

Адаптивные модели прогнозирования

Опр *Адаптивными методами прогнозирования* (или моделями экспоненциального сглаживания) называется методы, позволяющие строить самокорректирующиеся ЭММ, которые учитывают результат реализации прогноза, сделанного на предыдущем шаге, и строят прогноз с учетом полученных результатов.

Алгоритм построения модели адаптивного прогнозирования:

- 1) делается оценка начальных условий (нулевых значений адаптируемых параметров);
- 2) делается прогноз на один шаг вперед,
- 3) полученные прогнозные значения сравниваются с фактическими значениями.
- 4) Если ошибка прогноза превышает заданной наперед определенной погрешности, то производят модификацию модели, и с учетом этого строят новый прогноз, далее на второй шаг, и опять сравнивают полученный прогноз с фактической реализацией процесса.

Процесс повторяют до тех пор, пока разница, между прогнозным и фактическим значениями, не станет минимальной.

Будут получены параметры адаптируемой модели, и с учетом их значений строят ретроспективный прогноз.

Линейная модель Брауна

$$\tilde{X}(\tau) = a_{0t} + a_{1t} \cdot \tau$$

Где $\tilde{X}(\tau)$ - прогноз, выполненный на τ шагов вперед на t -м шаге адаптации,

a_{0t}, a_{1t} - адаптируемые параметры модели, τ – период упреждения.

Параметры a_{0t}, a_{1t} рассчитываются по формулам:

$$\begin{cases} a_{0t} = 2S_t^{(1)} - S_t^{(2)} \\ a_{1t} = \frac{1-\beta}{\beta} (S_t^{(1)} - S_t^{(2)}) \end{cases}$$

где $S_t^{(1)}, S_t^{(2)}$ - экспоненциальные средние соответственно 1-го и 2-го порядков; β – параметр сглаживания (адаптации). Иногда параметр сглаживания обозначают как $\alpha = 1 - \beta$

Расчет экспоненциальных средних

Экспоненциальная средняя 1- го порядка:

$$S_t^{(1)} = (1 - \beta) \cdot x_t + \beta \cdot S_{t-1}^{(1)}$$

где β – параметр сглаживания, или так называемый весовой коэффициент, x_t фактическое значение обучающего множества, $S_{t-1}^{(1)}$ – экспоненциальная средняя на предшествующем шаге.

$$S_{t-1}^{(1)} = (1 - \beta) \cdot x_{t-1} + \beta \cdot S_{t-2}^{(1)}$$

Подставив, получим:

$$S_t^{(1)} = (1 - \beta) \cdot x_t + \beta \cdot (1 - \beta) \cdot x_{t-1} + \beta^2 \cdot S_{t-2}^{(1)}$$

Аналогично :

$$S_t^{(1)} = (1 - \beta) \sum_{j=0}^{t-1} \beta^j x_{t-j} + \beta^t S_0^{(1)}$$

Применив такую процедуру экспоненциального сглаживания к исходному ряду, получим сглаженный ряд первого порядка.

Повторное применение процедуры экспоненциального сглаживания уже к сглаженному ряду $S_t^{(1)}$ первого порядка, называется процедурой **экспоненциального сглаживания второго порядка** :

$$S_t^{(2)} = (1 - \beta) \cdot S_t^{(1)} + \beta \cdot S_{t-1}^{(2)}$$

Начальные значения

Начальные значения экспоненциальных средних

$$\begin{cases} S_0^{(1)} = a_{00} - \frac{\beta}{1-\beta} a_{10} \\ S_0^{(2)} = a_{00} - \frac{2\beta}{(1-\beta)} a_{10} \end{cases}$$

Начальные значения параметров a_{0t0} , a_{10} рассчитываются как коэффициенты регрессии .

$$x_t = a_{00} + a_{10} \cdot t$$

Выбор параметра адаптации

Значение параметра адаптации $\beta = 1 - \alpha$ лежит в интервале (1; 0).

- 1) Если требуется придать вес более поздним значения ряда (увеличить степень реагирования модели на последние изменения), то берут значения $\beta < 0,5$
- 2) Если хотят получить более сглаженную картину тенденции развития ряда, избежать краткосрочных изменений и повысить степень устойчивости модели, то значения $\beta > 0,5$
- 3) Используют метод Брауна: $\beta = 1 - \frac{2}{m + 1}$, где m — число наблюдений в ряду.
- 4) выбирают β , исходя из минимума средней квадратической ошибки между расчетным и фактическим значениями.

Квадратичная модель Брауна

$$\tilde{x}_t(\tau) = a_{0t} + a_{1t} \cdot \tau + \frac{1}{2} a_{2t} \cdot \tau^2$$

Где $\tilde{x}(\tau)$ - прогноз, выполненный на τ шагов вперед на t -м шаге адаптации,

a_{0t} , a_{1t} , a_{2t} адаптируемые параметры модели, τ – период упреждения.

Параметры a_{0t} , a_{1t} , a_{2t} рассчитываются по формулам:

$$\begin{cases} a_{0t} = 3(S_t^{(1)} - S_t^{(2)}) + S_t^{(3)} \\ a_{1t} = \frac{1-\beta}{\beta^2} \left[(1+5\beta)S_t^{(1)} - 2(1+4\beta)S_t^{(2)} + (1+3\beta)S_t^{(3)} \right] \\ a_{2t} = \frac{(1-\beta)^2}{\beta^2} \left(S_t^{(1)} - 2S_t^{(2)} + S_t^{(3)} \right) \end{cases}$$

где $S_t^{(1)}, S_t^{(2)}, S_t^{(3)}$ - экспоненциальные средние соответственно 1-го, 2-го и 3-го порядков; β – параметр сглаживания (адаптации).

Расчет экспоненциальных средних

Экспоненциальные средние:

$$S_t^{(1)} = (1 - \beta) \cdot x_t + \beta \cdot S_{t-1}^{(1)}$$

$$S_t^{(2)} = (1 - \beta) \cdot S_t^{(1)} + \beta \cdot S_{t-1}^{(2)}$$

$$S_t^{(3)} = (1 - \beta) \cdot S_t^{(2)} + \beta \cdot S_{t-1}^{(3)}$$

Расчет начальных значений экспоненциальных средних:

$$\begin{cases} S_0^{(1)} = a_{00} - \frac{\beta}{1-\beta} a_{10} + \frac{\beta(1+\beta)}{2(1-\beta)^2} a_{20} \\ S_0^{(2)} = a_{00} - \frac{2\beta}{(1-\beta)} a_{10} + \frac{\beta(1+2\beta)}{(1-\beta)^2} a_{20} \\ S_0^{(3)} = a_{00} - \frac{3\beta}{(1-\beta)} a_{10} + \frac{3\beta(1+3\beta)}{2(1-\beta)^2} a_{20} \end{cases}$$

Модель Хольта

$$\tilde{x}_t(\tau) = a_t + b_t \cdot \tau$$

где $\tilde{x}(\tau)$ - прогноз, выполненный на τ шагов вперед после t шагов адаптации, a_t, b_t - корректируемые параметры модели на каждом шаге t , τ – период упреждения прогноза.

Адаптация параметров модели a_t, b_t :

$$\begin{cases} a_t = \alpha_1 x_t + (1 - \alpha_1) \cdot (a_{t-1} + b_{t-1}) \\ b_t = \alpha_2 (a_t - a_{t-1}) + (1 - \alpha_2) b_{t-1} \end{cases}$$

Здесь $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1]$ — параметры адаптации.

мультипликативная модель Хольта-Уинтерса

Рекуррентные формулы обновления :

$$\begin{cases} a_{0t} = \alpha_1 \frac{x_t}{f_{t-l}} + (1 - \alpha_1)(a_{0t-1} + a_{1t-1}) \\ a_{1t} = \alpha_2(a_{0t} - a_{0t-1}) + (1 - \alpha_2)a_{1t-1} \\ f_t = \alpha_3 \frac{x_t}{a_{0t}} + (1 - \alpha_3)f_{t-l} \end{cases}$$

где a_{0t} , a_{1t} - адаптируемые параметры линейного тренда на t -м шаге адаптации, α_1 , α_2 , α_3 - параметры адаптации, f_t - адаптируемый параметр сезонных коэффициентов на t -м шаге адаптации, l - период сезонности.

Прогнозирование в мультипликативной модели на τ шагов вперед осуществляется по формуле:

$$\tilde{x}_{t+\tau} = (a_{0t} + a_{1t} \cdot \tau) f_{t-l+\tau}$$

где $\tilde{x}_{t+\tau}$ - прогноз, выполненный на τ шагов вперед на t -м шаге адаптации.

аддитивная модель Хольта-Уинтерса

Рекуррентные формулы обновления :

$$\begin{cases} a_{0t} = \alpha_1(x_t - f_{t-l}) + (1 - \alpha_1)(a_{0t-1} + a_{1t-1}) \\ a_{1t} = \alpha_2(a_{0t} - a_{0t-1}) + (1 - \alpha_2)a_{1t-1} \\ f_t = \alpha_3(x_t - a_{0t}) + (1 - \alpha_3)f_{t-l} \end{cases}$$

где a_{0t} , a_{1t} - адаптируемые параметры линейного тренда на t -м шаге адаптации, α_1 , α_2 , α_3 - параметры адаптации, f_t - адаптируемый параметр сезонных коэффициентов на t -м шаге адаптации, l - период сезонности.

Прогнозирование в мультипликативной модели на τ шагов вперед осуществляется по формуле:

$$\tilde{x}_{t+\tau} = a_{0t} + a_{1t} \cdot \tau + f_{t-l+\tau}$$

где $\tilde{x}_{t+\tau}$ - прогноз, выполненный на τ шагов вперед на t -м шаге адаптации.

Определение начальных параметров

a_{00} , a_{10} параметры определяются как коэффициенты регрессии

$$x_t = a_{00} + a_{10} \cdot t$$

адаптируемые коэффициенты сезонности определяются как среднее

арифметическое значение индексов $\tilde{f}_t = x_t / \hat{y}_t$ (для мультипликативной модели)

и $\tilde{f}_t = x_t - \hat{y}_t$ (для аддитивной модели), причем рассчитываются они для каждой одноименной фазы периода ($\hat{y}_t$ - расчетные значения линейного тренда).

Параметры α_1 , α_2 , α_3 определяются из условия минимизации суммы квадратов ошибок, причем необходимо учитывать, что α_2 параметр сглаживания тренда, а α_3 - параметр адаптации сезонных коэффициентов