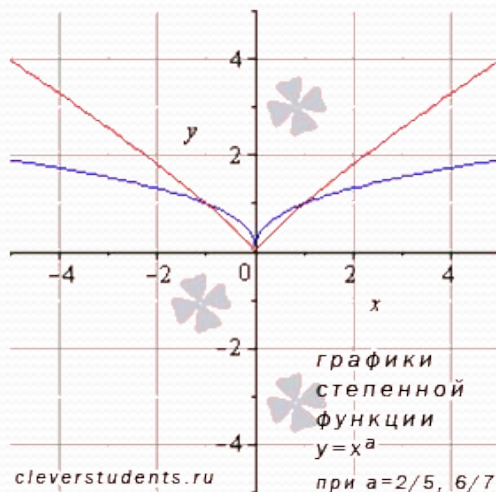
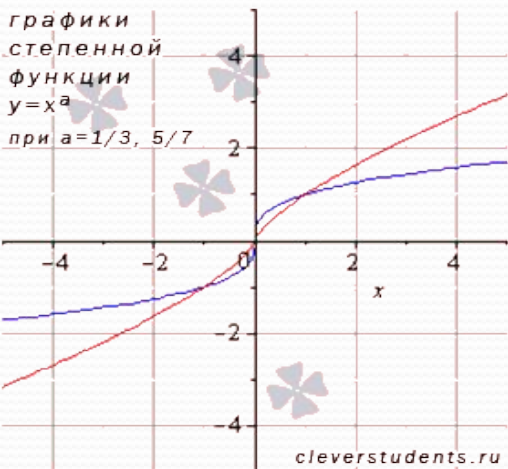
Пример. $y^2(x) = y^2,$

$$y^2(x) = 3 + y^2 - 4x^2$$

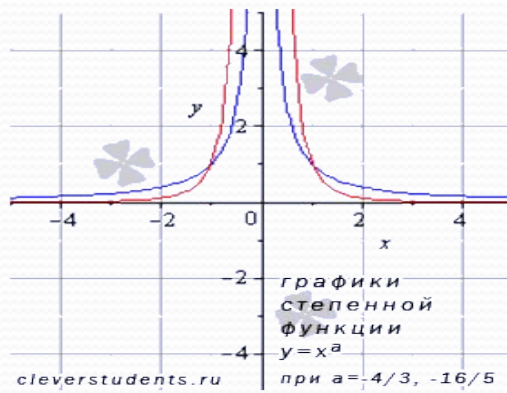
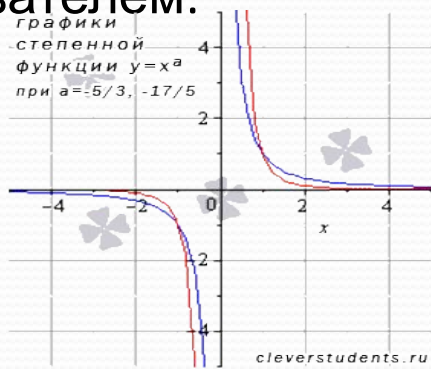
Степенные функции с рациональным показателем.

$$\frac{p}{q} = \frac{p}{q}$$

В зависимости от чётности p и q графики принимают вид:



Степенные функции с отрицательным рациональным показателем:



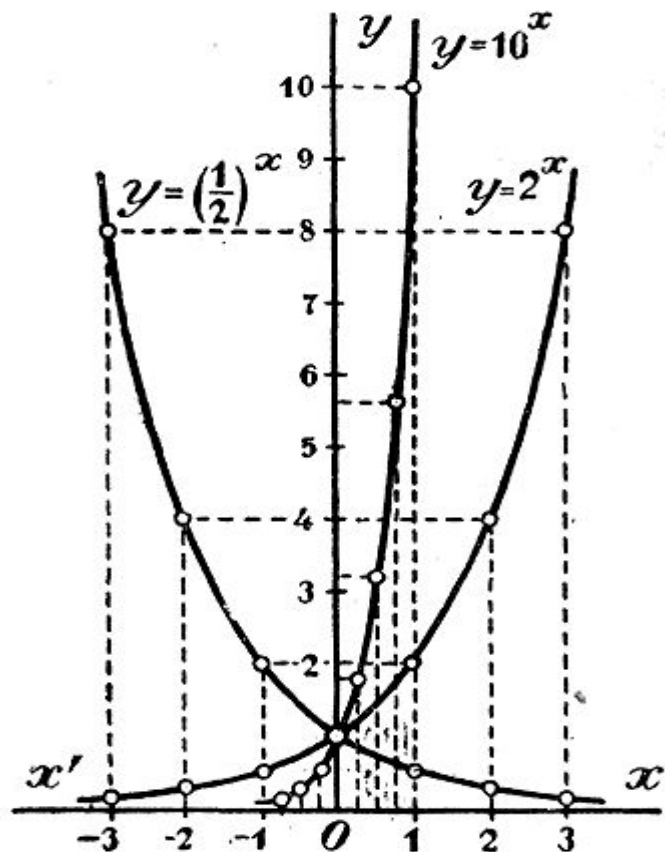
Показательная функция

$$a^x = \sqrt[x]{a}, a > 0, a \neq 1.$$

$$x \in \mathbb{R}, y \in [0, +\infty)$$

$a > 1$ возрастание на всей области определения.

$0 < a < 1$ убывание на всей области определения.



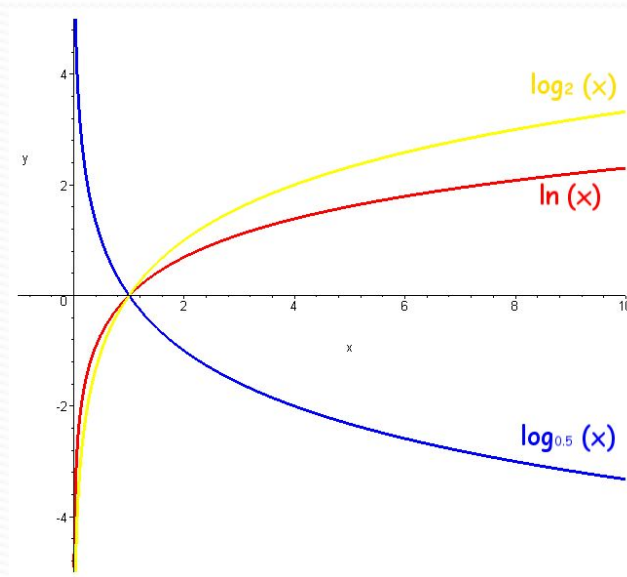
Логарифмическая функция. (Обратная к показательной)

$$a = \text{основание}, a > 0, a \neq 1$$

$$x \in (0, +\infty), y \in \mathbb{R}$$

$a > 1$ возрастание на всей области определения.

$a < 1$ убывание на всей области определения.

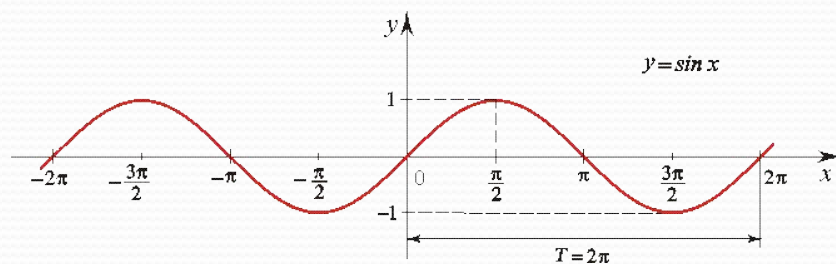


Тригонометрические функции .

$$\sin = \sin$$

$$\sin = \mathbb{R}, \sin = [-1, +1] \text{ нечётная,}$$

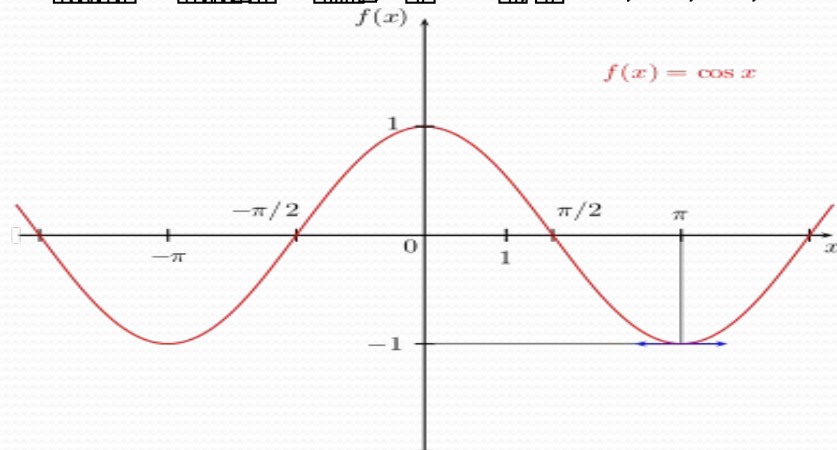
$$\sin = \sin + \sin, \sin = 2\pi, \sin = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$



$$\cos = \cos$$

$$\cos = \mathbb{R}, \cos = [-1, +1] \text{ чётная}$$

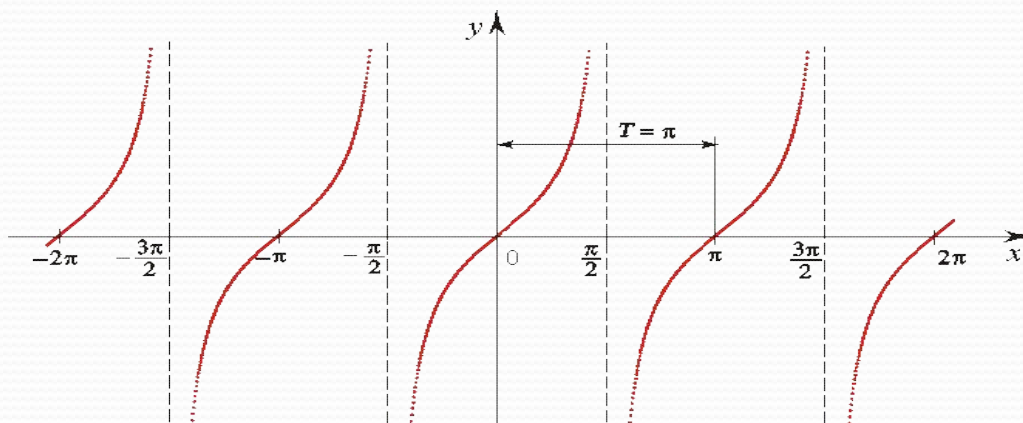
$$\cos = \cos + \cos, \cos = 2\pi, \cos = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$



$\sin x = \sin(-x)$ нечётная,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \dots, \quad \sin x \in \mathbb{R}, \quad x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

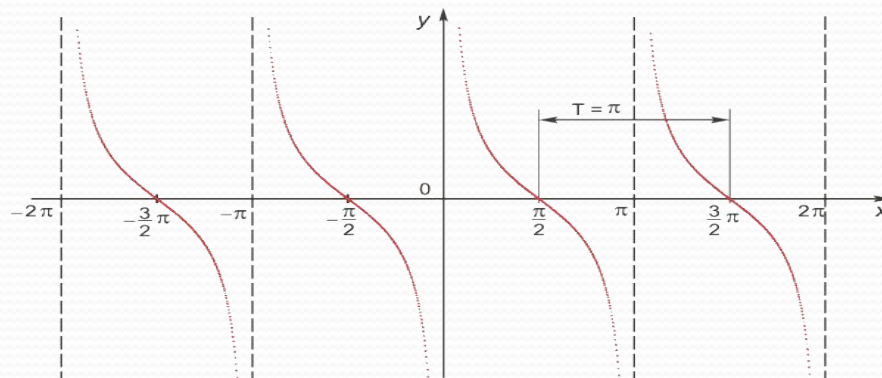
$$\sin x = \sin(x + 2\pi) + \sin x, \quad x = x \quad x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$



$\cos x = \cos(-x)$ чётная,

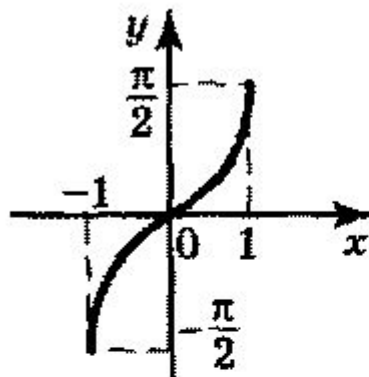
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \dots, \quad \cos x \in \mathbb{R}, \quad x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\cos x = \cos(x + 2\pi) + \cos x, \quad x = x \quad x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

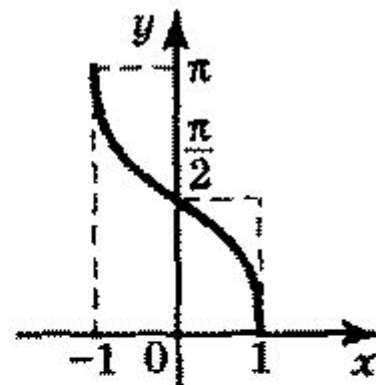


Обратные тригонометрические функции.

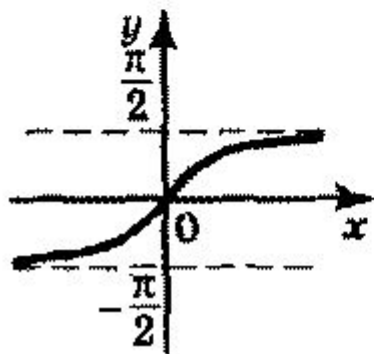
$$y = \arcsin x$$



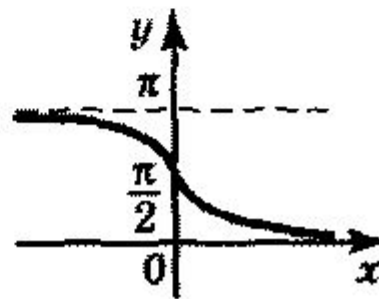
$$y = \arccos x$$



$$y = \operatorname{arctg} x$$

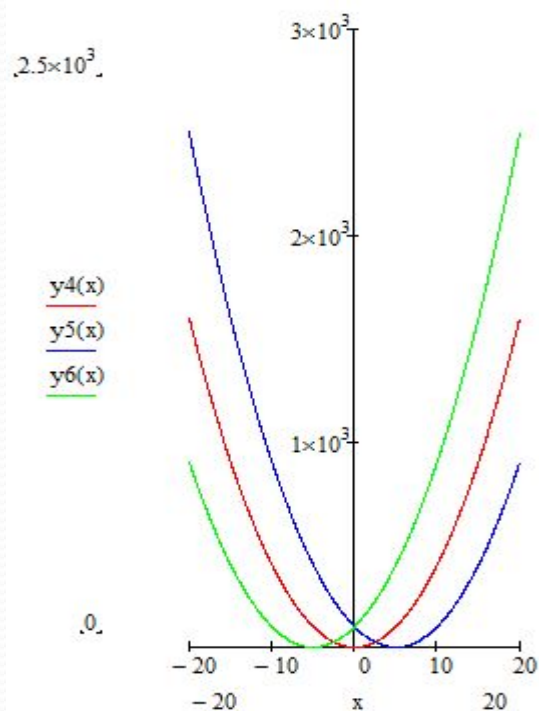


$$y = \operatorname{arcctg} x$$



Построение эскизов графиков функций.

Смещение вдоль оси абсцисс.



a - действительное положительное число.

$y(x) = f(x)$ - исходная функция.

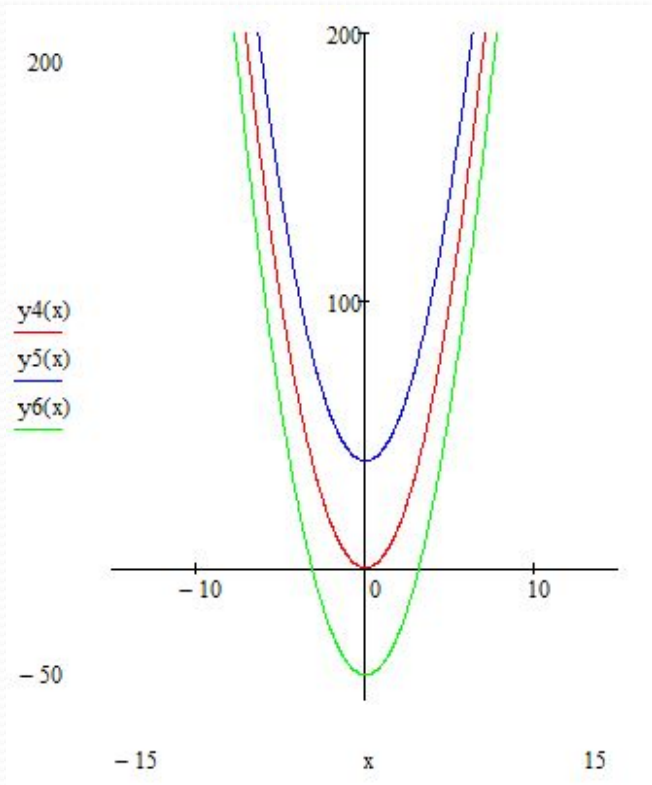
$y(x) = f(x - a)$ - смещение графика

$y(x) = f(x - a)$ на a единиц вправо.

$y(x) = f(x + a)$ - смещение графика

$y(x) = f(x + a)$ на a единиц влево.

Смещение вдоль оси ординат.



b - действительное положительное число.

$y = f(x)$ - исходная функция.

$y = f(x) + b$ - смещение графика

$y = f(x)$ на b единиц вверх.

$y = f(x) - b$ - смещение графика

$y = f(x)$ на b единиц вниз.

Сжатие – растяжение вдоль оси абсцисс

$y = f(x)$ – исходная функция. k – действительное положительное число, превосходящее единицу. График функции $y = f(kx)$ – сжат в k раз по оси абсцисс

Пример. $y_4(x) = \sin 4x$ $y_5(x) = \sin \frac{x}{3}$

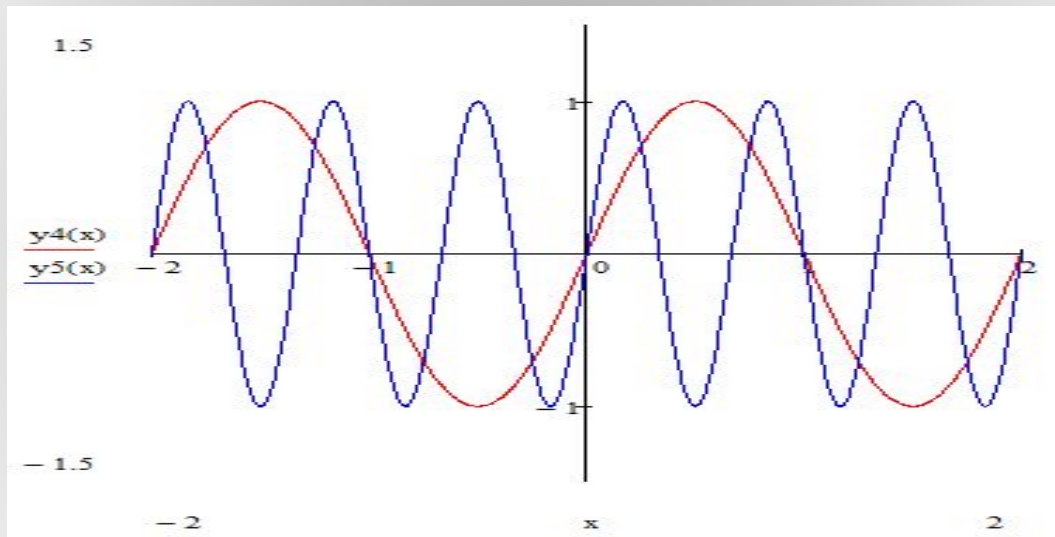
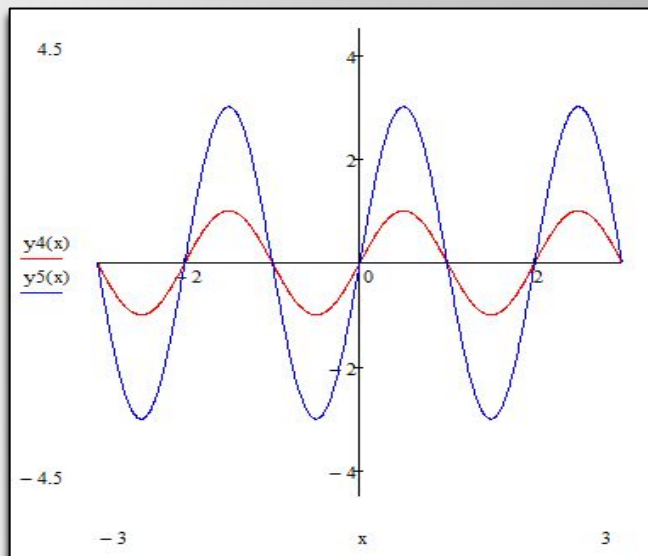


График функции $y = f(\frac{x}{k})$ – растянут в k раз по оси абсцисс.

Пример. $y_4(x) = \sin 4x$ $y_5(x) = \sin \frac{x}{3}$

—
—

Сжатие – растяжение вдоль оси ординат.



$y = f(x)$ - исходная функция. k - действительное положительное число, превосходящее единицу.

График функции $y = kf(x)$ - растянут в k раз по оси ординат.

Пример. $y_4(x) = \sin(x)$, $y_5(x) = 3\sin(x)$

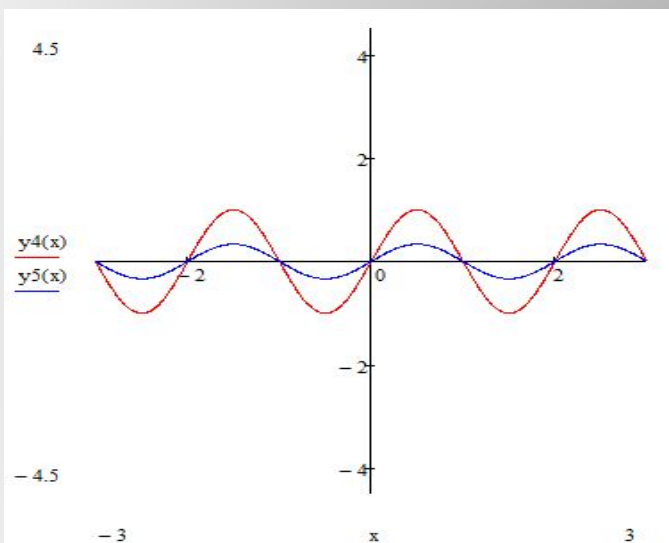


График функции $y = \frac{1}{k}f(x)$ - сжат в k раз по оси ординат.

Пример. $y_4(x) = \sin(x)$, $y_5(x) = \frac{1}{3}\sin(x)$

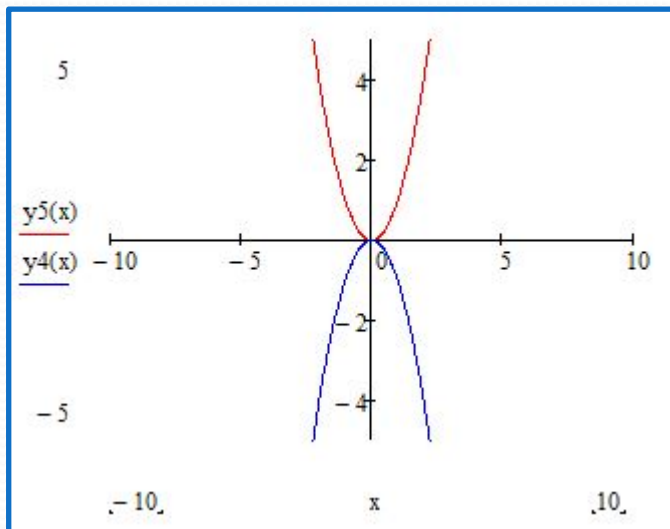
Отражения графиков.

$y = f(x)$ - исходная функция.

$y = f(-x)$ - исходная функция симметрично отражается относительно оси ординат.

Пример. $y = x^2 - 1$

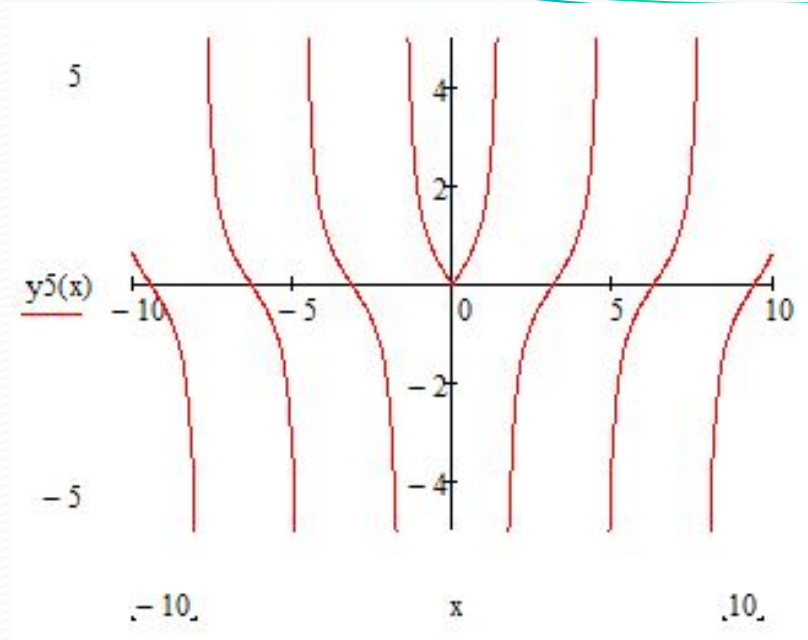
$$y = x^2 - 1$$



$y = -f(x)$ - исходная функция симметрично отражается относительно оси абсцисс.

Пример. $y = x^2$

$$y = -x^2$$



$y = f(x)$ - график исходной функции для $x \geq 0$ остаётся на прежнем месте, для $x < 0$ – заменяется на отражённую относительно оси ординат часть графика для $x \geq 0$.

Пример. $y = x^2 - 10$

Билет 1

1. Построить эскизы графиков функций:

А) $y = \frac{3x-3}{5x+7}$ Б) $y = \left| \frac{3x-3}{5x+7} \right|$; $y = f(g(x))$, $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = |x+2|$

В) $y = 5x^2 - 4x + 7$; Г) $y = 2x^2 - 6|x+2| + 5$; Д) $y = \frac{3|x|-3}{5|x|+7}$.

2. Определить вид монотонности функции $y = \frac{1}{(x+1)^2}$

(возр. или убывание) на отрезке: $x \in [3;7]$

3. Найти область определения функции

$$y = \frac{1}{\sqrt{x^2-2}} + \sqrt{\frac{3x^2+4x-4}{x+1}}$$

4. Найти обр.функцию $y = 6 - 3x$