Лекция 7

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Соотношение вида

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

связывающее независимую переменную x , неизвестную функцию $y = y(x)$ и ее производные $y', y'', \dots, y^{(n)}$, называется дифференциальным уравнением (сокращенно ДУ).

Порядком дифференциального уравнения (15.1) называется порядок старшей производной, входящей в это уравнение.

Если искомая функция зависит от одного переменного, то дифференциальное уравнение называется *обыкновенным*, в противном случае ДУ в частных производных.

Определение 3. *Решением* или *интегралом* дифференциального уравнения называется всякая функция $y = f(x)$, которая, будучи подставлена в уравнение, превращает его в тождество.

Дифференциальные уравнения первого порядка (общие понятия)

1. Дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид

$$F(x, y, y') = 0. \quad (1)$$

Если это уравнение можно разрешить относительно y' , то его можно записать в виде

$$y' = f(x, y). \quad (1')$$

В этом случае мы говорим, что дифференциальное уравнение разрешено относительно производной. Для такого уравнения справедлива следующая теорема, которая называется теоремой о существовании и единственности решения дифференциального уравнения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

- ▣ **Задачей Коши** (Огюстен Луи Коши (1789-1857)- французский математик) называется нахождение любого частного решения дифференциального уравнения вида $y = \phi(x, C_0)$, удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0) = y_0$.

ТЕОРЕМА КОШИ. (ТЕОРЕМА О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ 1-ГО ПОРЯДКА)

Теорема. Если в уравнении

$$y' = f(x, y)$$

функция $f(x, y)$ и ее частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}$ по y непрерывны в некоторой области D на плоскости Oxy , содержащей некоторую точку $(x_0; y_0)$, то существует единственное решение этого уравнения

$$y = \varphi(x),$$

удовлетворяющее условию $y = y_0$ при $x = x_0$.

Геометрический смысл теоремы заключается в том, что существует и притом единственная функция $y = \varphi(x)$, график которой проходит через точку $(x_0; y_0)$.

Из только что высказанной теоремы вытекает, что уравнение (1') имеет бесконечное число различных решений (например, решение, график которого проходит через точку $(x_0; y_0)$; другое решение, график которого проходит через точку $(x_0; y_1)$ и т. д., если только эти точки лежат в области D).

Условие, что при $x = x_0$ функция y должна равняться заданному числу y_0 , называется *начальным условием*. Оно часто записывается в виде

$$y|_{x=x_0} = y_0.$$

Определение 1. Общим решением дифференциального уравнения первого порядка называется функция

$$y = \varphi(x, C), \quad (2)$$

которая зависит от одной произвольной постоянной C и удовлетворяет следующим условиям:

а) она удовлетворяет дифференциальному уравнению при любом конкретном значении постоянной C ;

б) каково бы ни было начальное условие $y = y_0$ при $x = x_0$, т. е. $y|_{x=x_0} = y_0$, можно найти такое значение $C = C_0$, что функция $y = \varphi(x, C_0)$ удовлетворяет данному начальному условию. При этом предполагается, что значения x_0 и y_0 принадлежат к той области изменения переменных x и y , в которой выполняются условия теоремы существования и единственности решения.

2. В процессе разыскания общего решения дифференциального уравнения мы нередко приходим к соотношению вида

$$\Phi(x, y, C) = 0, \quad (2')$$

не разрешенному относительно y . Разрешив это соотношение относительно y , получаем общее решение. Однако выразить y из соотношения (2') в элементарных функциях не всегда оказывается возможным; в таких случаях общее решение оставляется в неявном виде. Равенство вида $\Phi(x, y, C) = 0$, неявно задающее общее решение, называется *общим интегралом* дифференциального уравнения.

Определение 2. *Частным решением* называется любая функция $y = \varphi(x, C_0)$, которая получается из общего решения $y = \varphi(x, C)$, если в последнем произвольной постоянной C придать определенное значение $C = C_0$. Соотношение $\Phi(x, y, C_0) = 0$ называется в этом случае *частным интегралом* уравнения.

Уравнения с разделенными и разделяющимися переменными.

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) f_2(y), \quad (1)$$

где правая часть есть произведение функции, зависящей только от x , на функцию, зависящую только от y . Преобразуем его следующим образом (предполагая, что $f_2(y) \neq 0$):

$$\frac{1}{f_2(y)} dy = f_1(x) dx. \quad (1')$$

Считая y известной функцией от x , равенство (1') можно рассматривать как равенство двух дифференциалов, а неопределенные интегралы от них будут отличаться постоянным слагаемым. Интегрируя левую часть по y , а правую по x , найдем

$$\int \frac{1}{f_2(y)} dy = \int f_1(x) dx + C. \quad (1'')$$

Мы получили соотношение, связывающее решение y , независимую переменную x и произвольную постоянную C , т. е. получили общий интеграл уравнения (1).

1. Дифференциальное уравнение типа (1')

$$M(x) dx + N(y) dy = 0 \quad (2)$$

называют уравнением с *разделенными переменными*. Общий

интеграл его по доказанному есть

$$\int M(x) dx + \int N(y) dy = C.$$

2. Уравнение вида

$$M_1(x) N_1(y) dx + M_2(x) N_2(y) dy = 0 \quad (3)$$

НАЗЫВАЕТСЯ УРАВНЕНИЕМ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ.

- Оно может быть приведено к уравнению с разделенными переменными путем деления обеих его частей на выражение $N_1(y) \cdot M_2(x)$.

$$\frac{M_1(x) N_1(y)}{N_1(y) M_2(x)} dx + \frac{M_2(x) N_2(y)}{N_1(y) M_2(x)} dy = 0,$$

или

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)} dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)} dy = 0,$$

т. е. к уравнению вида (2).

Однородные уравнения первого порядка

Определение 1. Функция $f(x, y)$ называется *однородной функцией n -го измерения* относительно переменных x и y , если при любом λ справедливо тождество

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y).$$

Определение 2. Уравнение первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = f(x; y) \quad (1)$$

называется *однородным* относительно x и y , если функция $f(x, y)$ есть однородная функция нулевого измерения относительно x и y .

Решение однородного уравнения.

Решение однородного уравнения. По условию $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$. Положив в этом тождестве $\lambda = 1/x$, получим

$$f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right),$$

т. е. однородная функция нулевого измерения зависит только от отношения аргументов.

Сделаем подстановку

$$u = \frac{y}{x}, \text{ т. е. } y = ux.$$

Тогда будем иметь

$$\frac{dy}{dx} = u + \frac{du}{dx} x.$$

Подставляя это выражение производной в уравнение (1'), получим

$$u + x \frac{du}{dx} = f(1, u).$$

Это — уравнение с разделяющимися переменными:

$$x \frac{du}{dx} = f(1, u) - u, \quad \text{или} \quad \frac{du}{f(1, u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, найдем

$$\int \frac{du}{f(1, u) - u} = \int \frac{dx}{x} + C.$$

Подставляя после интегрирования вместо u отношение y/x , получим интеграл уравнения (1').

Линейные уравнения первого порядка

Определение. *Линейным уравнением первого порядка* называется уравнение, линейное относительно неизвестной функции и ее производной. Оно имеет вид

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x), \quad (1)$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — заданные непрерывные функции от x (или постоянные).

Решение линейного уравнения (1). Будем искать решение уравнения (1) в виде произведения двух функций от x :

$$y = u(x)v(x). \quad (2)$$

Одну из этих функций можно взять произвольной, другая определится на основании уравнения (1).

Дифференцируя обе части равенства (2), находим

$$\frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}.$$

Подставляя полученное выражение производной $\frac{dy}{dx}$ в уравнение (1), будем иметь

$$u \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx} v + Puv = Q,$$

или

$$u \left(\frac{dv}{dx} + Pv \right) + v \frac{du}{dx} = Q. \quad (3)$$

Выберем функцию v такой, чтобы

$$\frac{dv}{dx} + Pv = 0. \quad (4)$$

Разделяя переменные в этом дифференциальном уравнении относительно функции v , находим

$$\frac{dv}{v} = -P dx.$$

Интегрируя, получаем

$$-\ln |C_1| + \ln |v| = -\int P dx,$$

или

$$v = C_1 e^{-\int P dx}.$$

Так как нам достаточно какого-нибудь отличного от нуля решения уравнения (4), то за функцию $v(x)$ возьмем

$$v(x) = e^{-\int P dx}, \quad (5)$$

где $\int P dx$ — какая-нибудь первообразная. Очевидно, что $v(x) \neq 0$.

Подставляя найденное значение $v(x)$ в уравнение (3), получим (учитывая, что $\frac{dv}{dx} + Pv = 0$)

$$v(x) \frac{du}{dx} = Q(x),$$

или

$$\frac{du}{dx} = \frac{Q(x)}{v(x)},$$

откуда

$$u = \int \frac{Q(x)}{v(x)} dx + C.$$

Подставляя u и v в формулу (2), окончательно получаем

$$y = v(x) \left[\int \frac{Q(x)}{v(x)} dx + C \right],$$

или

$$y = v(x) \int \frac{Q(x)}{v(x)} dx + Cv(x). \quad (6)$$

Пример. Решить уравнение

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x+1} y = (x+1)^2.$$

Решение. Полагаем $y = uv$, тогда

$$\frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx} v.$$

Подставляя выражение $\frac{dy}{dx}$ в исходное уравнение, будем иметь

$$u \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx} v - \frac{2}{x+1} uv = (x+1)^3,$$
$$u \left(\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x+1} v \right) + v \frac{du}{dx} = (x+1)^3. \quad (7)$$

Для определения v получим уравнение $\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x+1} v = 0$, т. е. $\frac{dv}{v} = \frac{2dx}{x+1}$, откуда $\ln |v| = 2 \ln |x+1|$, или $v = (x+1)^2$. Подставляя выражение функции v в уравнение (7), получаем для определения u уравнение $(x+1)^2 \frac{du}{dx} = (x+1)^3$, или $\frac{du}{dx} = x+1$, откуда $u = \frac{(x+1)^2}{2} + C$.

Следовательно, общий интеграл заданного уравнения будет иметь вид

$$y = \frac{(x+1)^4}{2} + C(x+1)^2.$$

Уравнение в полных дифференциалах

О п р е д е л е н и е. Уравнение

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \quad (1)$$

называется *уравнением в полных дифференциалах*, если $M(x, y)$ и $N(x, y)$ — непрерывные, дифференцируемые функции, для которых выполняется соотношение

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \quad (2)$$

причем $\frac{\partial M}{\partial y}$ и $\frac{\partial N}{\partial x}$ непрерывны в некоторой области.

Интегрирование уравнений в полных дифференциалах. Докажем, что если левая часть уравнения (1) есть полный дифференциал, то выполняется условие (2), и обратно — при выполнении условия (2) левая часть уравнения (1) есть полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$, т. е. уравнение (1) имеет вид

$$du(x, y) = 0, \quad (3)$$

и, следовательно, его общий интеграл есть $u(x, y) = C$.

Предположим сначала, что левая часть уравнения (1) есть полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$, т. е.

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy;$$

тогда

$$M = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad N = \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (4)$$

Дифференцируя первое соотношение по y , а второе — по x , получим

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

Предполагая непрерывность вторых производных, будем иметь

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x},$$

т. е. равенство (2) является необходимым условием для того, чтобы левая часть уравнения (1) была полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$. Покажем, что это условие является и достаточным, т. е. что при выполнении равенства (2) левая часть уравнения (1) есть полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$.

Из соотношения $\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)$ находим $u = \int_{x_0}^x M(x, y) dx + \varphi(y)$,

где x_0 — абсцисса любой точки из области существования решения.

При интегрировании по x мы считаем y постоянным и поэтому произвольная постоянная интегрирования может зависеть от y . Подберем функцию $\varphi(y)$ так, чтобы выполнялось второе из соотношений (4). Для этого продифференцируем*) обе части последнего равенства по y и результат приравняем $N(x, y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_0}^x \frac{\partial M}{\partial y} dx + \varphi'(y) = N(x, y);$$

но так как $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, то можем написать $\int_{x_0}^x \frac{\partial N}{\partial x} dx + \varphi'(y) = N$, т. е.

$$N(x, y) \Big|_{x_0}^x + \varphi'(y) = N(x, y), \text{ или}$$

$$N(x, y) - N(x_0, y) + \varphi'(y) = N(x, y).$$

Следовательно,

$$\varphi'(y) = N(x_0, y),$$

или

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy + C_1.$$

Таким образом, функция $u(x, y)$ будет иметь вид

$$u = \int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy + C_1.$$

Здесь $P(x_0; y_0)$ — точка, в окрестности которой существует решение дифференциального уравнения (1).

Приравнявая это выражение произвольной постоянной C , получим общий интеграл уравнения (1):

$$\int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy = C. \quad (5)$$