# §9. Дифференциал функции

***Теорема 1.*** Пусть функция $y=f(x)$ имеет производную $f'(x_0)$. Тогда справедливо равенство

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \varepsilon(\Delta x),$$

где функция $\varepsilon(\Delta x) = o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$.

Если обозначить $A = f'(x_0)$, то получим $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$.

Пусть приращение $\Delta y$ представимо в виде $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$, где $A$ – некоторое число. Тогда при $A \neq 0$ приращение $\Delta y$ эквивалентно функции $A\Delta x$: $\Delta y \sim A\Delta x$ при $\Delta x \to 0$.

Выражение $A\Delta x$ есть **главная часть приращения** $\Delta y$, при этом $A\Delta x$ линейно (пропорционально) зависит от $\Delta x$.

**Определение 1.** Если имеет место равенство

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x),$$

где $A$ – некоторое число, то функцию $y = f(x)$ называют ***дифференцируемой в точке*** $x_0$, а главную линейную часть ее приращения называют ***дифференциалом*** функции в точке $x_0$.

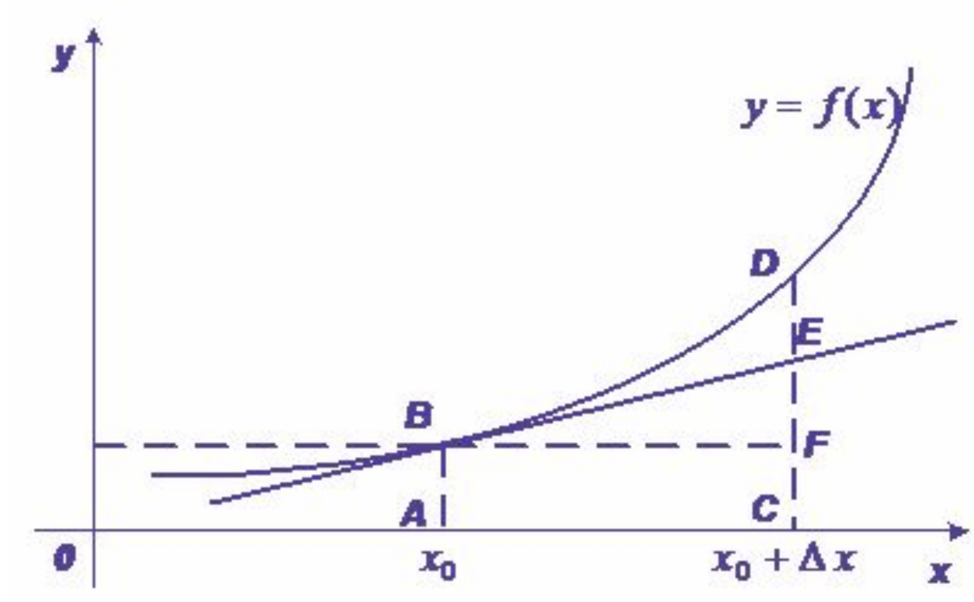
**Обозначение:** $dy = A\Delta x$ - дифференциал функции $y$.

***Теорема 2.*** Для того чтобы функция $y = f(x)$ имела производную $f'(x_0)$, необходимо и достаточно, чтобы эта функция была дифференцируемой в точке $x_0$.

Таким образом, если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x_0$, то она имеет производную $f'(x_0)$ и дифференциал $dy = A\Delta x$ может быть записан в виде $dy = f'(x_0)\Delta x$. В частности, дифференциал функции $y = x$ равен $dx = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$. Поэтому пишут $dy = f'(x_0)dx$.

# Геометрический смысл дифференциала функции

Пусть дана дифференцируемая функция $y = f(x)$ в окрестности точки $x_0$. Точки $B$ и $D$ на графике функции имеют соответственно координаты $(x_0, f(x_0))$ и $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$.



Исходя из геометрического смысла производной имеем: $f'(x_0) = tg\angle FBE$; но тогда $f'(x_0)\Delta x = dy$ есть длина отрезка $EF$.

Таким образом, с геометрической точки зрения ***дифференциал равен приращению ординаты касательной от точки*** $x_0$ ***до точки*** $x_0 + \Delta x$.

# Применение дифференциала для приближенных вычислений

В равенстве $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \varepsilon(\Delta x)$ функция $\varepsilon(\Delta x)$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем $\Delta x$, следовательно, можно говорить о приближенных равенствах: $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$, или $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Эта формула важна в задачах, когда известны значения функции $f(x)$ и ее производной $f'(x)$ в точке $x_0$ и требуется вычислить значение функции $f(x)$ в некоторой близкой к $x_0$ точке $x$.

# §10. Применение производной к исследованию функции

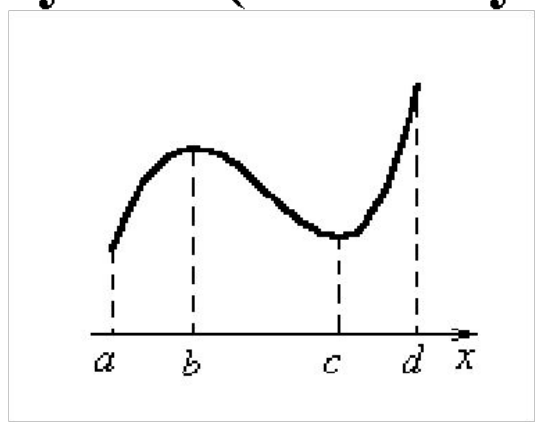
Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на промежутке $X$.

## 1. Промежутки монотонности функции

***Теорема 1. (условие монотонности функции на промежутке).*** Если функция $f(x)$ определена и дифференцируема на интервале $(a;b)$, то для того чтобы она была **строго возрастающей (убывающей)** на этом промежутке необходимо и достаточно чтобы $f^{\prime}(x) > 0 \quad \forall x \in X \quad (f^{\prime}(x) < 0 \quad \forall x \in X)$.

## 2. Экстремумы функции

*Определение 1.* Точка $x_0$ называется **точкой минимума (максимума)** функции $y=f(x)$, если она определена в некоторой окрестности этой точки и для каждой точки $x \neq x_0$ этой окрестности $f(x) > f(x_0)$ ($f(x) < f(x_0)$). Значение функции $f(x_0)$ называется **минимумом (максимумом).**




$b$ – точка максимума, $c$ – точка минимума функции на промежутке $(a;d)$.

Под **экстремумом** понимается либо минимум, либо максимум.

***Теорема 2 (необходимое условие существования экстремума).*** Если функция $y = f(x)$ в точке $x_0 \in X$ имеет экстремум, то ее производная а этой точке либо равна нулю, либо не существует.

***Определение 2.*** Внутренние точки области определения функции в которых производная этой функции равна нулю или не существует называются **стационарными** или **критическими** точками функции.

***Теорема 3 (достаточное условие экстремума функции – 1-е правило).***

Пусть $x_0 \in X$ - стационарная точка функции $y = f(x)$. Если в некоторой окрестности точки $x_0$ слева от нее производная $f'(x)>0$, справа $f'(x)<0$, то $x_0$– точка максимума, в противном случае $x_0$– точка минимума.

***Теорема 4 (достаточное условие экстремума функции – 2-е правило).***

Пусть $f'(x_0)=0$ и существует $f''(x_0)$.

Тогда если $f''(x_0)>0$, то $x_0$– точка максимума. Если же $f''(x_0)<0$, то $x_0$– точка минимума.

# Правило нахождения точек экстремума и промежутков монотонности

1. Найти область определения функции $f(x)$.

2. Найти все критические точки функции $f(x)$. Для этого найти производную, решить уравнение $f'(x)=0$ и найти точки $x$ из области определения, в которых $f'(x)$ не существует.

3. Разбить область определения критическими точками на промежутки и в них найти знаки производной.

4. В промежутках, где производная положительна, функция возрастает, а в промежутках, где производная отрицательна, функция убывает.

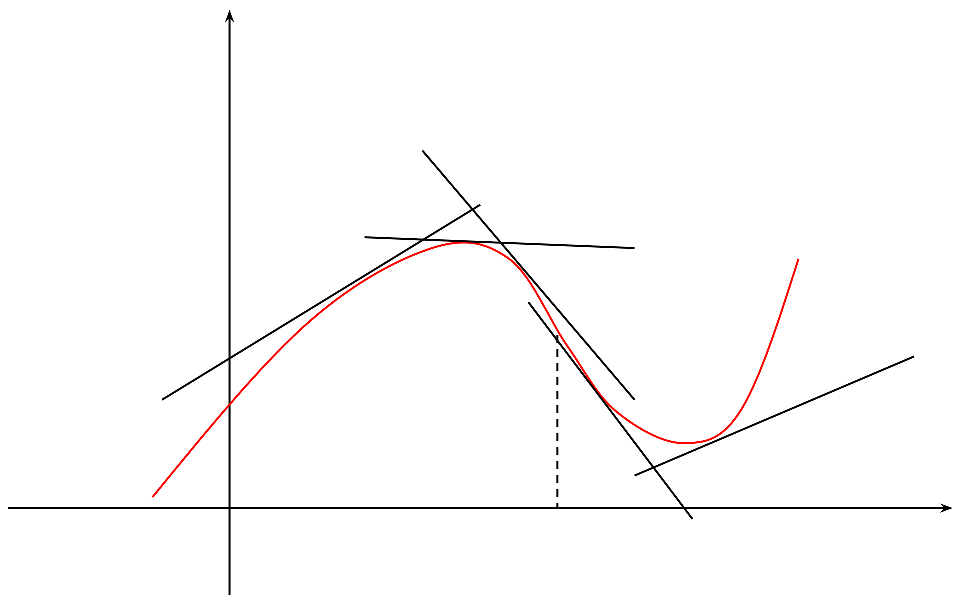
5. Точки экстремума находятся среди критических точек. Пусть $x_0$ – критическая точка. Если в интервале слева от $x_0$ производная положительна (отрицательна), а справа отрицательна (положительна), то $x_0$ – точка максимума (минимума).

## 3. Условия выпуклости и вогнутости. Точки перегиба

Пусть функция $y = f(x)$ определена на промежутке $[a;b]$ и в каждой точке сегмента имеет конечную производную, т.е. в каждой точке к графику функции можно провести касательную.

***Определение 1.*** Функция $y = f(x)$ называется **вогнутой** на $[a;b]$, если график этой функции лежит выше любой касательной к графику

***Определение 2.*** Функция $y = f(x)$ называется **выпуклой** на $[a;b]$, если график этой функции лежит ниже любой касательной к графику.



***Теорема 5.*** Если функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$ и $\forall x \in [a;b]$ имеет конечные первую и вторую производные, то для того чтобы функция была выпуклой на $[a;b]$ необходимо и достаточно чтобы $f^{\|}(x) \le 0$, а для того чтобы она была вогнутой необходимо и достаточно, чтобы $f^{\|}(x) \ge 0 \quad \forall x \in [a;b]$.

Если при переходе через точку $x_0$ функция меняется с выпуклости на вогнутость, или, наоборот – с вогнутости на выпуклость, то эта точка называется **точкой перегиба**.

***Теорема 6 (необходимое условие точки перегиба).*** Если точка $x_0 \in X$ является точкой перегиба, то ее вторая производная в этой точке либо равна нулю, либо не существует.

***Теорема 7 (достаточное условие точки перегиба).*** Если при переходе через точку $x_0$ вторая производная меняет знак, то эта точка является точкой перегиба.

## Правило нахождения точек перегиба и промежутков выпуклости и вогнутости

1. Найти область определения функции $f(x)$.

2. Найти $f''(x)$ и решить уравнение $f''(x) = 0$ и найти точки $x$ из области определения, в которых $f''(x)$ не существует.

3.Разбить область определения найденными в предыдущем пункте точками на промежутки и в них найти знаки второй производной.

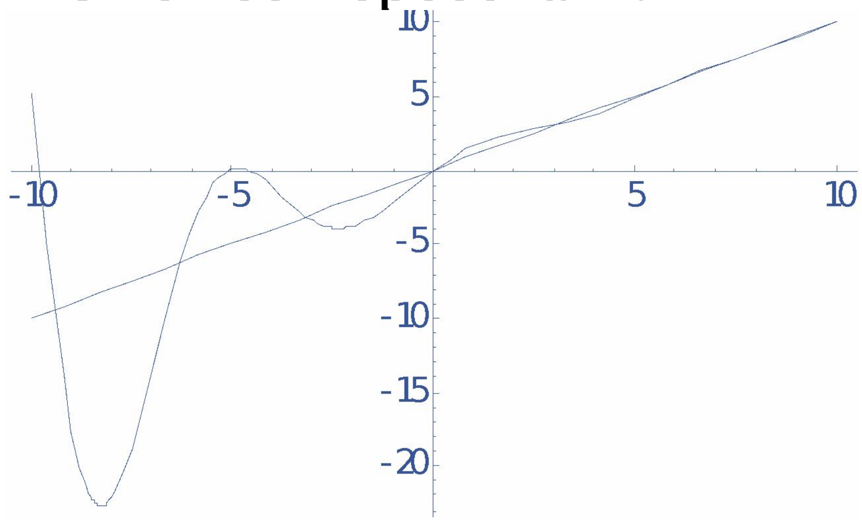
4. В промежутках, где вторая производная положительна, функция вогнутая, а в промежутках, где вторая производная отрицательна, функция выпуклая.

5. Абсциссы точек перегиба нужно искать среди значений, найденных в пункте 2. Пусть $x_0$ – такое значение. Если производная в точке $x_0$ (конечная или бесконечная) существует и в интервалах непосредственно слева и справа от $x_0$ вторая производная имеет разные знаки, то $x_0$ – абсцисса точки перегиба.

# 4. Асимптоты функции

***Определение.*** Прямая называется *асимптотой* кривой, если расстояние от переменной точки кривой до этой прямой при удалении точки в бесконечность стремится к нулю.

Асимптоты могут быть прямые и наклонные. Кривая, неограниченно приближаясь к своей асимптоте, может ее пересекать.



Если $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$ или $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\infty$ или $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, то прямая $x=a$ – **вертикальная асимптота** кривой $y=f(x)$.

Предположим, что кривая $y = f(x)$ имеет **наклонную асимптоту** $y=kx+b$

Тогда

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}, \quad b=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right].$$

**Горизонтальные асимптоты** являются частным случаем наклонных асимптот при $k=0$.

## Схема исследования функций

1) Находится область определения функции.
2) Функция исследуется на непрерывность и точки разрыва.
3) Функция исследуется на четность и нечетность.
4) Функция исследуется на периодичность.
5) Находятся точки пересечения с осями координат.
6) Функция исследуется на монотонность.
7) Функция исследуется на выпуклость и вогнутость и точки перегиба.
8) Находятся асимптоты.
9) Построение графика.