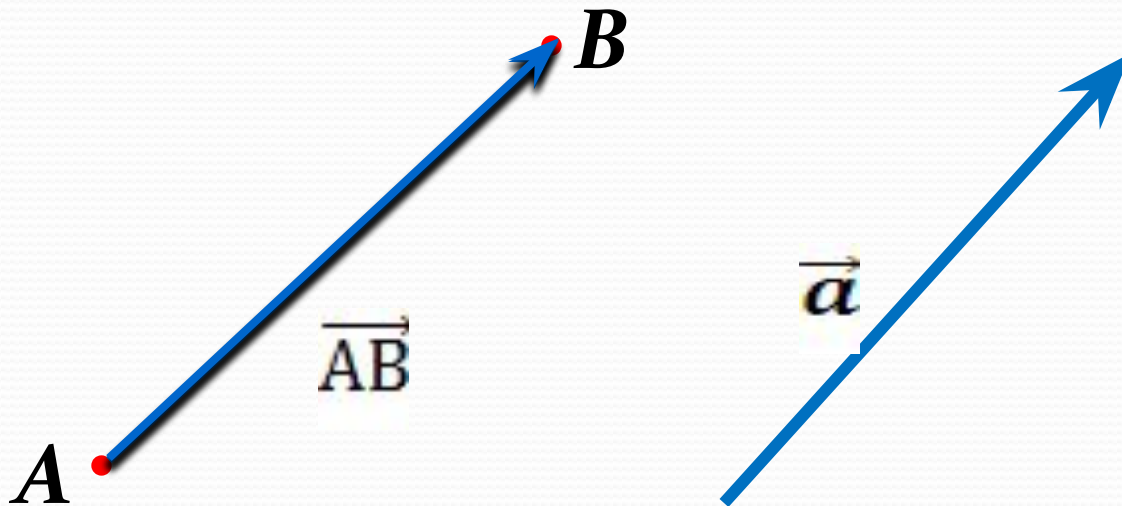


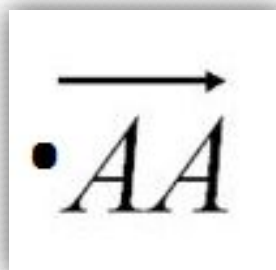
Элементы линейной алгебры

*Векторы на плоскости и в
пространстве*

Вектором [От латинского *vector* – везущий, несущий] называется направленный отрезок, т. е. отрезок, для которого указано, какая из концевых его точек считается началом, какая – концом отрезка.



Направленный отрезок, начало и конец которого совпадают, называют **нулевым вектором** и обозначают $\vec{0}$ или $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{BB}$. На чертеже нулевой вектор изображается одной точкой.

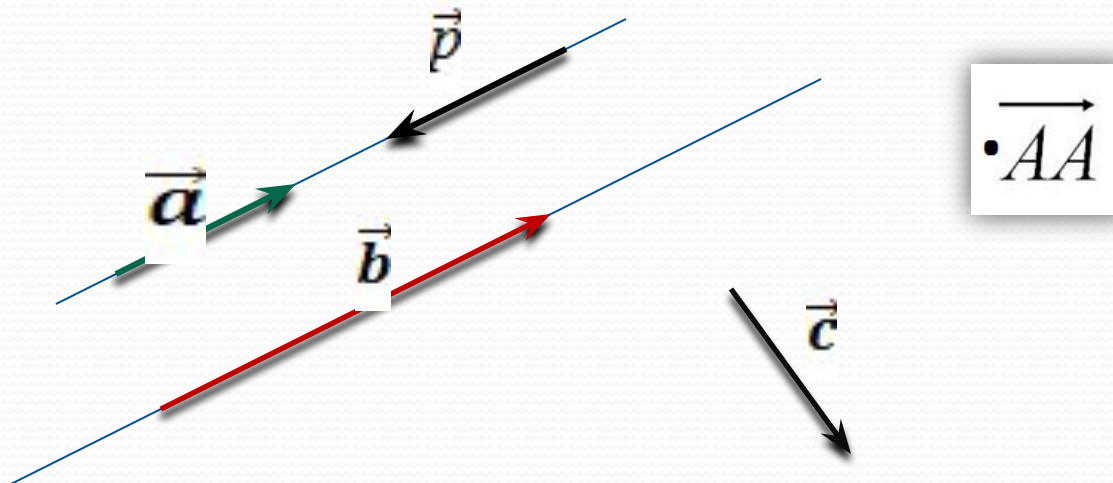


КОЛЛИНЕАРНЫЕ ВЕКТОРА

Векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых, называются **коллинеарными** [От латинского **con** – вместе и **linea** – линия, т.е. солинейные].

Коллинеарность векторов обозначается $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$, $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

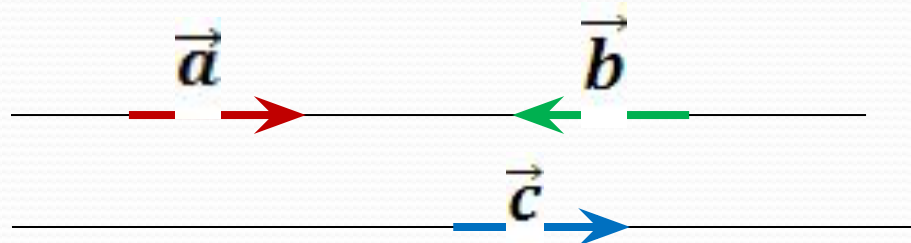
Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.



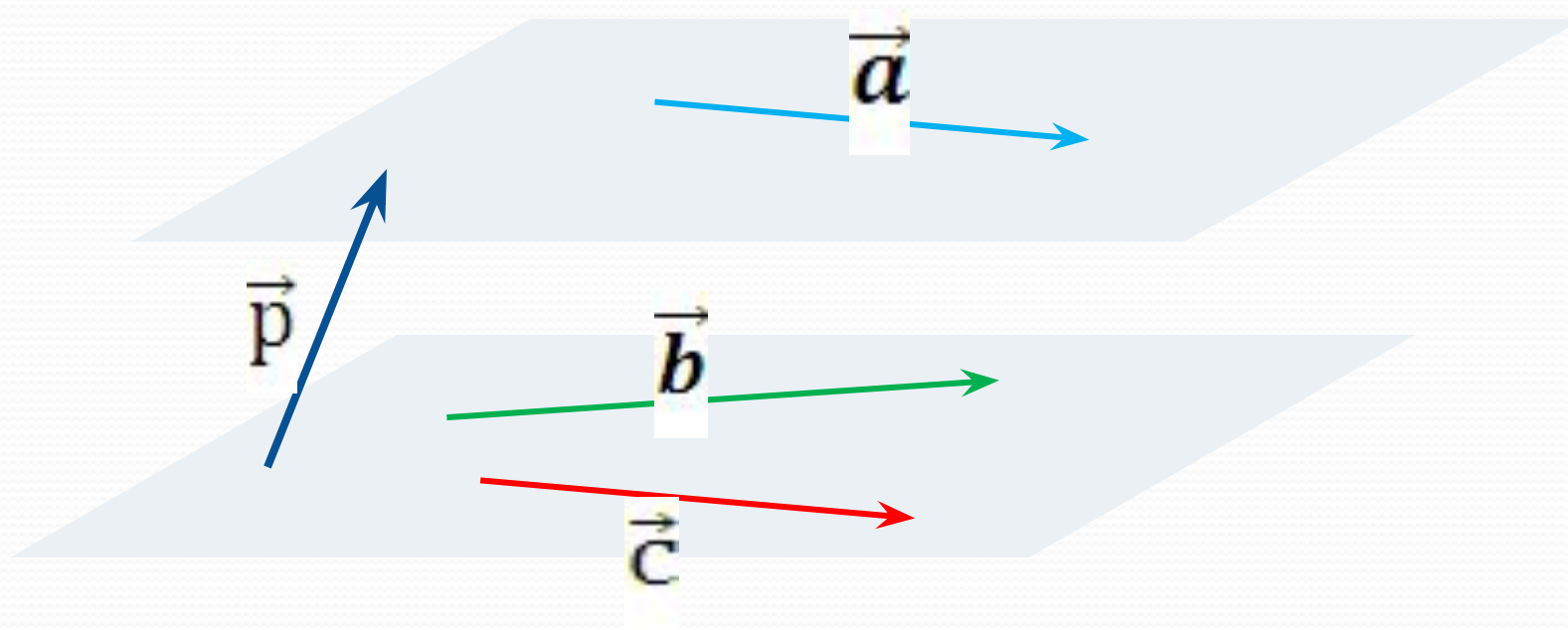
- Два ненулевых коллинеарных вектора могут иметь одно и то же направление ($\vec{a}$ и $\vec{c}$) или противоположные направления ($\vec{a}$ и $\vec{b}$).

сонаправленные векторы $\longrightarrow \vec{a} \uparrow \uparrow \vec{c}$

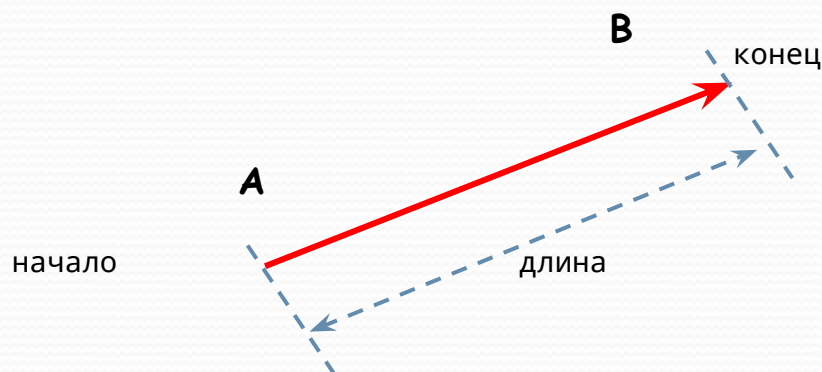
противоположно направленные векторы $\longrightarrow \vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$



Векторы, лежащие в одной плоскости или в параллельных плоскостях, называются **компланарными**.

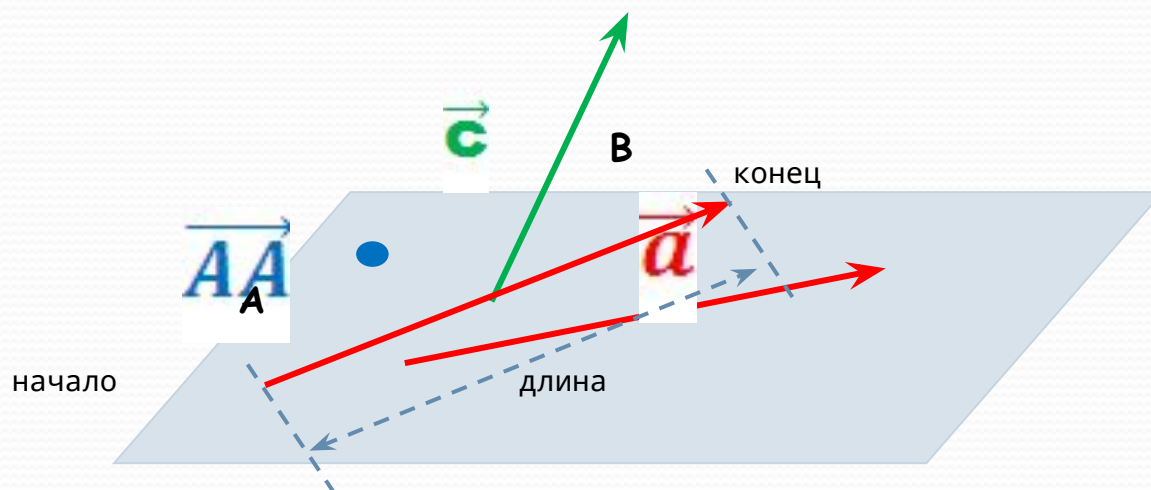


Длиной или модулем вектора называется длина отрезка, изображающего данный вектор.



Вектор называется **единичным** $\vec{e}$, если его модуль равен единице: $|\vec{e}| = 1$. Если дан какой-нибудь вектор $\vec{a}$, то единичный вектор $\vec{e}$ того же направления равен отношению вектора $\vec{a}$ на его модуль $|\vec{a}|$, то есть $\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$.

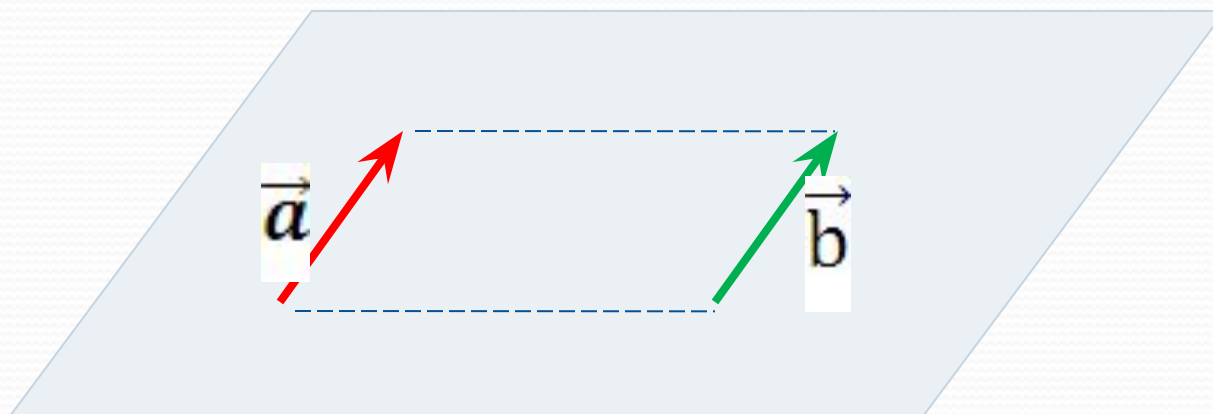
- Вектор характеризуется следующими элементами:
- 1) начальной точкой (точкой приложения);
- 2) направлением;
- 3) длиной («модулем вектора»).



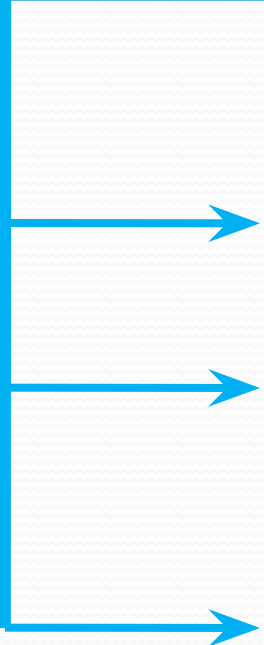
Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются **равными**, если выполняются следующие условия:

а) модули векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны $|\vec{a}| = |\vec{b}|$;

б) если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ненулевые, то они сонаправлены $\vec{a} \uparrow \vec{b}$



ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ



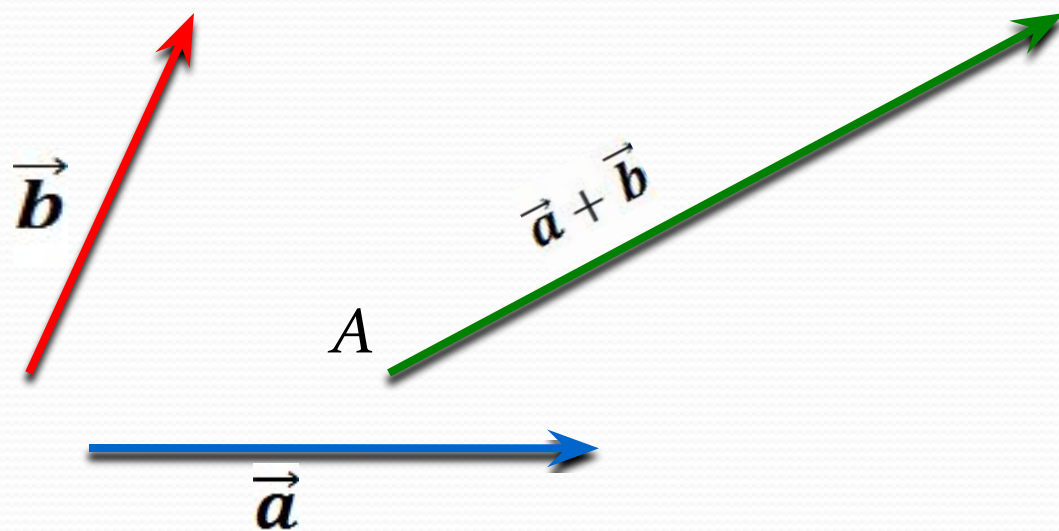
Сложение векторов

Вычитание векторов

Произведение ненулевого вектора
на действительное число

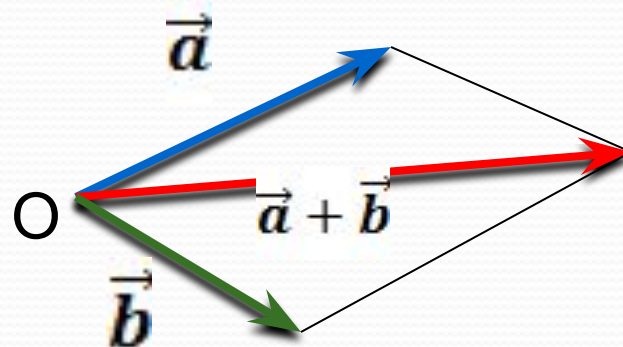
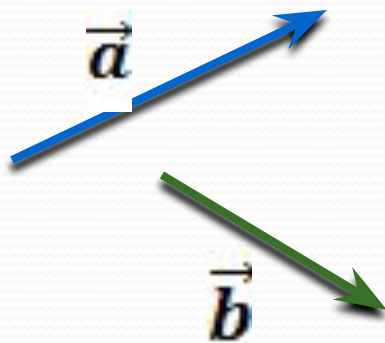
ПРАВИЛО ТРЕУГОЛЬНИКА

Правило треугольника. Суммой двух произвольных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется третий вектор $\vec{c}$, который получается следующим образом: от произвольной точки O откладывается вектор $\vec{a}$, затем от конечной точки вектора $\vec{a}$ откладывается вектор $\vec{b}$. Вектор $\vec{c}$, начало которого совпадает с началом $\vec{a}$, а конец с концом $\vec{b}$, образует сумму векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

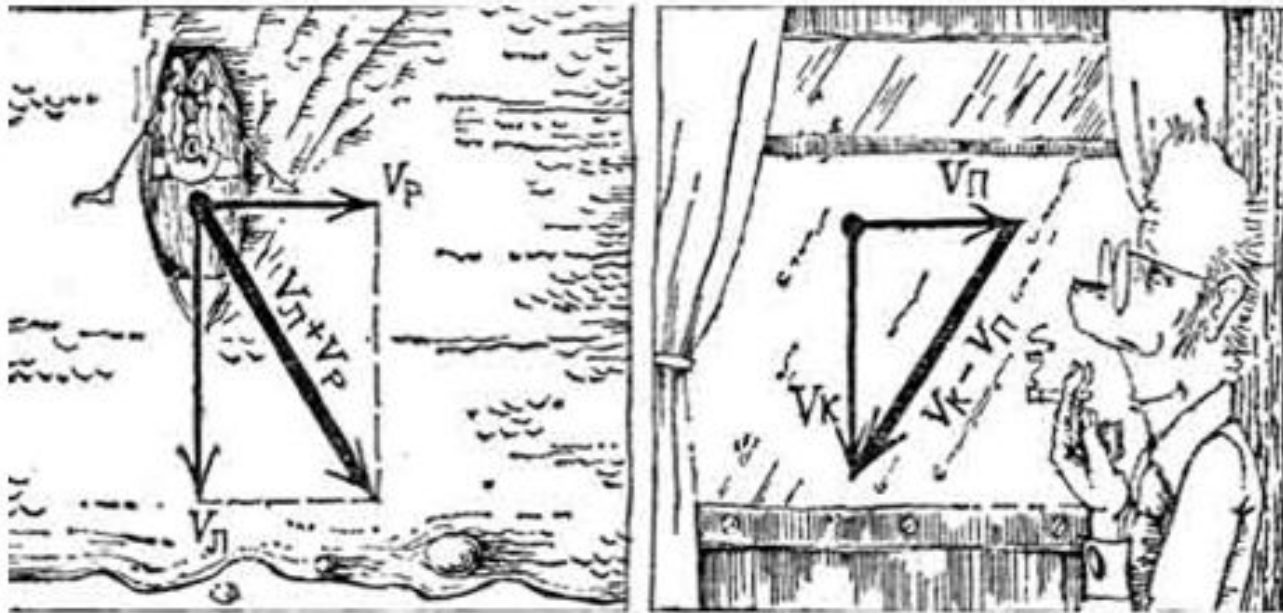


ПРАВИЛО ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

Суммой двух произвольных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется третий вектор $\vec{c}$, который получается следующим образом: от произвольной точки O откладываются векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, строится на этих векторах, как на сторонах, параллелограмм. Диагональ этого параллелограмма, выходящая из точки O является суммой двух данных векторов.

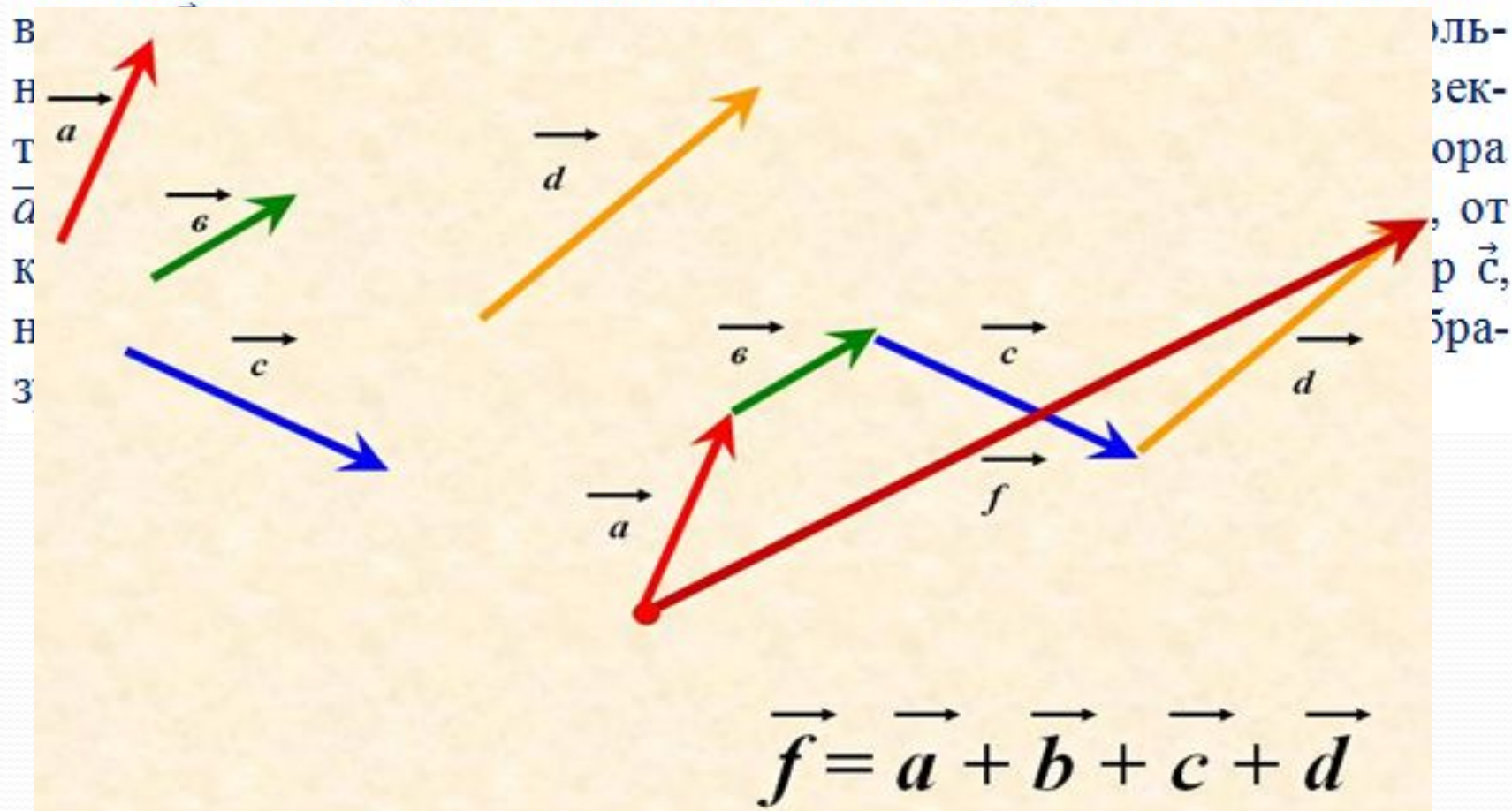


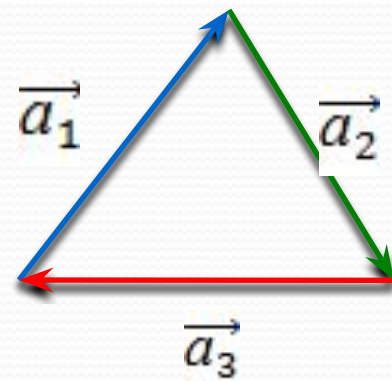
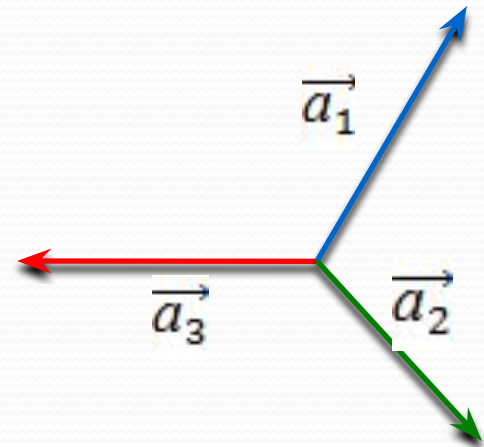
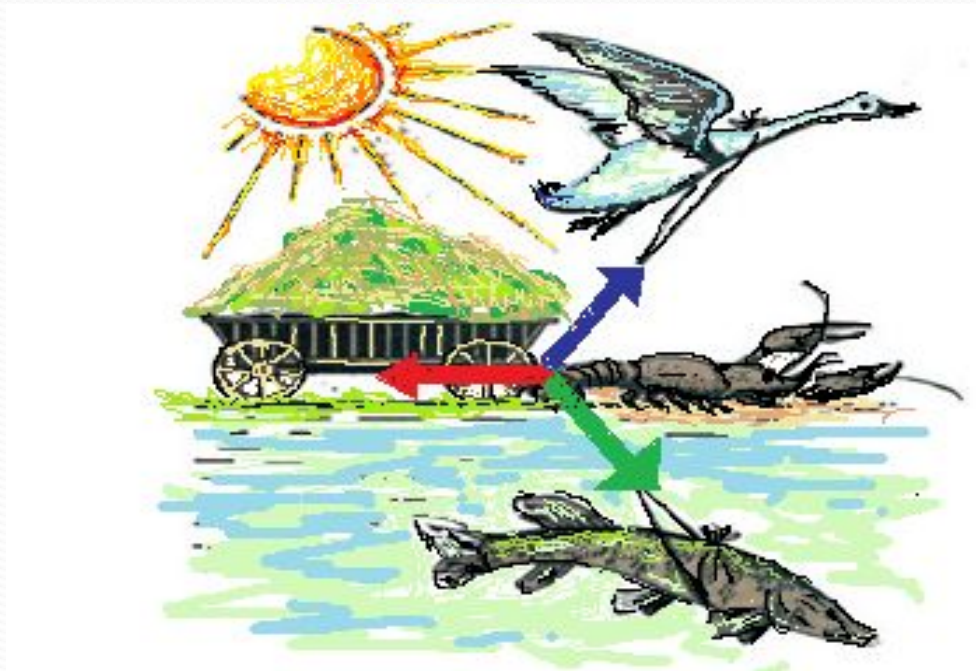
- **Пример.** Скорость – векторная величина, характеризующаяся быстротой движения (*модуль вектора скорости*) и направлением (*направление вектора скорости*) в данный момент времени. Необходимость в сложении скоростей возникает, когда объект участвует одновременно в двух движениях.



ПРАВИЛО МНОГОУГОЛЬНИКА

Суммой n произвольных векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ называется





Свойства суммы векторов:

1) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ (ассоциативность);

2) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ коммутативность);

3) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$;

4) $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

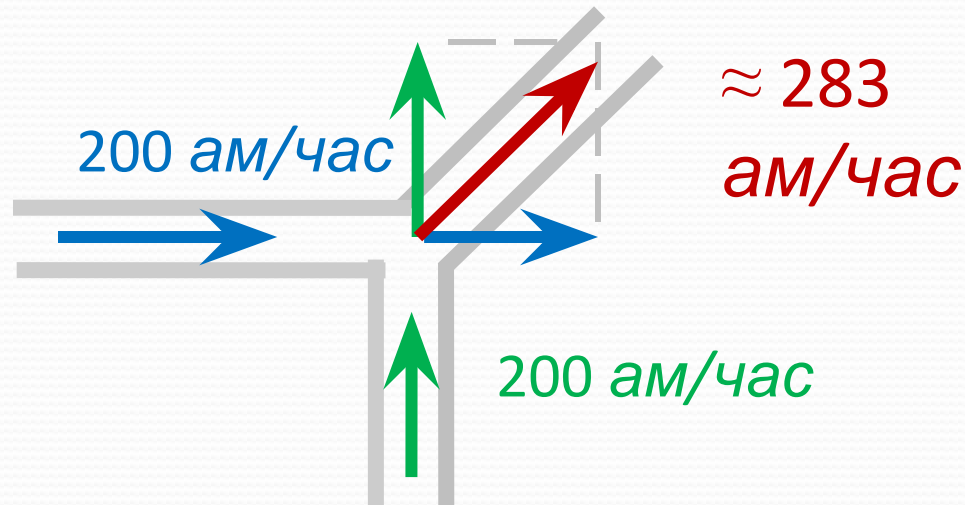
Поток автомобилей на

характеризуется

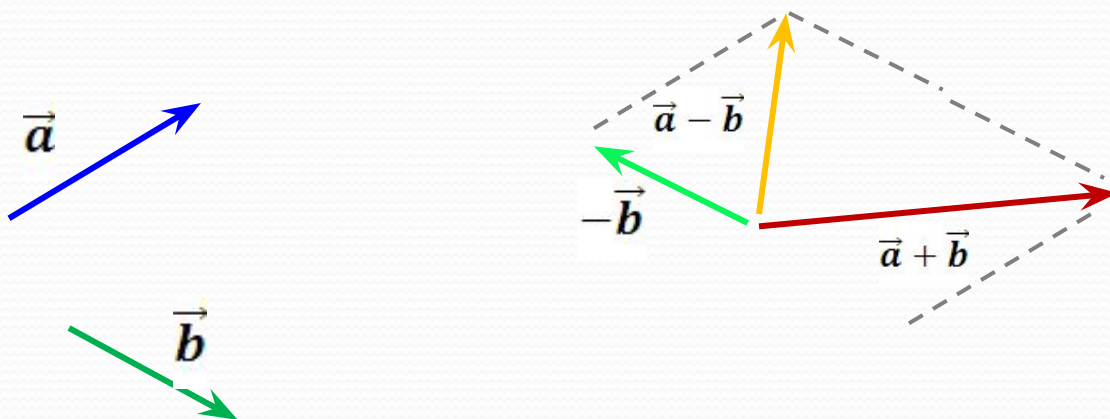
числом проходящих за единицу времени
автомашин

направлением

Рассмотрим перекресток трех дорог, на котором по двум дорогам сливаются два потока автомобилей по 200 автомашин в час на каждой.



Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{x}$ такой, что $\vec{x} + \vec{b} = \vec{a}$.



$$\vec{x} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

Задача. Самолёт летит относительно воздуха со скоростью $v_0 = 800$ км/ч.

Ветер дует с запада на восток со скоростью $u = 15$ м/с. С какой скоростью v самолёт будет двигаться относительно земли и под каким углом α к меридиану надо держать курс, чтобы перемещение было: на юг; на запад; на восток?

Решение. При движении самолета его скорость относительно земли равна сумме скоростей самолета относительно воздуха и ветра:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u}$$

Воспользовавшись правилом треугольника, найдем скорость самолета относительно земли при ее движении на юг, учитывая, что $u = 15 \text{ м/с} = 54 \text{ км/ч}$.

$$\begin{aligned} 1 \text{ м} &= 0,001 \text{ км}; \quad 1 \text{ сек} = \frac{1}{3600} \text{ часа.} \quad \text{Скорость } v \text{ км/час} \\ &= 0,001 : \frac{1}{3600} = 3,6 \text{ км/час.} \end{aligned}$$

$$1 \text{ м/с} = 3,6 \text{ км/час.}$$

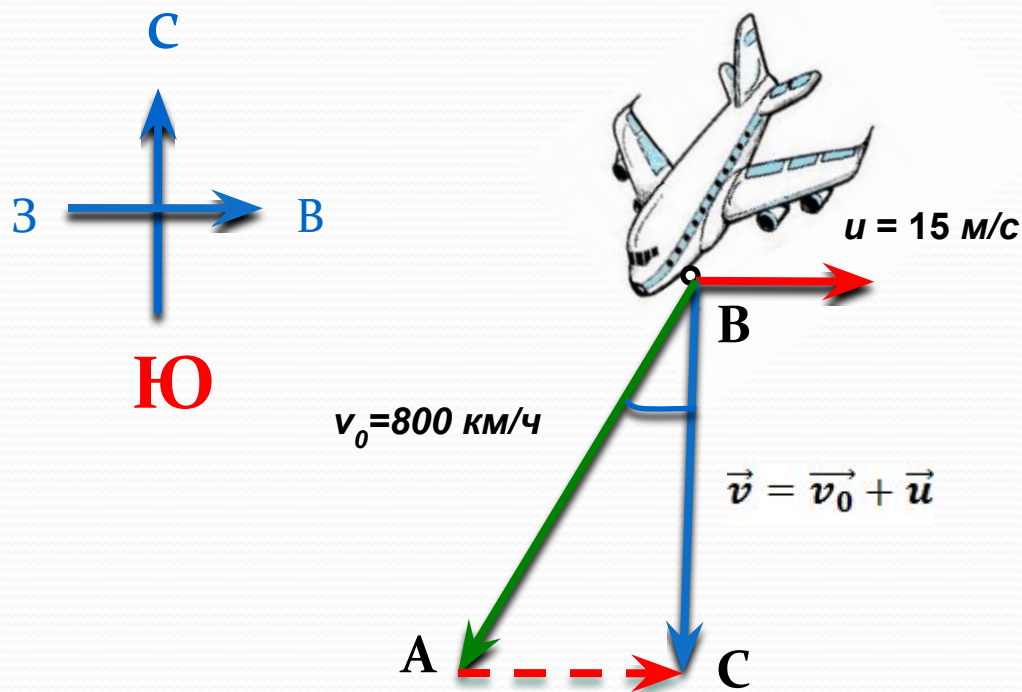
Из прямоугольного треугольника ABC:

$$\text{а) } v = \sqrt{v_0^2 - u^2} = \sqrt{800^2 - 54^2} \approx 798,2 \text{ км/ч};$$

$$\text{б) } v = v_0 \cos \alpha; \quad \cos \alpha = \frac{v}{v_0} = \frac{798,2}{800} \approx 0,998;$$

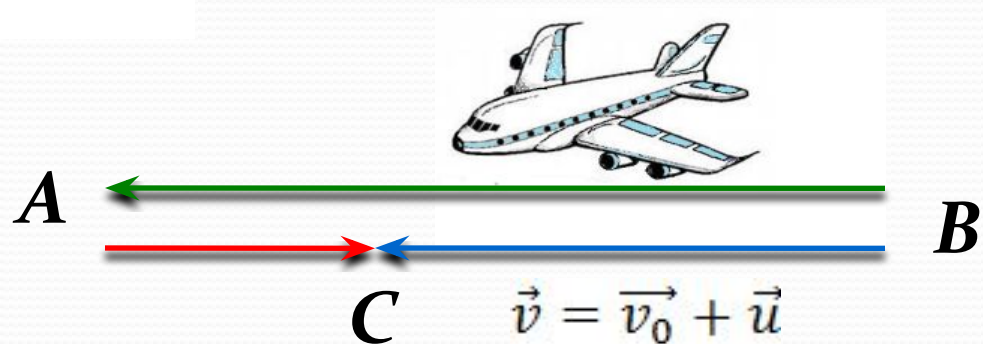
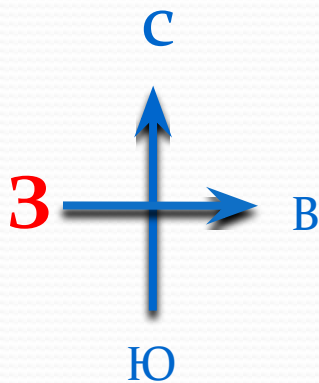
$$\alpha = 4^\circ.$$

Курс на юго-запад.



Воспользовавшись правилом треугольника, найдем скорость самолета относительно земли при ее движении **на запад**.

Модуль вектора $\overrightarrow{BC}$ равен
сумме модулей векторов $\overrightarrow{BA}$
и $\overrightarrow{AC}$, то есть $|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{BA}| + |\overrightarrow{AC}|$:
 $v = 800 + 54 = 854 \text{ км/ч}$.
Кур на восход.

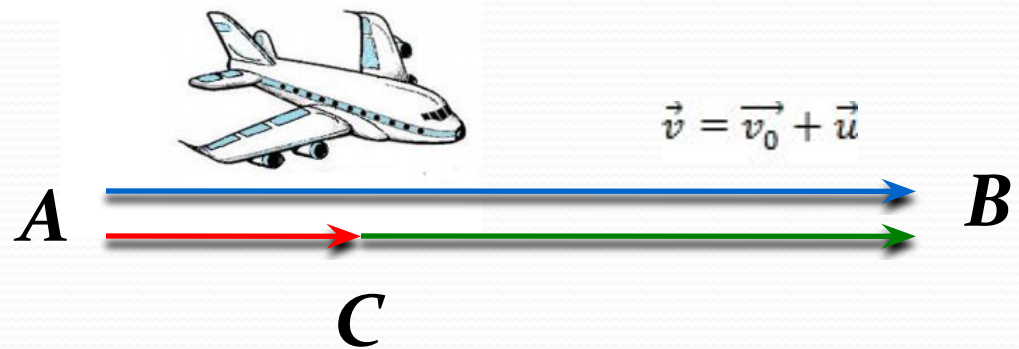
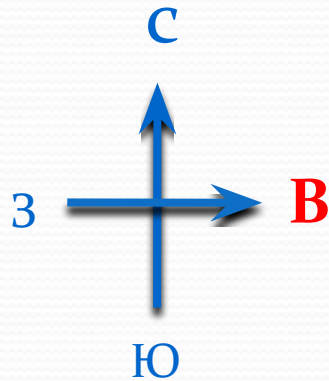


Воспользовавшись правилом треугольника, найдем скорость самолета относительно земли при ее движении на восход.

Модуль вектора $\vec{BC}$ равен сумме модулей векторов $\vec{BA}$ и $\vec{AC}$, то есть $|\vec{BC}| = |\vec{BA}| + |\vec{AC}|$:

$$v = 800 + 54 = 854 \text{ км/ч.}$$

Кур на восход.



Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на действительное $\alpha \neq 0$ число называется вектор $\vec{p}$, удовлетворяющий следующим условиям:

а) $|\vec{p}| = |\alpha| \cdot |\vec{a}|$;

б) если $\alpha > 0$, то $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{p}$; если $\alpha < 0$, то $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{p}$.

Произведение нулевого вектора на произвольное число или числа нуль на произвольный вектор есть нуль-вектор.

Произведение вектора на число обладает следующими

св $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$; **а** $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$;

1) $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$;

2) $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$;

3) $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$.

4)

Теорема. Для того чтобы вектор $\vec{a}$ был коллинеарен ненулевому вектору $\vec{b}$, необходимо и достаточно, чтобы существовало число α , удовлетворяющее условию $\vec{a} = \alpha \vec{b}$.

Пусть вектор $\vec{a}$ коллинеарен ненулевому вектору $\vec{b}$.

Возможны следующие три случая:

1) $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$; 2) $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$; 3) $\vec{a} = \vec{0}$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{e}_1 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}, \vec{e}_1 \uparrow\uparrow \vec{a} \\ \vec{e}_2 = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}, \vec{e}_2 \uparrow\uparrow \vec{b} \\ |\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \Rightarrow \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \Rightarrow \vec{a} = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} \vec{b} \Rightarrow \alpha = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$$

ЗАДАЧА

На чертеже дан единичный вектор $\overline{a}$. Построить векторы

$$\overline{p}_1 = 2\overline{a} \quad \overline{p}_2 = -3\overline{a}$$

