КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

8 класс

Учитель математики

ПВПШ№1

Сеноженская Г. С.

5klass.net

- *Определение квадратного уравнения*
- *Виды квадратных уравнений*
- *Решение квадратных уравнений*

Квадратные уравнения-это фундамент, на котором покоится величественное здание алгебры. Квадратные уравнения находят широкое применение при решении тригонометрических, показательных, логарифмических, иррациональных и трансцендентных уравнений и неравенств. В школьном курсе математики изучают формулы корней квадратных уравнений, с помощью которых можно решать любые квадратные уравнения. Однако имеются и другие способы решения квадратных уравнений,которые позволяют очень быстро и рационально решать многие уравнения. Разберём некоторые из них.

Уравнение вида $ax^2+bx+c=0$, x-переменная, a, b,c - некоторые числа, $a \neq 0$, называется квадратным уравнением.

Примеры:

$8x^2+3x-5=0$, $4x^2+6x=0$, $3x^2-4=0$.

Виды квадратных уравнений

Неполные

$ax^2+bx=0$

$ax^2=0$

$ax^2+c=0$

Полные

$ax^2+bx+c=0,$

$a\neq 0,\ b\neq 0,\ c\neq 0,$

$x^2+px+g=0$

приведённое вадратное уравнение

Решение неполных квадратных уравнений

$ax^2+bx=0,$

$ax^2=-c\ ,$

$$x^2=-\frac{c}{a}$$

$$x1=-\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

$3x^2-12=0,$

$3x^2=12,$

$x^2=12:3,$

$x^2=4,$

$x_1=-2,\qquad x_2=2.$

Ответ:$-2;\ 2.$

$ax^2=0,$

$x^2=0,$

$x=0.$

$$x=-\frac{b}{a}$$

$ax^2+bx=0,$

$x(ax^2+b)=0,$

$x=0,\ \ ax+b=0,$

$2x^2=0,$

$x^2=0,$

$x=0.$

Ответ: $0.$

$5x^2-2x=0,$

$x(5x-2)=0,$

$x=0,\ \ 5x-2=0,$

$$x=\frac{2}{5}.$$

Ответ: 0; $\frac{2}{5}$

Способы решения квадратных уравнений

- разложение левой части на множители;
- метод выделения полного квадрата;
- с применением формул корней квадратного уравнения;
- с применением теоремы Виета;
- способом «переброски»;
- по сумме коэффициентов квадратного уравнения;
- графический.

Разложение левой части на множители

$x^2+10x-24=0,$

$x^2+12x-2x-24=0,$

$x(x+12)-2(x+12)=0,$

$(x-2)(x+12)=0,$

$x-2=0, \quad x+12=0,$

$x=-12.$

Ответ: -12; 2.

Решите уравнения:

$x^2-4x+4=0,$

$x^2+6x+9=0,$

$x^2+4x+3=0,$

$x^2+2x-3=0.$

Метод выделения полного квадрата

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

$x^2+6x-7=0$

$x^2+2\cdot3\cdot x+32-32-7=0$

$(x+3)^2-16=0$

$(x+3)^2=16$

$x+3=-4,\quad x+3=4$

$x=-7 \qquad x=1$

Ответ: -7; 1.

$$x^2-2\cdot\frac{3}{10}\cdot x+\left(\frac{3}{10}\right)^2-\left(\frac{3}{10}\right)^2-\frac{2}{5}=0$$

$$\left(x-\frac{3}{10}\right)^2-\frac{49}{10}=0$$

$$x-\frac{3}{10}=-\frac{7}{10} \qquad x-\frac{3}{10}=\frac{7}{10}$$

$$x=\frac{2}{5} \qquad x=1$$

Ответ: 0,4; 1.

Решите уравнения методом выделения полного квадрата

$5x^2-3x-2=0$

$x^2-2x+5=0$

$2x^2+3x-6=0$

$x^2+5x-4=0$

$4x^2-3x-4=0$

$2x^2-4x+7=0$

$4x^2-8x+4=0$

С использованием формул корней квадратного уравнения

$ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0,$

D>0 - два корня, D=0 - один корень,

D<0 - нет корней

$$b - \text{чётное}$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$$

$$b - \text{чётное}, b = 2k$$

$$D_1 = k^2 - ac$$

$$x_1 = \frac{-k-\sqrt{D}}{a}$$

$$x_2 = \frac{-k+\sqrt{D}}{a}$$

Примеры:

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$b = 5 - \text{нечётное}$$

$$D = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 =$$

$$= 25 - 16 = 9, D > 0$$

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{5 - 3}{4} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{5 + \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{5 + 3}{4} = 2$$

$$\text{Ответ:} \frac{1}{2}; 2$$

$$x^2 + 4x - 21 = 0$$

$$b = 4 - \text{чётное},$$

$$b = 2 \cdot 2, k = 2,$$

$$D_1 = 2^2 + 21 = 25,$$

$$x_1 = -2 - \sqrt{25} =$$

$$= -2 - 5 = -7.$$

$$x_2 = -2 + \sqrt{25} =$$

$$= -2 + 5 = 3.$$

$$\text{Ответ}: -7; 3.$$

Решите уравнения,применяя формулу корней квадратного уравнения

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$6x^2 + 5x + 1 = 0$$

$$3x^2 - 7x - 1 = 0$$

$$4x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$10x^2 - 6x + 9 = 0$$

С использованием теоремы Виета

$x^2+px+g=0,$

Если x_1, x_2 - корни уравнения, то

$x_1+x_2=-p,$

$x_1+x_2=g$

Решите уравнения:

$x^2+2x-8=0$

$x^2+10x+9=0$

$x^2-12x+35=0$

$x^2-2x+1=0$

$x^2-2x-15=0$

D>0, два корня,

по теореме, обратной теореме Виета, имеем:

$x_1+x_2=2, \quad x_1=5,$

$x_1 \cdot x_2=-15; \quad x_2=-3.$

Ответ: $5; -3$.

Способ «переброски»

$ax^2+bx+c=0, a \neq 0$

Умножим обе части уравнения на а

$a^2x^2+bax+ca=0$

Пусть ax=y,тогда

$y^2+by+ca=0$

Корни уравнения найдём по теореме, обратной теореме Виета, или по сумме коэффициентов.

$ax_1=y_1,\ ax_2=y_2$

$x_1=\frac{y_1}{a},\ x_2=\frac{y_2}{a}$

$$2x^2-11x+15=0\,|\cdot 2,$$

$$2^2\cdot x^2-2\cdot 11\cdot x+2\cdot 15=0,$$

$$2x=y,$$

$$y^2-11y+30=0.$$

По теореме, обратной теореме Виета, имеем:

$$y_1=5,\ y_2=6$$

$$2x_1=5;2x_2=6$$

$$x_1=2\frac{1}{2},\ x_2=3$$

$$Ответ: 2\frac{1}{2};3.$$

Решите уравнения методом «переброски»

$$2x^2 - 9x + 9 = 0$$

$$10x^2 - 11x + 3 = 0$$

$$3x^2 + 11x + 6 = 0$$

$$4x^2 + 12x + 5 = 0$$

$$3x^2 + x - 4 = 0$$

$$5x^2 - 11 + 16 = 0$$

$$2x^2 + x - 10 = 0$$

$$6x^2 + 5x - 6 = 0$$

По сумме коэффициентов квадратного уравнения

$ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$.

1.Если $a+b+c=0$,

то $x_1=1$, $x_2=\frac{c}{a}$

2. Если $a-b+c=0$,

то $x_1=-1$, $x_2=-\frac{c}{a}$

Примеры:

$5x^2-7x+2=0$

$3x^2+5x-8=0$

$839x^2-448x-391=0$

$11x^2+25x-36=0$

Т.к.$11+25-36=0$,

то $x_1=1$, $x_2=\frac{-36}{11}$

Ответ: $\frac{-36}{11}$;1.

$5x^2+12+7=0$

Т.к.$5-12+7=0$

$x_1=-1$, $x_2=\frac{-7}{5}$

Ответ: -1; $\frac{-7}{5}$.

Графический

$ax^2+bx+c=0$, $a\neq0$

$ax^2=-bx-c$

$y=ax^2$ - ***графиком является парабола***

$y=-bx-c$ - ***графиком является прямая***

Возможны следующие случаи:

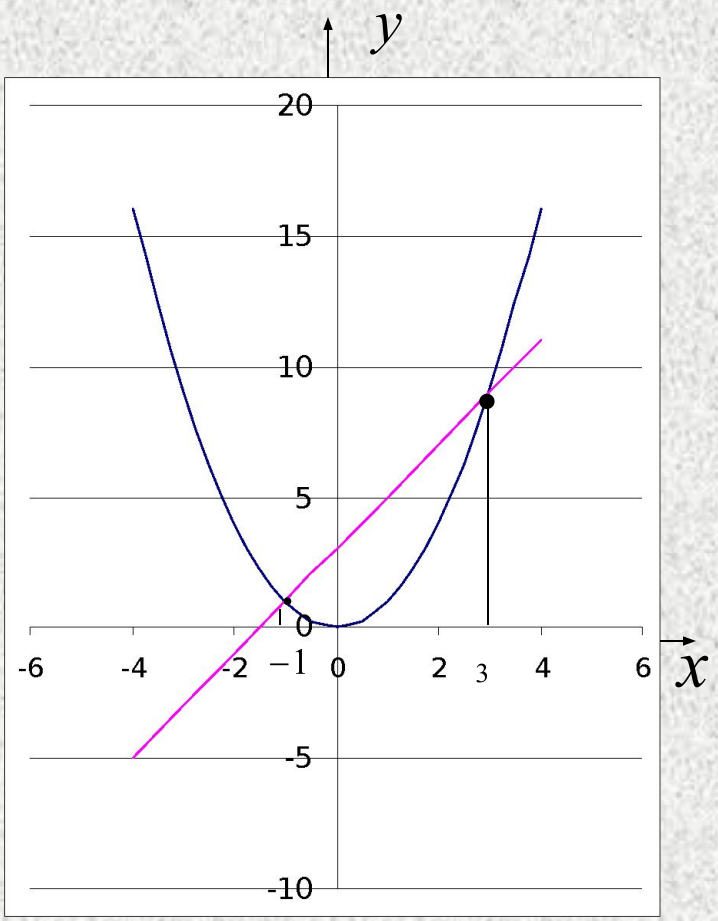
- ***Прямая и парабола могут касаться(только одна общая точка),т.е.уравнение имеет одно решение;***
- ***прямая и парабола могут пересекаться в двух точках, абсциссы точек пересечения являются корнями квадратного уравнения;***
- ***прямая и парабола не имеют общих точек,***
- ***т.е уравнение не имеет корней.***

$$x^2-2x-3=0$$
$$x^2=2x+3$$

$y=x^2$ - *парабола*

$y=2x+3$ - *прямая*

Прямая и парабола имеют две общие точки.



Ответ:-1; 3.

$$x^2-2x+1=0$$

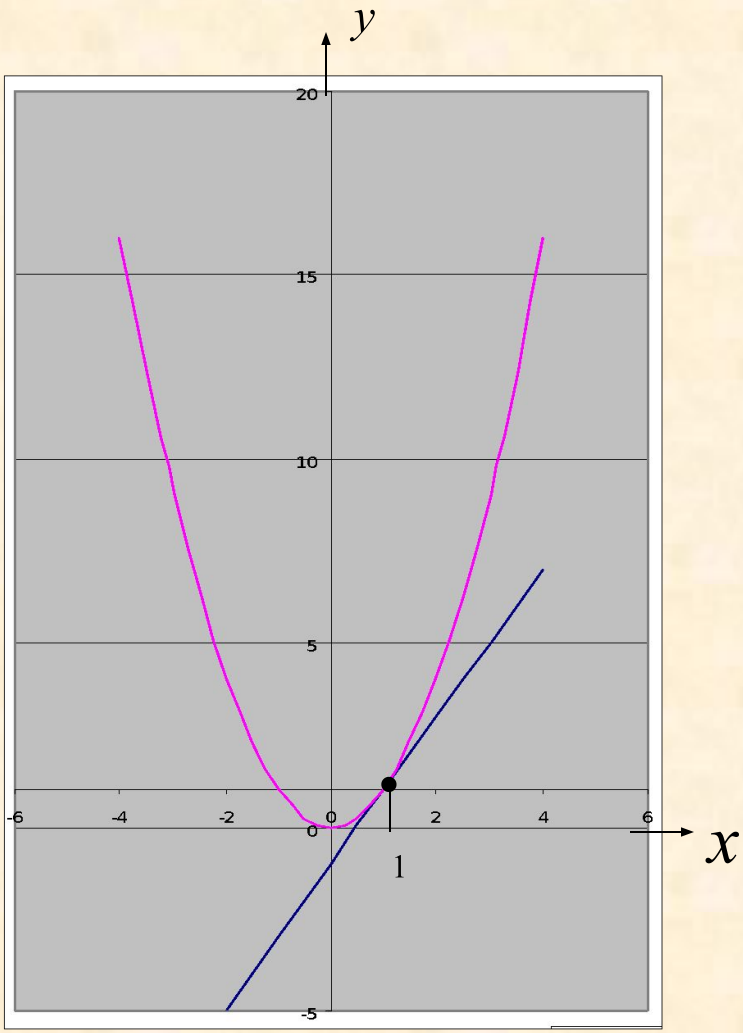
$$x^2=2x-1$$

$y=x^2$ - *парабола*

$y=2x-1$ - *прямая*

Прямая и парабола имеют одну общую точку.

Ответ:1.



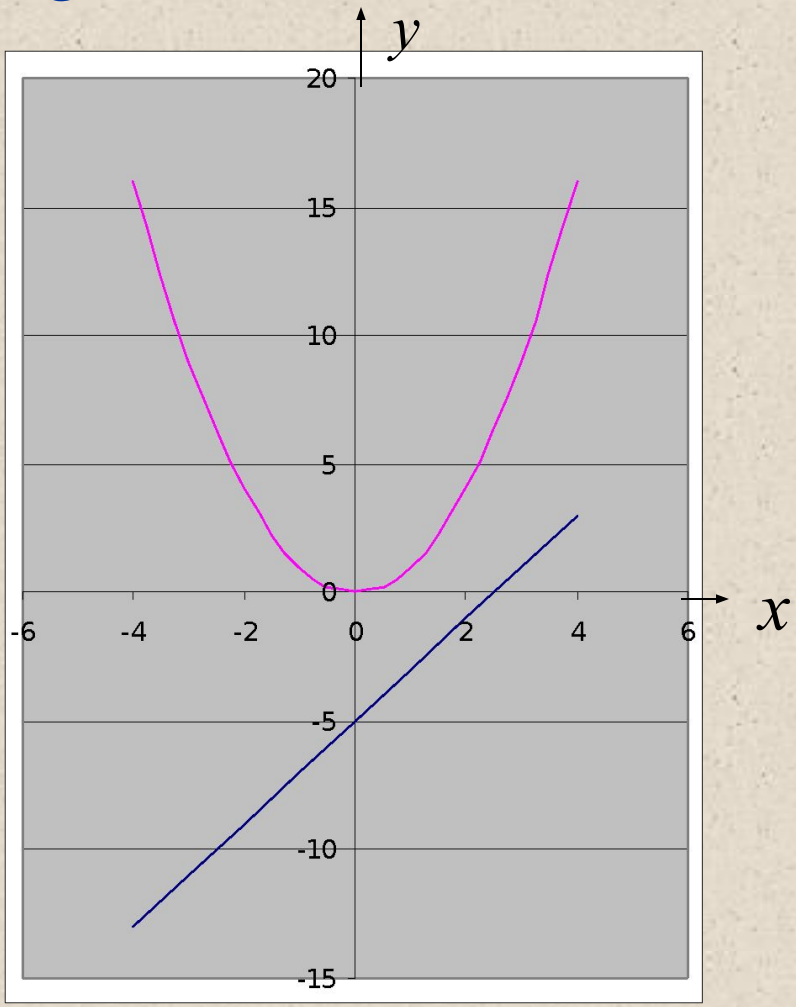
$$x^2-2x+5=0$$

$$x^2=2x-5$$

- $y=x^2$ - ***парабола***
- $y=2x-5$ - ***прямая***

Прямая и парабола не имеют общих точек.

Ответ:***корней нет.***



Решите графически уравнения

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$x^2 + 4x + 6 = 0$$

$$4x^2 - 3x - 1 = 0$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$4x^2 - 4x - 1 = 0$$