

Числові послідовності

Границя послідовності.



Означення границі

ПОСЛІДОВНОСТІ

Число $a \in \mathbb{R}$ називається границею посл.

$\{a_n | n \geq 1\}$, якщо для довільного додатного ε знайдеться такий номер N з множини натуральних чисел, який залежить від ε , починаючи з якого виконується нерівність: $|a_n - a| < \varepsilon$.

$a \in \mathbb{R}$ — границя $\{a_n | n \geq 1\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0: \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \forall n \geq N: |a_n - a| < \varepsilon.$

Позн $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ аб $a_n \rightarrow a, n \rightarrow \infty.$

0



Означення

Послідовність, яка має границю, називається **збіжною**.

Послідовність, у якої не має границі називається **розбіжною**.



Геометричний зміст

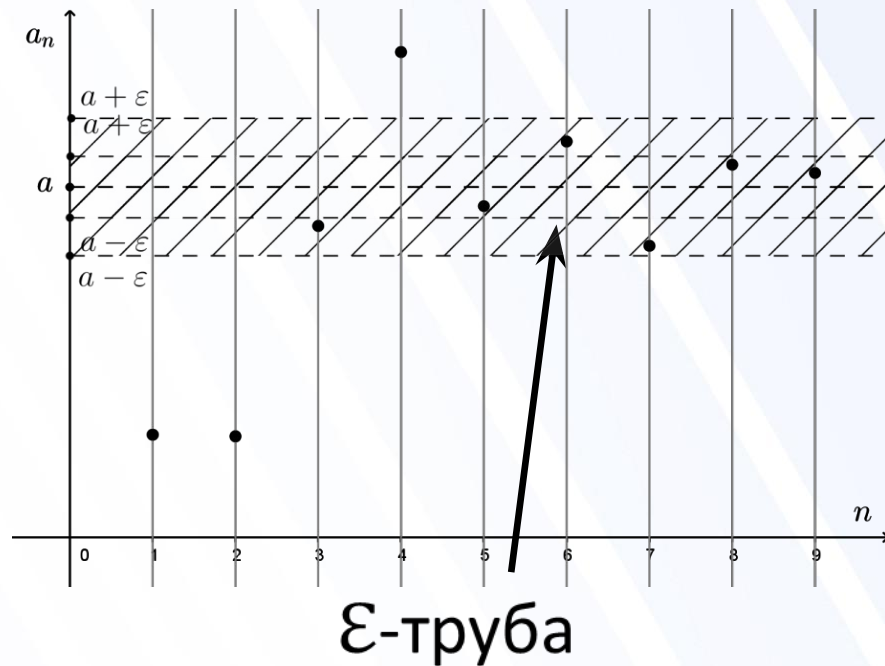
$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0: \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \forall n \geq N: |a_n - a| < \varepsilon \\ \Rightarrow -\varepsilon < a_n - a < \varepsilon \Rightarrow \\ a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \end{aligned}$$



Геометричний зміст

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$

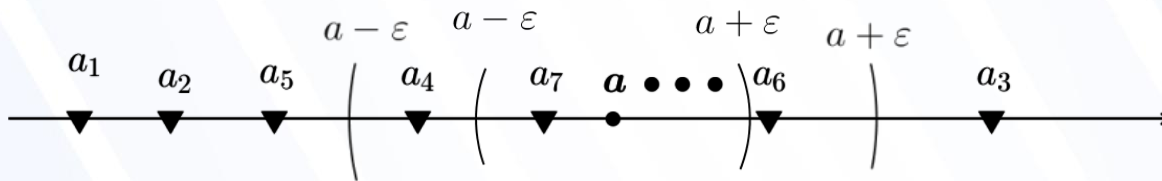
Тобто для кожного конкретного ε всі члени збіжної послідовності, починаючи з номера $N(\varepsilon)$ будуть знаходитись у множині $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$.



Геометричний зміст

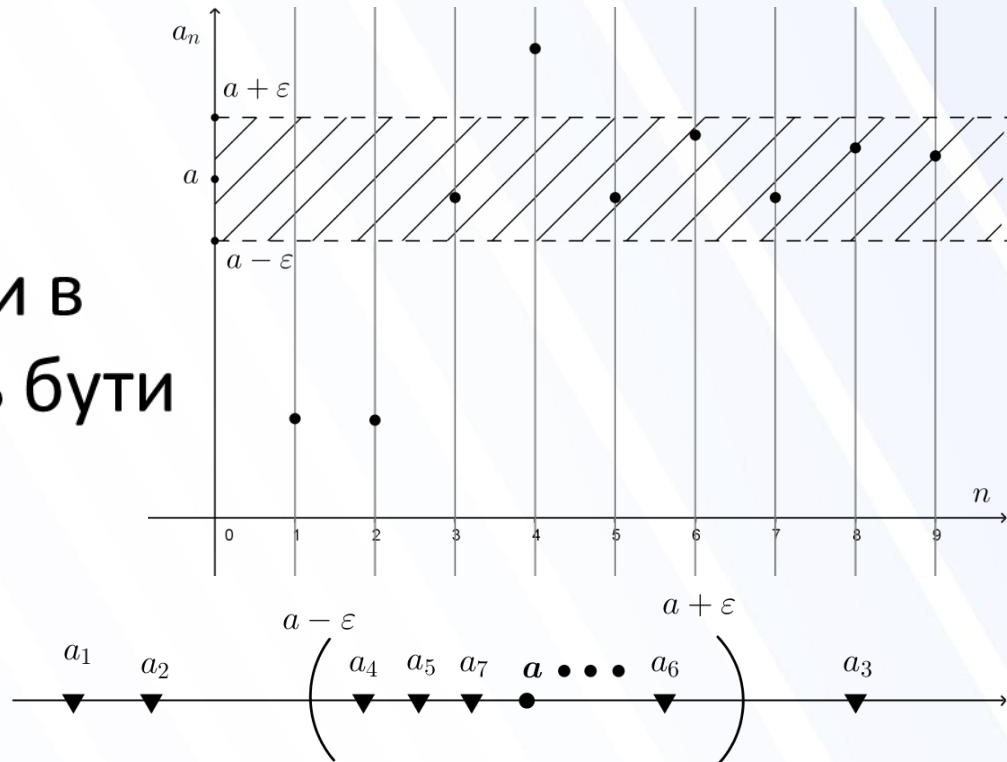
$a \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. ε -околом т. a називається інтервал
 $(a - \varepsilon; a + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon\}$

Тобто, для кожного $\varepsilon > 0$, починаючи з деякого номера, всі члени збіжної послідовності попадають у ε -окіл її границі.



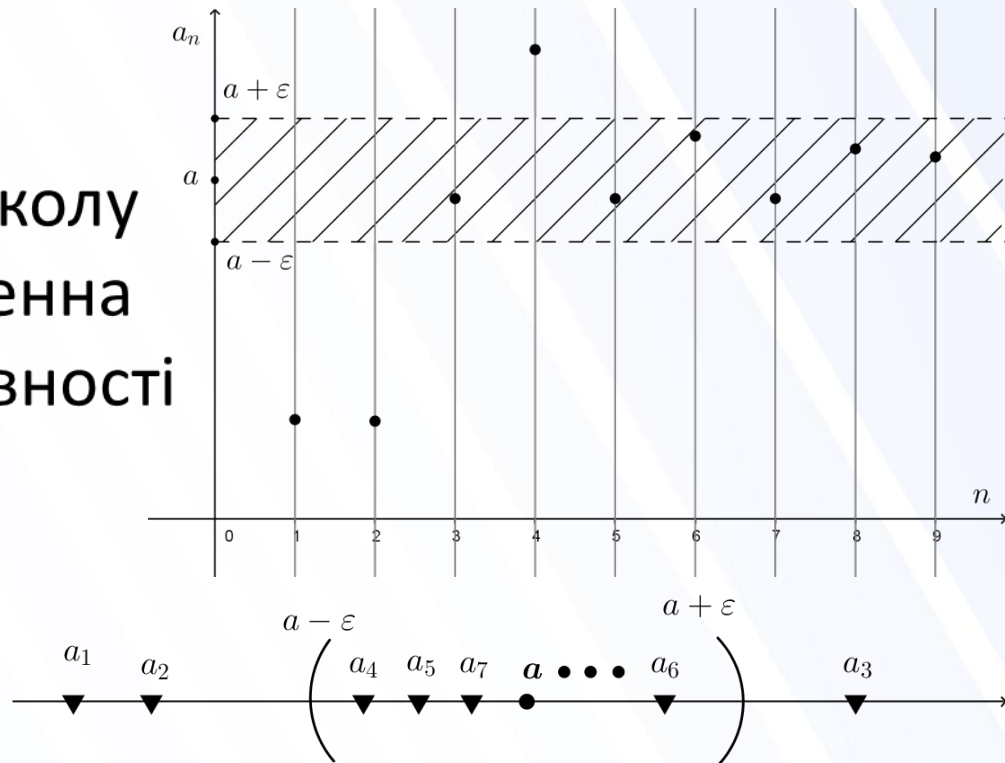
Зауваження 1

До $N(\varepsilon)$ члени
послідовності можуть
попадати і не попадати в
 ε -окіл. Після всі мають бути
в ε -околі.



Зауваження 2

Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$,
то для $\forall \varepsilon > 0$ зовні ε -околу
знаходиться лише скінченна
кількість членів послідовності
(може і жодного).



Знайти границю послідовності $a_n = \frac{3n-1}{n}, n \geq 1$.

$$a_1 = 2, a_2 = 2,5, a_3 = 2\frac{2}{3}, a_4 = 2\frac{3}{4}, \dots, a_{100} = 2,99, \dots,$$

Гіпотез $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$

а:

Доведемо за
означенням

Тобто для $\forall \varepsilon > 0$ треба знайти N , починаючи з якого

$$|a_n - 3| < \varepsilon.$$



Знайти границю послідовності $a_n = \frac{3n-1}{n}, n \geq 1$.

Розглянемо частковий випадок $\varepsilon = \frac{1}{100}$:

$$\begin{aligned} |a_n - 3| < 0,01 &\Leftrightarrow \left| \frac{3n-1}{n} - 3 \right| < \frac{1}{100} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left| -\frac{1}{n} \right| < \frac{1}{100} \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{100} \Leftrightarrow n > 100. \end{aligned}$$

Отже для $n \geq 101$: $|a_n - 3| < 0,01$ і $N = 101$.



Знайти границю послідовності $a_n = \frac{3n-1}{n}, n \geq 1$.

Тепер в загальному випадку $\forall \varepsilon > 0$:

$$|a_n - 3| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{3n-1}{n} - 3 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Отже $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$ – найперше натуральне число,
що перевищує $\frac{1}{\varepsilon}$.

$$\text{Тоді } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3.$$

$$\forall \varepsilon > 0: \exists N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1: \forall n \geq N: |a_n - 3| < \varepsilon$$



Довести, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^2} = 0$.

Нехай $\varepsilon > 0$:

Знайдемо $N(\varepsilon)$, починаючи з якого $|a_n - 0| < \varepsilon$.

$$\left| \frac{3}{n^2} - 0 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{3}{n^2} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \sqrt{\frac{3}{\varepsilon}}.$$

$$\forall \varepsilon > 0: \exists N = \left\lceil \sqrt{\frac{3}{\varepsilon}} \right\rceil + 1: \forall n \geq N: |a_n - 0| < \varepsilon$$

Том
у $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^2} = 0$.



Теорема про єдиність границі послідовності

Збіжна послідовність має лише одну
границю.



Теорема про єдиність границі послідовності

Доведення: Метод від

Нехай супротивного

$$a_n \rightarrow a, n \rightarrow \infty \text{ і } a_n \rightarrow b, n \rightarrow \infty, a, b \in \mathbb{R} \text{ і } a \neq b$$

Тоді за

означенням

$$\forall \varepsilon > 0: \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \forall n \geq N_1: |a_n - a| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0: \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \forall n \geq N_2: |a_n - b| < \varepsilon$$



Теорема про єдиність границі послідовності

$$\forall \varepsilon > 0: \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \forall n \geq N_1: |a_n - a| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0: \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \forall n \geq N_2: |a_n - b| < \varepsilon$$

Розглянемо $\varepsilon = \frac{|a-b|}{3}$, $N_3 = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$

$$|a_n - a| < \varepsilon, \text{ бо } N_3 \geq N_1(\varepsilon)$$

$$\forall n \geq N_3(\varepsilon) \quad |a_n - b| < \varepsilon, \text{ бо } N_3 \geq N_2(\varepsilon)$$



Теорема про єдиність границі послідовності

$$\varepsilon = \frac{|a - b|}{3}$$

$$\forall n \geq N_3(\varepsilon)$$

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

$$|a_n - b| < \varepsilon$$

$$\begin{aligned} \forall n \geq N_3: |a - b| &= |a - a_n + a_n - b| \leq \\ &\leq |a - a_n| + |a_n - b| = |a_n - a| + |a_n - b| < \\ &< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = \frac{2}{3}|a - b| \end{aligned}$$

Маємо $|a - b| < \frac{2}{3}|a - b| \Rightarrow$ протиріччя $\Rightarrow a = b.$



Властивості збіжних послідовностей.



Теорема 1

Збіжна послідовність – обмежена.

