

# АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ АВТОКОЛЕБАНИЙ

Метод гармонической линеаризации широко используется для исследования режимов автоколебаний нелинейных систем. Наиболее распространёнными способами исследования автоколебаний являются алгебраический и частотный.

Алгебраический метод позволяет на основании характеристического уравнения определить амплитуду и частоту возможных автоколебаний.

Пусть САР имеет одну нелинейность  $F(x)$  и линейную часть, выполняющую роль фильтра (рисунок 1). Решение ищется в форме  $x = a \cdot \sin \omega t$ .

В искомом решении неизвестны амплитуда  $a$  и частота  $\omega$ . Но при гармонической линеаризации в искомом решении  $a = \text{const}$  и  $\omega = \text{const}$ . Следовательно, гармонически линеаризованную систему можно рассматривать как линейную с постоянными коэффициентами.

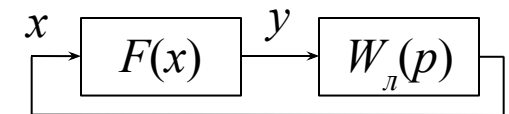


Рисунок 1

Линейная система имеет периодическое решение паре чисто мнимых корней  $\lambda_{1,2} = \pm j\omega$  характеристического уравнения (граница колебательной устойчивости). Следовательно, для определения возможного периодического решения (и его параметров) необходимо в характеристическое уравнение гармонически линеаризованной системы подставить корни  $\lambda = j\omega$ .

Характеристическое уравнение находится из передаточной функции разомкнутой системы путём **как?**

Будем рассматривать симметричные колебания. Тогда гармонически линеаризованная передаточная функция нелинейности

$$W_n(a, p) = q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} p.$$

Передаточная функция разомкнутой системы

$$W_{pc}(a, p) = ?$$

Характеристическое уравнение системы ?

Как отмечалось, для отыскания периодического решения необходимо в характеристическое уравнение подставить  $\lambda = j\omega$ :

$$Q(j\omega) + R(j\omega) \cdot [q(a) + jq'(a)] = 0. \quad (1)$$

При нечётно-симметричной однозначной нелинейности ( $q' = 0$ ):

$$Q(j\omega) + R(j\omega) \cdot q(a) = 0. \quad (2)$$

В уравнении (1) или (2) выделяются вещественная и мнимая части:

$$U(a, \omega) + jV(a, \omega) = 0.$$

В результате получаем два уравнения

из которых находятся искомые амплитуда  $a$  и частота  $\omega$  периодического решения.

Определённое таким образом периодическое решение может и не означать автоколебательного процесса в системе. Это решение необходимо исследовать на его устойчивость. Если решение устойчиво, то имеет место автоколебательный процесс. Неустойчивое периодическое решение говорит о том, что в системе имеют место затухающие или расходящиеся колебания (неустойчивый предельный цикл на фазовом портрете).

Устойчивость периодического решения можно проверить по выражению

$$\frac{\partial U}{\partial a} \cdot \frac{\partial V}{\partial \omega} - \frac{\partial V}{\partial a} \cdot \frac{\partial U}{\partial \omega} > 0, \quad (4)$$

где  $U, V$  – вещественная и мнимая части из (3).

Кроме того, в характеристическом уравнении гармонически линеаризованной системы, все корни (кроме использованных  $\lambda_{1,2} = \pm j\omega$ ) должны иметь отрицательные вещественные части, или удовлетворять критерию Гурвица (для систем 3-го и 4-го порядка достаточно положительности всех коэффициентов характеристического уравнения).

Если уравнения (3) не имеют положительных вещественных решений для  $a$  и  $\omega$ , колебания в рассматриваемой нелинейной системе невозможны.

Пример. Определить амплитуду и частоту автоколебаний в нелинейной системе, структурная схема которой приведена на рисунке 2.

Гармонически линейризованная  
передаточная функция нелинейности

$$W(a, p) = q(a). \quad (5)$$

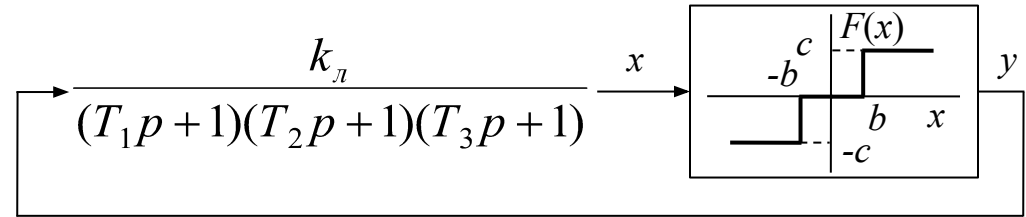


Рисунок 2

Передаточная функция разомкнутой системы

$$W_{pc}(a, p) = ?$$

Характеристическое уравнение системы ?

$$T_1 T_2 T \lambda^3 + (T_1 T_2 + T_2 T_3 + T_3 T_1) \lambda^2 + (T_1 + T_2 + T_3) \lambda + k_l \cdot q(a) = 0. \quad (7)$$

Подставим  $p = j\omega$ :

$$-j T_1 T_2 T \omega^3 - (T_1 T_2 + T_2 T_3 + T_3 T_1) \omega^2 + j(T_1 + T_2 + T_3) \omega + k_l \cdot q(a) = 0. \quad (8)$$

Выделим в (8) вещественную и мнимую части:

$$\left. \begin{aligned} U &= k_l \cdot q(a) - (T_1 T_2 + T_2 T_3 + T_3 T_1) \omega^2 = 0; \\ V &= (T_1 + T_2 + T_3) \omega - T_1 T_2 T \omega^3 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Второе уравнение системы (9) запишем как  $\omega(T_1 + T_2 + T_3 - T_1 T_2 T \omega^2) = 0$ .

Решение  $\omega = 0$  не имеет смысла, так как отыскивается периодическое решение.

Тогда  $\omega^2 = \frac{T_1 + T_2 + T_3}{T_1 T_2 T_3},$  (10)

откуда частота периодического решения  $\omega = \sqrt{\frac{T_1 + T_2 + T_3}{T_1 T_2 T_3}}.$  (11)

Подставив (10) в первое уравнение системы (9), получим

$$q(a) = \frac{(T_1 T_2 + T_2 T_3 + T_3 T_1)(T_1 + T_2 + T_3)}{k_n T_1 T_2 T_3}. \quad (12)$$

Зная зависимость  $q(a)$ , по (12) можно определить амплитуду  $a$  периодического решения. Для заданной нелинейности

$$q = \frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \quad \text{при } a > b.$$

В данном случае проще воспользоваться графиком  $q(a)$  (рисунок 3), построенном по параметрам нелинейного звена (см. пример 2).

Отложив на графике найденное по (12) значение  $q(a)$  (штрихпунктирная линия), определим, что имеется два периодических решения – с амплитудой  $a_1$  и амплитудой  $a_2$ . Необходимо определить, какое из решений устойчиво.

Для определения устойчивости воспользуемся условием (4):

$$\frac{\partial U}{\partial a} \cdot \frac{\partial V}{\partial \omega} - \frac{\partial V}{\partial a} \cdot \frac{\partial U}{\partial \omega} > 0.$$

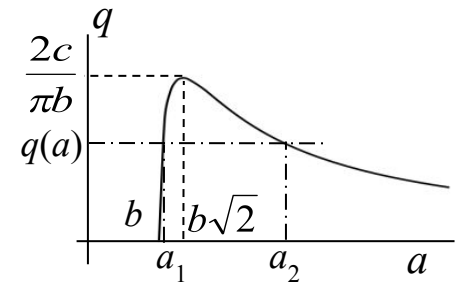


Рисунок 3

Определим частные производные из (9):

$$\frac{\partial U}{\partial a} = k_{\text{л}} \frac{\partial q(a)}{\partial a}; \quad \frac{\partial U}{\partial \omega} = -2(T_1 T_2 + T_2 T_3 + T_3 T_1) \omega = -2(T_1 T_2 + T_2 T_3 + T_3 T_1) \sqrt{\frac{T_1 + T_2 + T_3}{T_1 T_2 T_3}};$$

$$\frac{\partial V}{\partial a} = 0; \quad \frac{\partial V}{\partial \omega} = T_1 + T_2 + T_3 - 2T_1 T_2 T_3 \omega^2 = -(T_1 + T_2 + T_3).$$

Подставим в (4):  $\frac{\partial U}{\partial a} \cdot \frac{\partial V}{\partial \omega} > 0$  или  $-k_{\text{л}} \frac{\partial q(a)}{\partial a} (T_1 + T_2 + T_3) > 0$ .

Условие выполняется, если  $\frac{\partial q(a)}{\partial a} < 0$ , то есть, на участке характеристики  $q(a)$ , где с увеличением  $a$  коэффициент  $q$  уменьшается.

Проверка корней характеристического уравнения не требуется, так как система третьего порядка и все коэффициенты характеристического уравнения положительны.

Следовательно, рассмотренная система будет находиться в режиме автоколебаний. Амплитуда автоколебаний (на входе нелинейного звена) равна  $a_2$ , а частота определяется выражением (11).

В режиме автоколебаний система может оказаться, если начальные условия будут больше  $b\sqrt{2}$ . Если начальные условия будут в диапазоне от  $b$  до  $b\sqrt{2}$ , в системе будут затухающие колебания. При меньших начальных условиях колебаний не будет, так как  $x$  будет находиться в зоне нечувствительности нелинейности.

При определённых параметрах системы расчётное значение  $q(a)$  будет больше  $\frac{2c}{\pi b}$  и колебаний также не будет.