

Таблицы

Алгебра 8 класс

Содержание

- Рациональные дроби и их свойства
- Сумма и разность дробей
- Произведение и частное дробей
- Функция $y=k/x$ и ее график
- Действительные числа
- Арифметический квадратный корень
- Функция квадратного корня из x и его график
- Свойства арифметического квадратного корня
- Квадратное уравнение и его корни
- Формула корней квадратного уравнения
- Дробные рациональные уравнения
- Числовые неравенства и их свойства
- Неравенства с одной переменной и их системы
- Степень с целым показателем и ее свойства

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ДРОБИ И ИХ СВОЙСТВА

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ:

I. Целые выражения имеют смысл при любых значениях переменных

Примеры: $a^3 + b^2$; $\frac{y}{2} + \frac{x+3}{5}$; $y:5$

II. Дробные выражения имеют смысл при допустимых значениях переменных

Примеры: $z + \frac{7}{x+y}$; $\frac{c}{a^2 - b^2}$; $n:m$

РАЦИОНАЛЬНАЯ ДРОБЬ – частный вид рационального выражения, дробь, числитель и знаменатель которой – многочлены.

Основное свойство дроби

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc} \quad \text{Верно для любых } a, b \text{ и } c, \\ \text{где } b \neq 0, c \neq 0$$

Правило об изменении знака перед дробью

$$\frac{a}{b} = -\frac{-a}{b} = -\frac{a}{-b}, \text{ где } b \neq 0$$



СУММА И РАЗНОСТЬ ДРОБЕЙ

Сложение дробей с одинаковыми
знаменателями

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}, c \neq 0$$

Разность дробей с одинаковыми
знаменателями

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}, c \neq 0$$

Сложение дробей с разными
знаменателями

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}, b \neq 0, d \neq 0$$

Вычитание дробей с разными
знаменателями

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}, b \neq 0, d \neq 0$$



ПРОИЗВЕДЕНИЕ И ЧАСТНОЕ ДРОБЕЙ

Произведение
дробей

Возведение
дробей в степень

при $b \neq 0, d \neq 0$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Деление дробей

при $b \neq 0, c \neq 0$ и $d \neq 0$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Рациональное выражение можно
представить в виде рациональной дроби

Пример: при $a \neq b, a \neq 0$ и $b \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{\frac{a}{b} - \frac{b}{a}}{\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2} &= \frac{\frac{a}{b}ab - \frac{b}{a}ab}{\frac{a}{b}ab + \frac{b}{a}ab - 2ab} = \\ &= \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2 - 2ab} = \frac{(a-b)(a+b)}{(a-b)^2} = \frac{a+b}{a-b} \end{aligned}$$

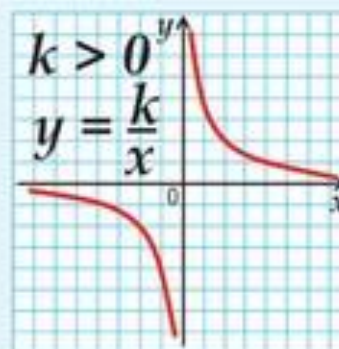
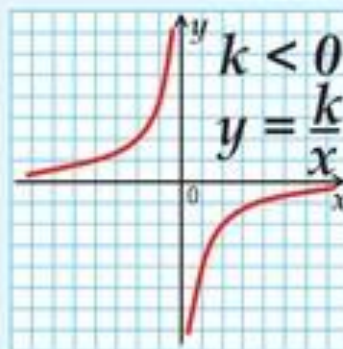
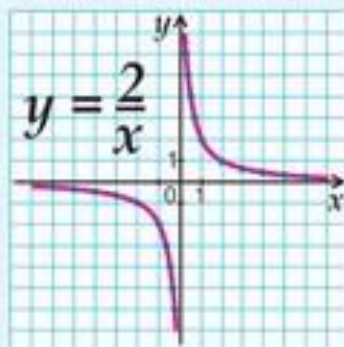


ФУНКЦИЯ $y = \frac{k}{x}$ И ЕЕ ГРАФИК

Функция вида $y = \frac{k}{x}$, где x – независимая переменная и k – неравное нулю число, называется обратной пропорциональностью.

График такой функции - гипербола.

Гипербола состоит из двух ветвей ($x \neq 0$)



ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Натуральные
числа – $\mathbb{N}$

Например:
 $1; 3; 19; \dots$

Числа,
противоположные
натуральным

Например:
 $-21; -7; -2; \dots$

Число 0

Множество
целых чисел – $\mathbb{Z}$

Например:
 $-5; -3; 0;$
 $11; 128; \dots$

Дробные числа

Например:
 $-\frac{3}{7}; \frac{2}{9}; \frac{20}{19}; 0,7; \dots$

Множество
рациональных
чисел – $\mathbb{Q}$

Например:
 $-0,7; 0,(413); 5; \frac{17}{3}$

Множество
иррациональных
чисел

Например:
 $-\sqrt{3}; \pi; \sqrt{17}; \dots$

Множество действительных
чисел – $\mathbb{R}$

Например:
 $-3; -2,(13); 0; \sqrt{11}; 513; \dots$



АРИФМЕТИЧЕСКИЙ КВАДРАТНЫЙ КОРЕНЬ

Число, квадрат которого равен a ,
называют **КВАДРАТНЫМ КОРЕНЕМ**
из числа a

Неотрицательное число, квадрат которого
равен a , называют **АРИФМЕТИЧЕСКИМ**
КВАДРАТНЫМ КОРЕНЕМ из числа a

Если $b \geq 0$ и $b^2 = a$, то $\sqrt{a} = b$

Если $a < 0$, то выражение $\sqrt{a}$ не имеет
смысла

Если $\sqrt{a}$ имеет смысл, то $(\sqrt{a})^2 = a$

Уравнение $x^2 = a$

1) $a < 0$, значит, $x^2 = a$ не имеет корней

2) $a = 0$, значит, $x^2 = a$ имеет
единственный корень - нуль

3) $a > 0$, значит, $x^2 = a$ имеет два корня

$$x_1 = -\sqrt{a} \text{ и } x_2 = \sqrt{a}$$



ФУНКЦИЯ $y = \sqrt{x}$ И ЕЕ ГРАФИК

- 1) График находится в первой координатной четверти
при $x > 0, y > 0$
- 2) График функции проходит через начало координат
при $x = 0, y = 0$
- 3) График функции идет вверх
при $x_1 > x_2, y(x_1) > y(x_2)$

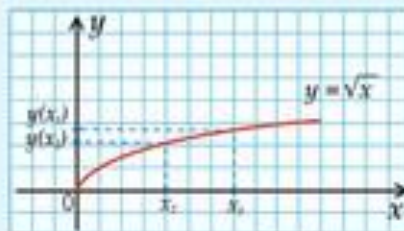


График функции $y = \sqrt{x}$ симметричен графику функции $y = x^2$ (при $x \geq 0$) относительно прямой $y = x$



СВОЙСТВА АРИФМЕТИЧЕСКОГО КВАДРАТНОГО КОРНЯ

Свойство 1

Корень из произведения, где множители не отрицательны, равен произведению корней из этих множителей

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}, \text{ если } a \geq 0, b \geq 0$$

Пример: $\sqrt{64 \cdot 169} = \sqrt{64} \cdot \sqrt{169} = 8 \cdot 13 = 104$

Свойство 2

Корень из дроби, где знаменатель положителен, а числитель неотрицателен, равен отношению корня из числителя к корню из знаменателя

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \text{ если } a \geq 0, b > 0$$

Пример: $\sqrt{\frac{16}{49}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{49}} = \frac{4}{7}$

Квадратный корень из степени

$$\sqrt{a^2} = |a|, \text{ верно для любого } a$$

Пример: $\sqrt{(-11)^2} = |-11| = 11$



КВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ И ЕГО КОРНИ

Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$,
где $a \neq 0$, b и c – некоторые числа,
а x – переменная, называется
КВАДРАТНЫМ УРАВНЕНИЕМ.

Если b и/или c равно нулю, то уравнение
 $ax^2 + bx + c = 0$ называется
неполным квадратным уравнением.

Три вида
неполных квадратных уравнений:

1) $ax^2 = 0$

$$x_1 = x_2 = 0$$

2) $ax^2 + bx = 0, b \neq 0$

$$x_1 = 0 \text{ и } x_2 = -\frac{b}{a}$$

3) $ax^2 + c = 0, c \neq 0$

при $-\frac{c}{a} > 0$ уравнение имеет два корня

$$x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}} \text{ и } x_2 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

при $-\frac{c}{a} < 0$ корней нет



ФОРМУЛА КОРНЕЙ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + 2x \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Дискриминант квадратного уравнения

$$D = b^2 - 4ac$$

1) Если $D < 0$, то нет корней

2) Если $D = 0$, то $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$

3) Если $D > 0$, то $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$

$x^2 + px + q = 0$ – приведенное
квадратное уравнение.

Теорема Виета. Если $x^2 + px + q = 0$, то:
 $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$



ДРОБНЫЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ –

уравнения, левая и правая части которых являются **рациональными выражениями**

$$3x + 8 = 4(9 - x); 2x + \frac{3}{x} = -7x + 21; \frac{x-11}{5x-3} = \frac{x+13}{x}$$

Целые уравнения

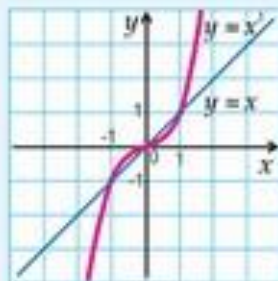
$$7x + 14 = 5(11 - x);$$
$$7(15 + 4x) = 6(x + 2)$$

Дробные рациональные уравнения

$$\frac{x+19}{x-13} = \frac{17+2x}{4-x}$$

Решение дробных рациональных уравнений:

- 1) Определить общий знаменатель всех дробей, входящих в уравнение
- 2) Вычислить произведение каждой части уравнения на общий знаменатель
- 3) Решить полученное целое уравнение
- 4) Исключить из найденных корней те, которые обращают общий знаменатель в нуль.



Графический способ решения уравнения:

Решите уравнение $x^3 = x$

Значит, $x^3 = x$ при
 $x_1 = -1$, $x_2 = 0$,
 $x_3 = 1$



ЧИСЛОВЫЕ НЕРАВЕНСТВА И ИХ СВОЙСТВА

Если $a - b$ – положительное число, то число a **больше** числа b , а если разность $a - b$ – отрицательное число, то число a **меньше** числа b



Свойство 1. Пусть $a > b$, значит, $b < a$

Пусть $a < b$, значит, $b > a$

Свойство 2. Пусть $a < b$ и $b < c$, значит, $a < c$

Свойство 3. Пусть c – любое число и $a < b$,
значит, $a + c < b + c$

Свойство 4. Пусть c – положительное число и $a < b$,
значит, $ac < bc$

Пусть c – отрицательное число и $a < b$,
значит, $ac > bc$

Свойство 5. Пусть a и b – положительные числа и $a < b$,
значит, $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

Свойство 6. Пусть $a < b$ и $c < d$, значит, $a + c < b + d$

Свойство 7. Пусть $a < b$ и $c < d$, a, b, c и d –
положительные числа, значит, $ac < bd$

Свойство 8. Пусть $a < b$, a и b – положительные числа,
 n – натуральное число, значит, $a^n < b^n$



НЕРАВЕНСТВА С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ И ИХ СИСТЕМЫ

Числовым промежутком от a до b называют множество всех чисел x , удовлетворяющих условию $a < x < b$

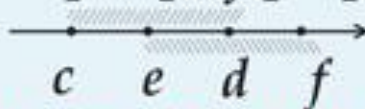
Обозначение: $(a; b)$

$[a; b]$



Пересечением числовых промежутков называют промежуток, составляющий общую часть этих промежутков

$$[c; d] \cap [e; f] = [e; d]$$



Объединением числовых промежутков называют промежуток, состоящий из элементов, принадлежащих хотя бы одному из этих промежутков

$$[c; d] \cup [e; f] = [c; f]$$

Решение неравенства с одной переменной – значение переменной, обращающее его в верное числовое неравенство.

Решение системы неравенств с одной переменной – значение переменной, обращающее каждое из неравенств системы в верное числовое неравенство.

Решить систему неравенств – значит найти все ее решения, либо доказать, что решений не существует.



СТЕПЕНЬ С ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ И ЕЕ СВОЙСТВА

Если $a \neq 0$ и n – отрицательное целое число, то: $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$

Свойство 1. Если $a \neq 0$, а m и n – целые, то $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
 $13^{-12} \cdot 13^{37} = 13^{-12+37} = 13^{25}$

Свойство 2. Если $a \neq 0$, а m и n – целые, то $a^m : a^n = a^{m-n}$
 $11^{18} : 11^{11} = 11^{18-11} = 11^7$

Свойство 3. Если $a \neq 0$, а m и n – целые, то $(a^m)^n = a^{mn}$
 $(23^3)^2 = 23^{3 \cdot 2} = 23^6$

Свойство 4. Если $a \neq 0$ и $b \neq 0$, а n – целое, то $(ab)^n = a^n b^n$
 $(12)^2 = (3 \cdot 4)^2 = 3^2 \cdot 4^2 = 9 \cdot 16 = 144$

Свойство 5. Если $a \neq 0$ и $b \neq 0$, а n – целое, то $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
 $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$

Стандартный вид числа b – его запись в виде $a \cdot 10^n$, где n – целое число, $1 \leq a < 10$. Число n – порядок числа b

