

Вероятностные явления в возмущенных динамических системах

А.И.Нейштадт, ИКИ РАН

*Электронная версия подготовлена А.А.Васильевым и М.Л.
Пивоваровым*

Вероятностные явления связаны с неперестановочностью пределов:

$$0 = \lim_{T \rightarrow \infty} \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{0 \leq t \leq T} |x_1(t) - x_2(t)| \neq \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t \leq T} |x_1(t) - x_2(t)|$$



δ - неточность знания начальных условий

T - время движения

$$\text{Возмущенная система} = \text{Интегрируемая система} + \varepsilon \text{ Возмущение}$$

$$\underline{T \gtrsim 1/\varepsilon}$$

$$0 < \varepsilon \ll 1$$

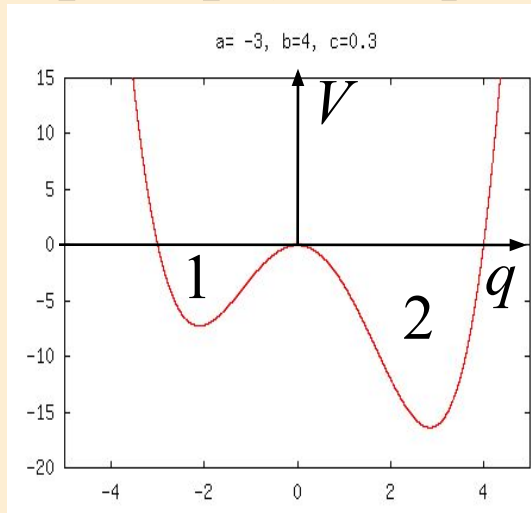
$$0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{0 \leq t \leq 1/\varepsilon} |x_1(t) - x_2(t)| \neq \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{0 \leq t \leq 1/\varepsilon} |x_1(t) - x_2(t)|$$

Темы:

- Вероятностное рассеяние при переходах через сепаратрису
- Скачки адиабатического инварианта при переходах через сепаратрису
- Рассеяние на резонансах, захват в резонанс

I. Вероятностное рассеяние при переходах через сепаратрису

Пример (В.И. Арнольд, 1963)

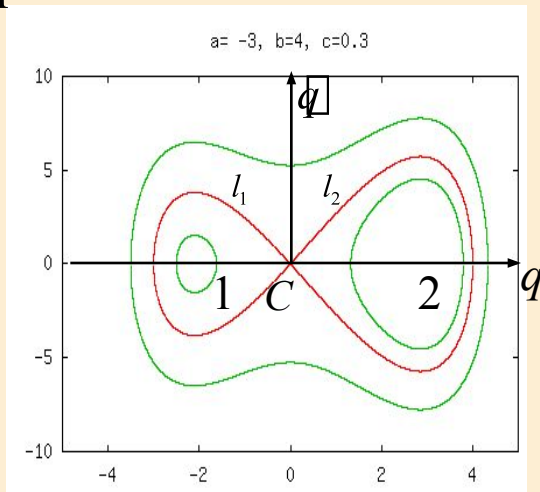


+ малое трение $\varepsilon f(q, \dot{q})$

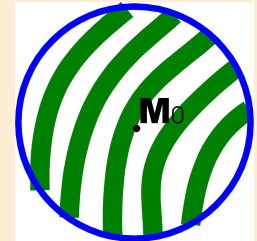
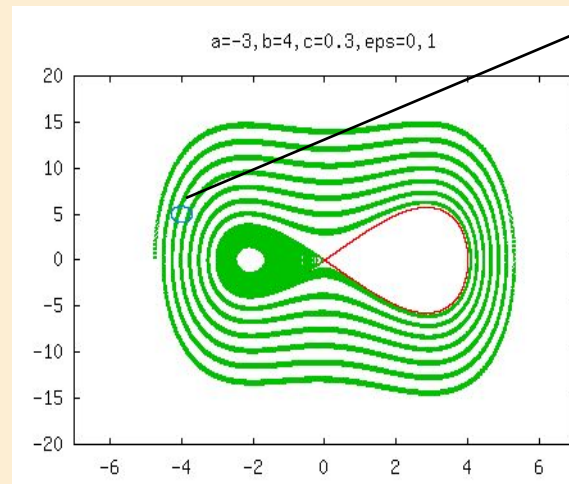
$$m\ddot{q} + \frac{\partial V(q)}{\partial q} = -\varepsilon f(q, \dot{q})$$

Фазовые портреты:

при $\varepsilon = 0$



при $\varepsilon \neq 0$



$$U^\delta = U_1^{\delta, \varepsilon} \square U_2^{\delta, \varepsilon} \square v$$

$\downarrow$
(1)

$\downarrow$
(2)

Определение. Вероятность захвата точки M_0 в яму «1» есть

$$P_1(M_0) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\text{mes } U_1^{\delta, \varepsilon}}{\text{mes } U^\delta}$$

Теорема. (В.И. Арнольд)

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\oint_{l_1} f \, dq}{\oint_{l_2} f \, dq} \quad , \quad P_1 + P_2 = 1$$

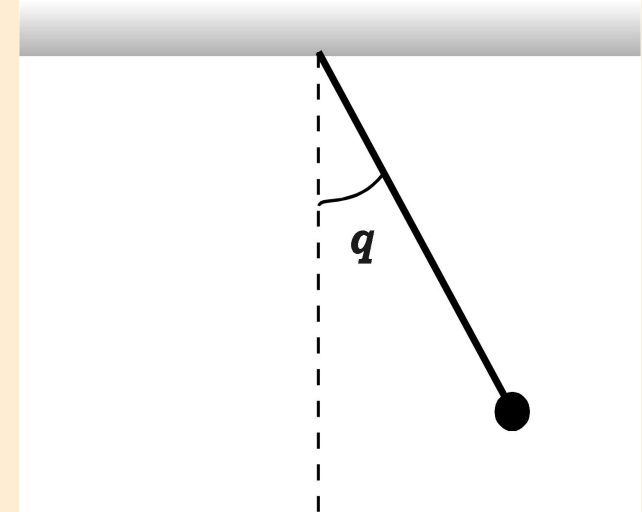
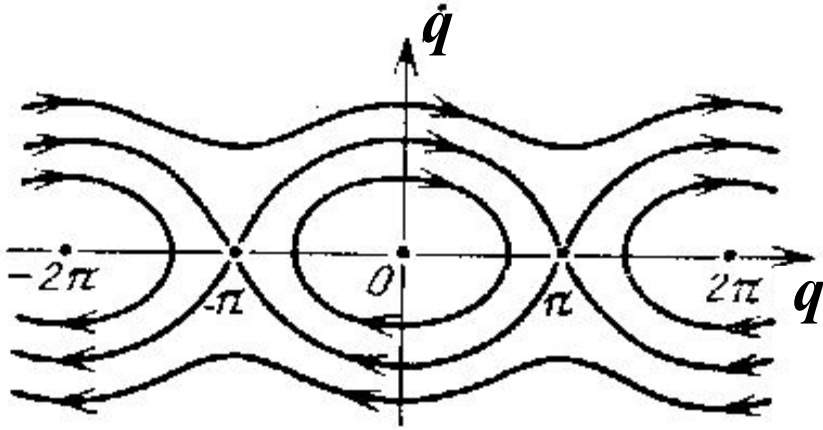
Вероятностный подход:

- И.М.Лифшиц, А.А.Слуцкий, В.М.Набутовский (1961) - движение заряженных квазичастиц
- В.И.Арнольд (1963) - математическое определение вероятности
- P.Goldreich, S.Peale (1966) - приливная эволюция вращения планет
- А.В.Гуревич, Е.Е.Цидилина (1979) - распространение радиоволн в ионосферных волноводных каналах
- G.Wolansky(1990), М.Брин, М.Фрейдлин (1999) - другое определение вероятности (+малая случайная сила) - «ответ» тот же

Пример: маятник

$$\ddot{q} + \omega^2(\tau) \sin q = -\varepsilon [K + L\dot{q}], \quad L, K > 0, \quad \tau = \varepsilon t$$

Фазовый портрет при $\varepsilon = 0, \tau = \text{const}$:

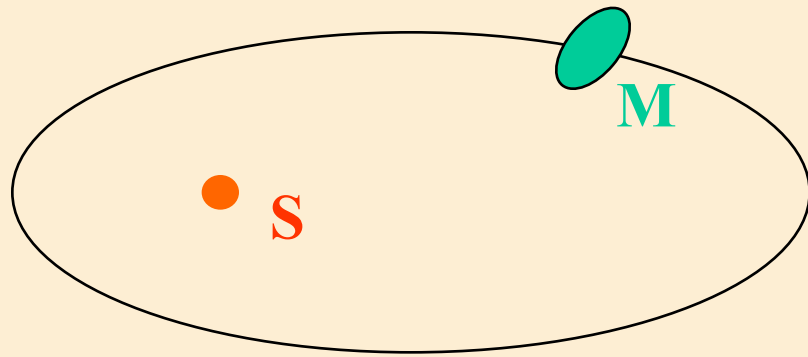


Вероятность захвата в колебательный режим (из режима прямого вращения):

$$P = \frac{8(\omega' + K\omega)}{4(\omega' + K\omega) + \pi L}, \quad \text{если} \quad L > 4(\omega' + K\omega) / \pi$$

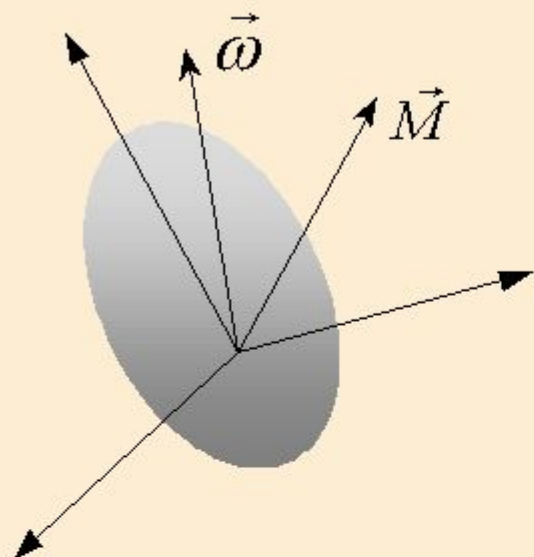
$$P = 1, \quad \text{если} \quad L \leq 4(\omega' + K\omega) / \pi$$

Исследование приливного механизма захвата Меркурия в резонанс приводит к задаче о захвате маятника в режим колебаний (P.Goldreich, S.Peale, 1966):



$$\frac{T_{ax}}{T_{orb}} \approx \frac{2}{3}$$

Пример: кувыркание твердого тела (А.Н., М.Л.Пивоваров, 1978)



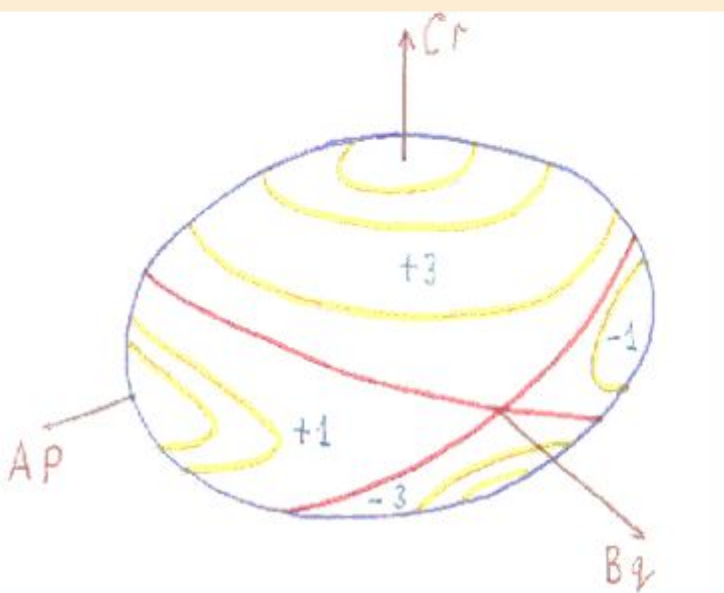
$$\vec{\omega} = (p, q, r), \quad A > B > C, \quad M_1 > 0, \quad M_3 > 0$$

$$A\dot{p} + (C - B)qr = \varepsilon M_1$$

$$B\dot{q} + (A - C)pr = \varepsilon M_2$$

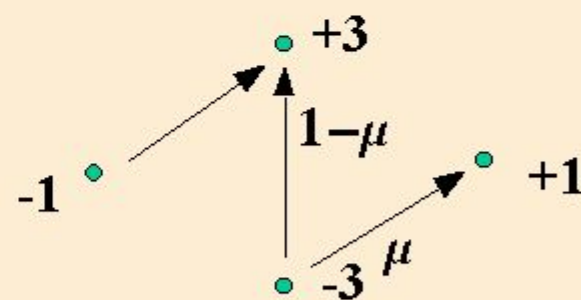
$$C\dot{r} + (B - A)pq = \varepsilon M_3$$

$$E = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2), \quad L^2 = A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2$$

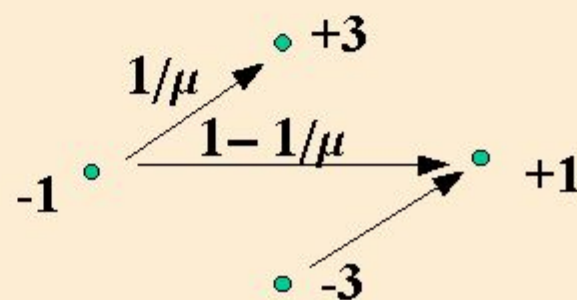


$$\mu = \frac{M_1}{M_3} \sqrt{\frac{(A - B)C}{(B - C)A}}$$

$$\mu < 1,$$



$$\mu > 1,$$



Общая теория:

Возмущенная
система

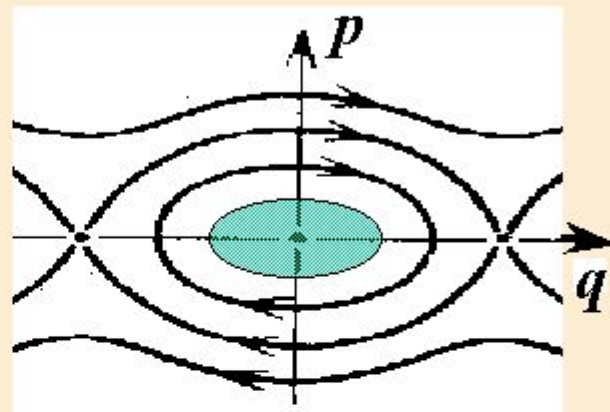
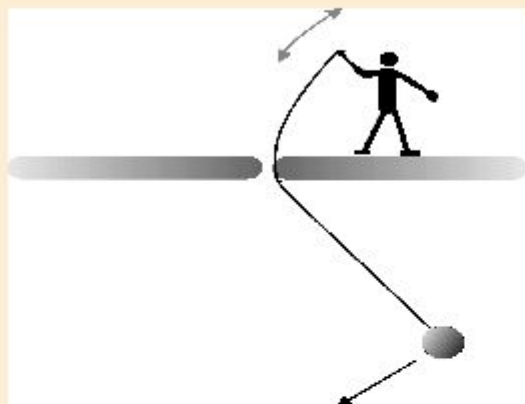
=

Система в $\mathbb{R}^l$,
имеющая $(l-1)$ интегралов

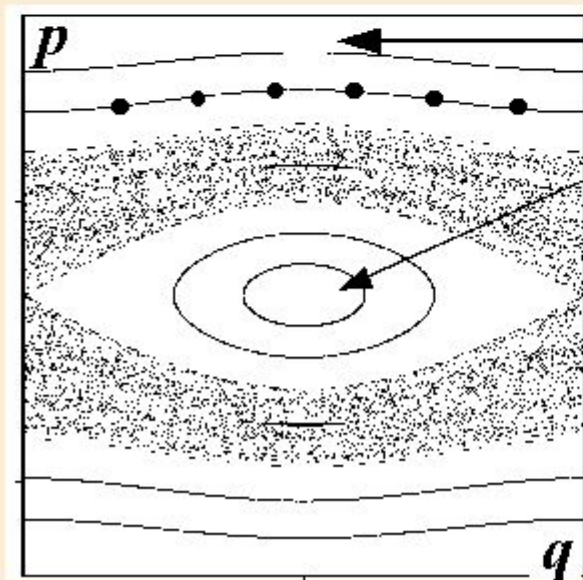
+ ε

Возмущение

II. Скачки адиабатического инварианта при переходах через сепаратрису



Действие $I = \frac{1}{2\pi} \oint p \, dq$ - адиабатический инвариант



Области вечной адиабатической инвариантности (В.И. Арнольд, 1961)

Сечение Пуанкаре

Скачок адиабатического инварианта при переходе маятника через сепаратису (А.В.Тимофеев, 1978) :

$$\Delta I = -\varepsilon a \Theta \ln(2 \sin \pi \xi), \quad \xi \in (C\sqrt{\varepsilon}, 1 - C\sqrt{\varepsilon})$$

ξ - квазислучайная величина, распределенная равномерно на $(0,1)$

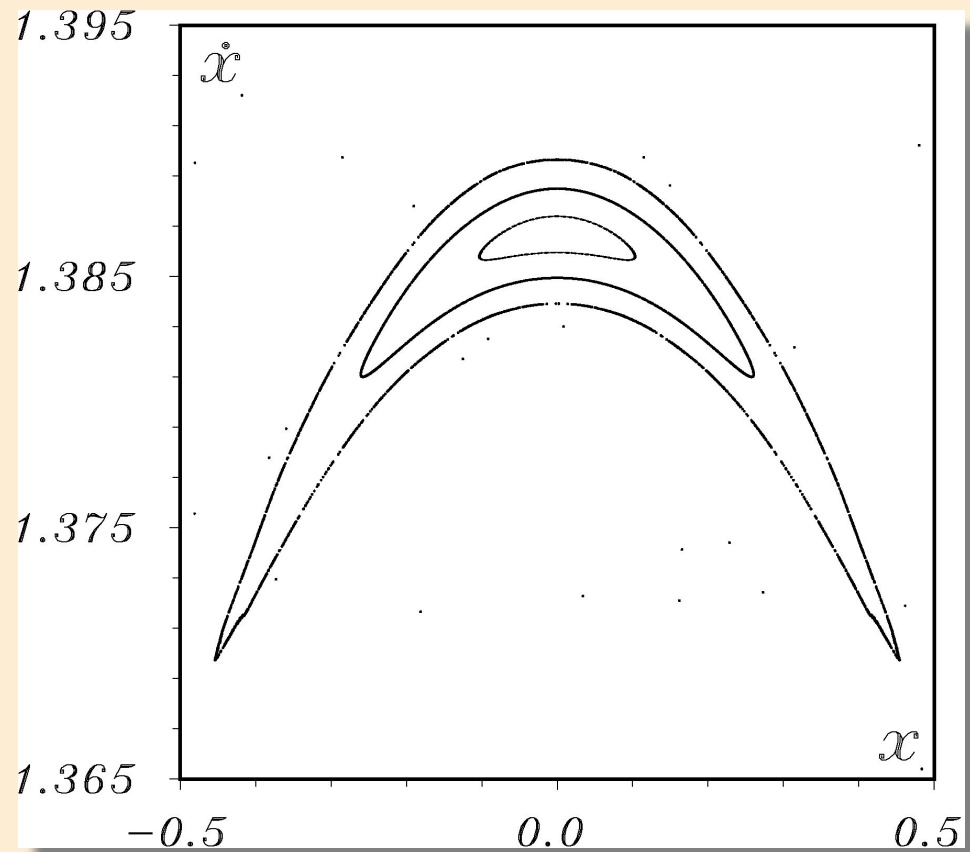
$$\langle \Delta I \rangle = 0, \quad \langle \Delta I^2 \rangle = \varepsilon^2 a^2 \Theta^2 \pi^2 / 12$$

Общая формула: А.Н. (1986); J.Cary, D.Escande, J.Tennyson (1986).

Примеры:

- Происхождение люка Кирквуда на резонансе 3:1 (J.Wisdom, 1985)
- Движение заряженных частиц в хвосте магнитосферы Земли (Й. Бюхнер, Л.М.Зеленый, 1989)

Остров устойчивости:



Суммарная мера островов устойчивости ~ 1 (А.Н., В.В.Сидоренко, Д.В. Трещев, 1997)

III. Рассеяние на резонансах, захват в резонанс

Система с вращающимися фазами:

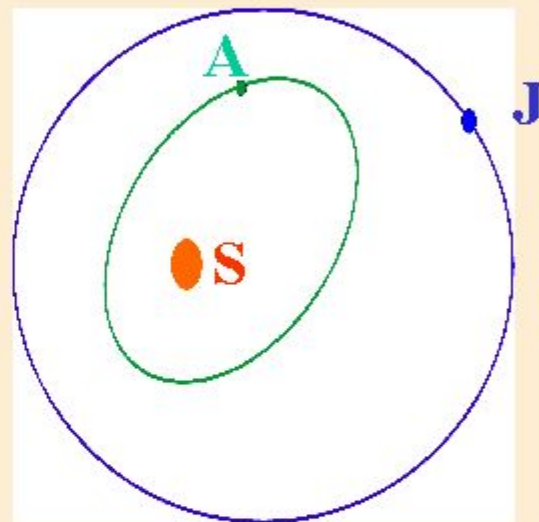
$$\dot{I} = \varepsilon f(I, \varphi, \varepsilon), \quad I \in R^n$$

$$\dot{\varphi} = \omega(I) + \varepsilon g(I, \varphi, \varepsilon), \quad \varphi \in R^m / 2\pi Z^m = T^m$$

Усредненная система:

$$\dot{J} = \varepsilon F(J), \quad F(J) = \frac{1}{(2\pi)^m} \oint_{T^m} f(J, \varphi, \mathbf{0}) d\varphi$$

Пример:

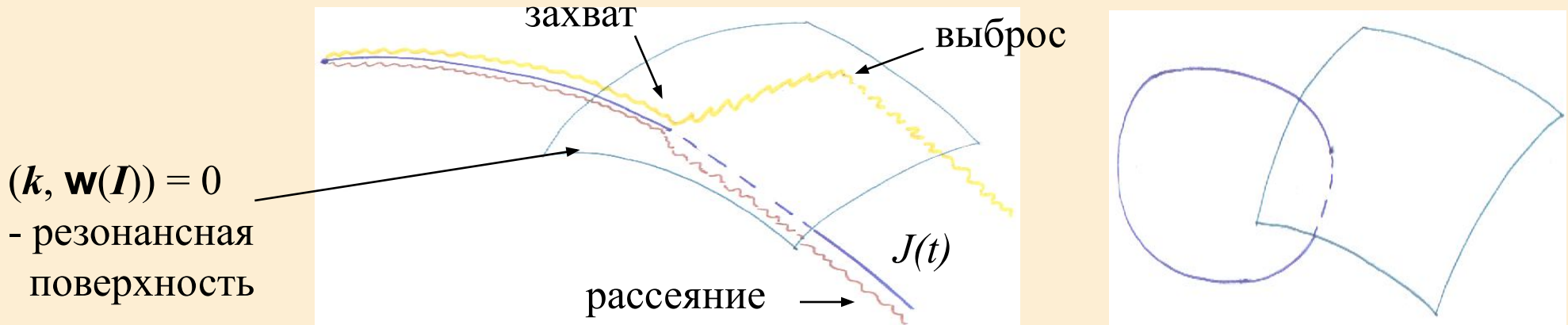


Принцип усреднения заменяет точную систему усредненной.

Влияние резонансов

$$f(I, \varphi, 0) = F(I) + \sum f_k e^{i(k, \varphi)}, \quad (k \in \mathbb{Z}^m, k \neq 0)$$

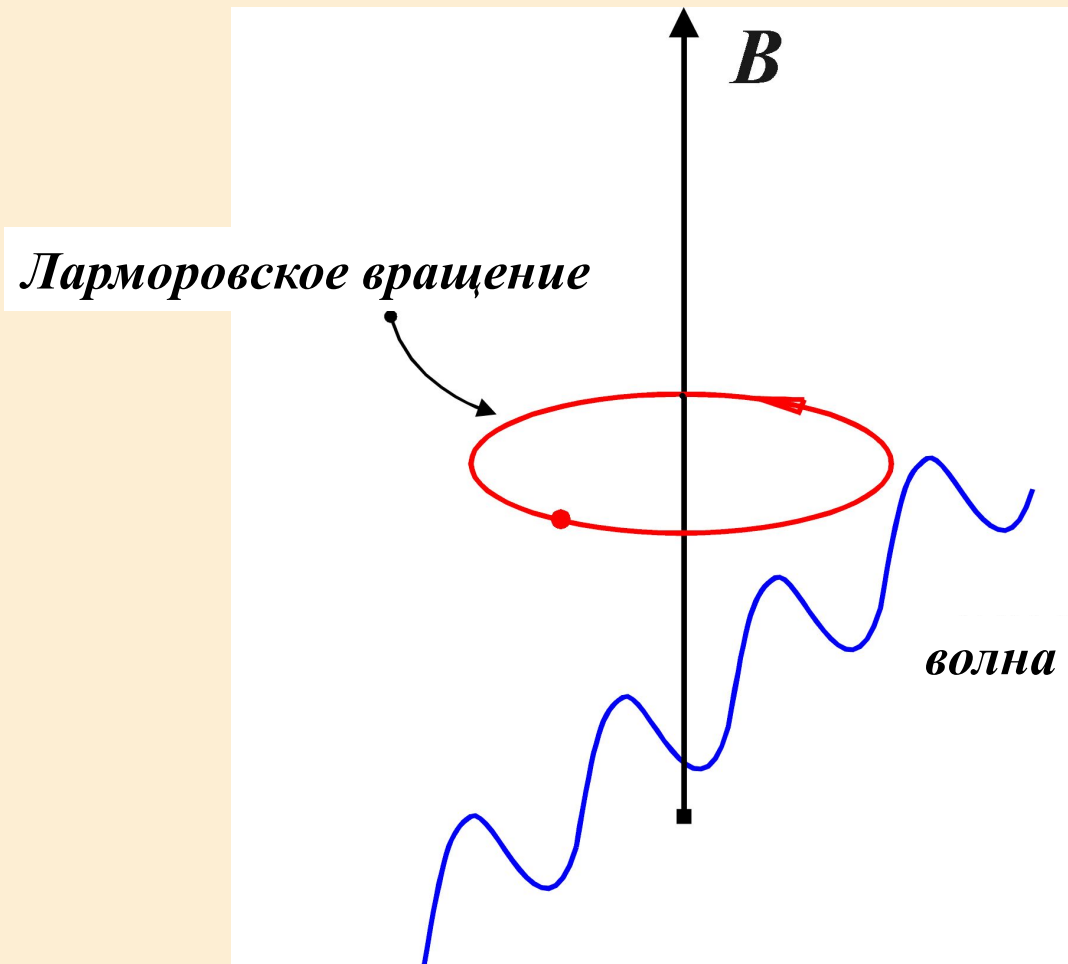
Вблизи резонанса $(k, \mathbf{w}(I)) = 0$ гармоника $e^{i(k, \varphi)}$ не осциллирует.



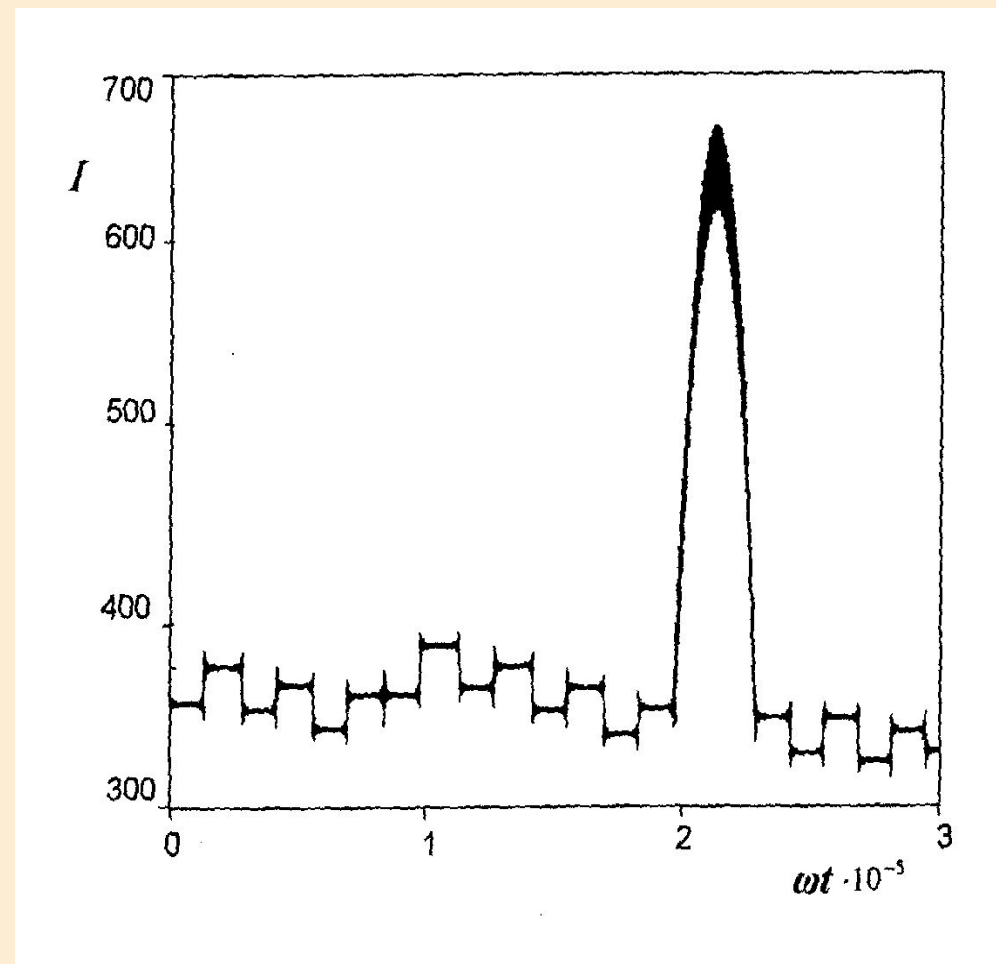
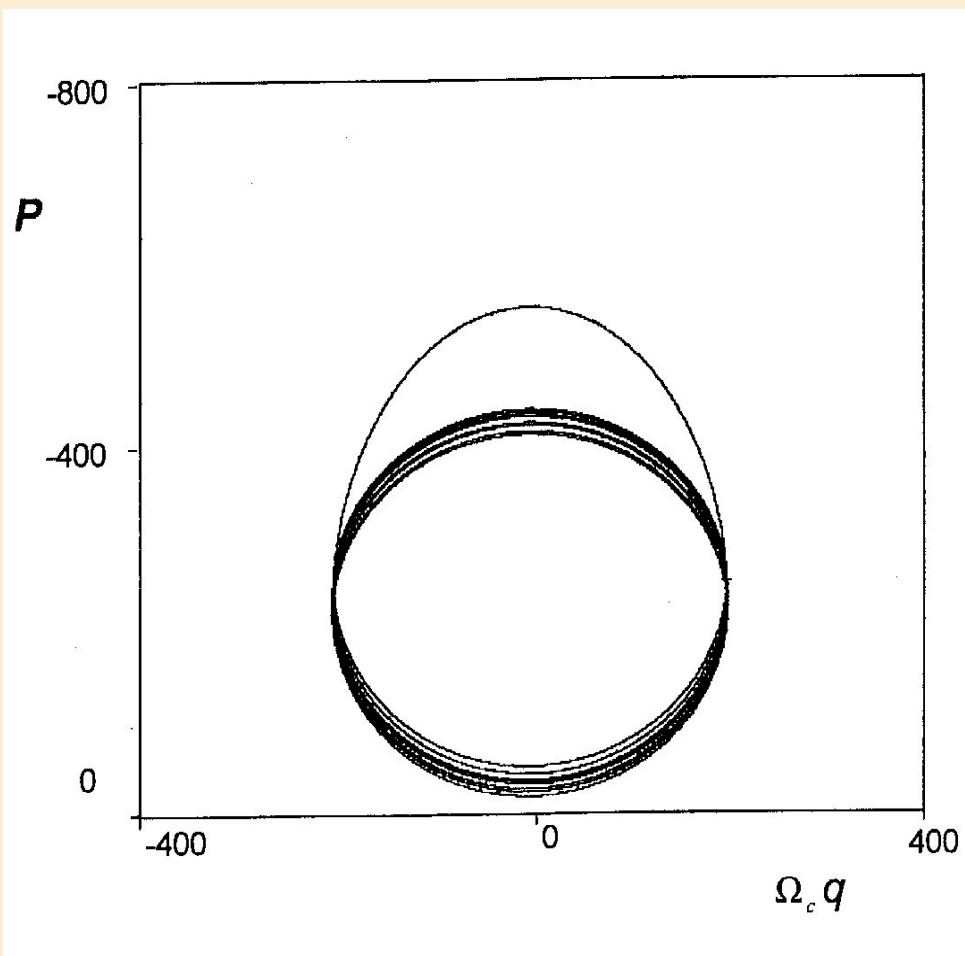
	$t \sim 1/\varepsilon$	$t \sim 1/\varepsilon\sqrt{\varepsilon}$	$t \sim 1/\varepsilon^2$
Вероятность захвата $\sim$	$\sqrt{\varepsilon}$	1	1
Смещение $\sim$	$\sqrt{\varepsilon}$	1	1
Амплитуда рассеяния $\sim$	$\sqrt{\varepsilon}$	$\varepsilon^{1/4}$	1

Пример: движение заряженных частиц в однородном магнитном поле и поле электростатической волны (А.А.Васильев, А.П.Итин, А. Н., 1999)

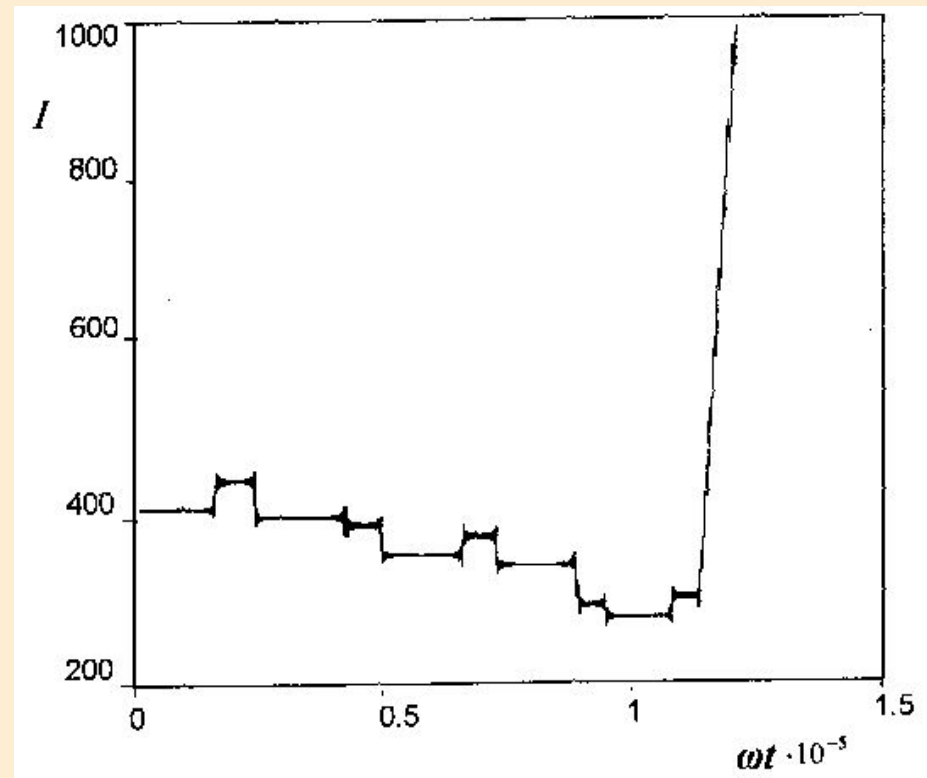
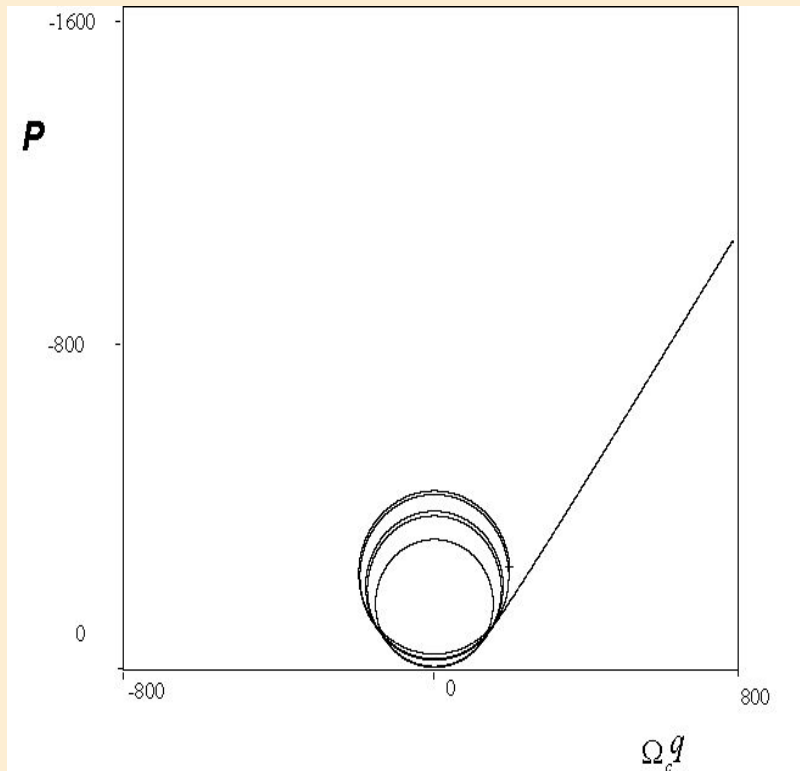
Конфигурация полей:



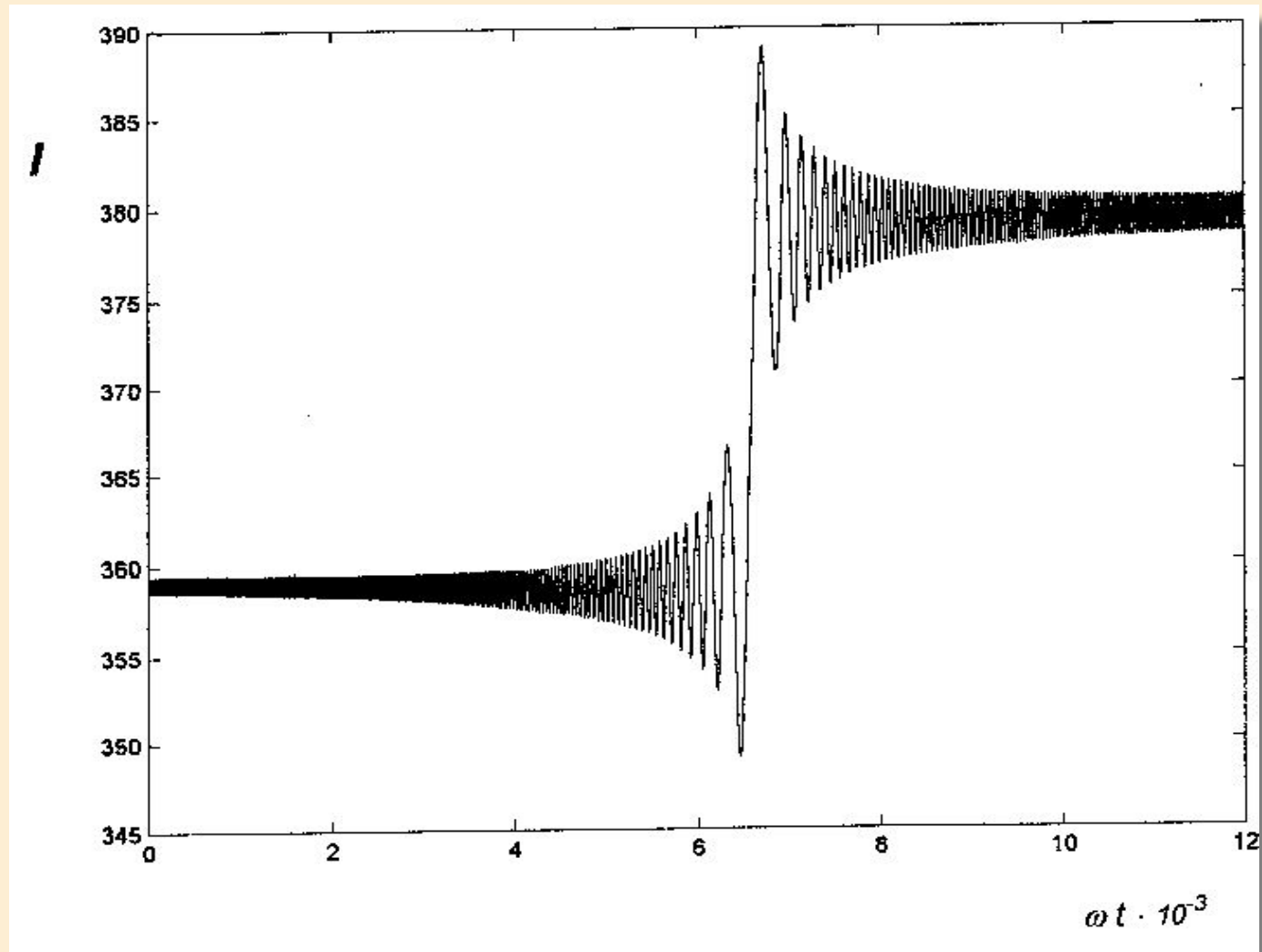
Захват в резонанс и выброс из резонанса:



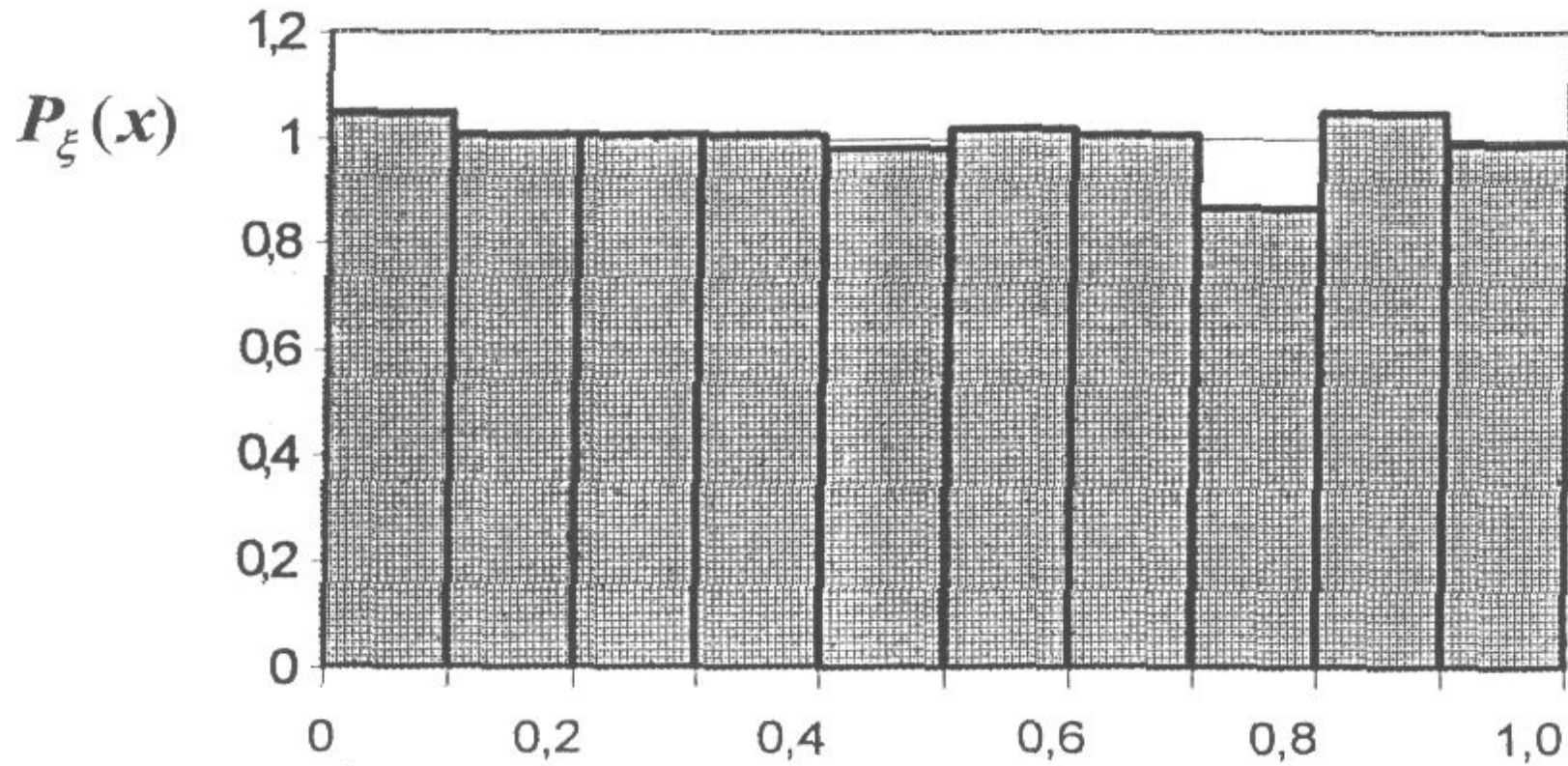
Захват в резонанс (режим неограниченного серфотронного ускорения):



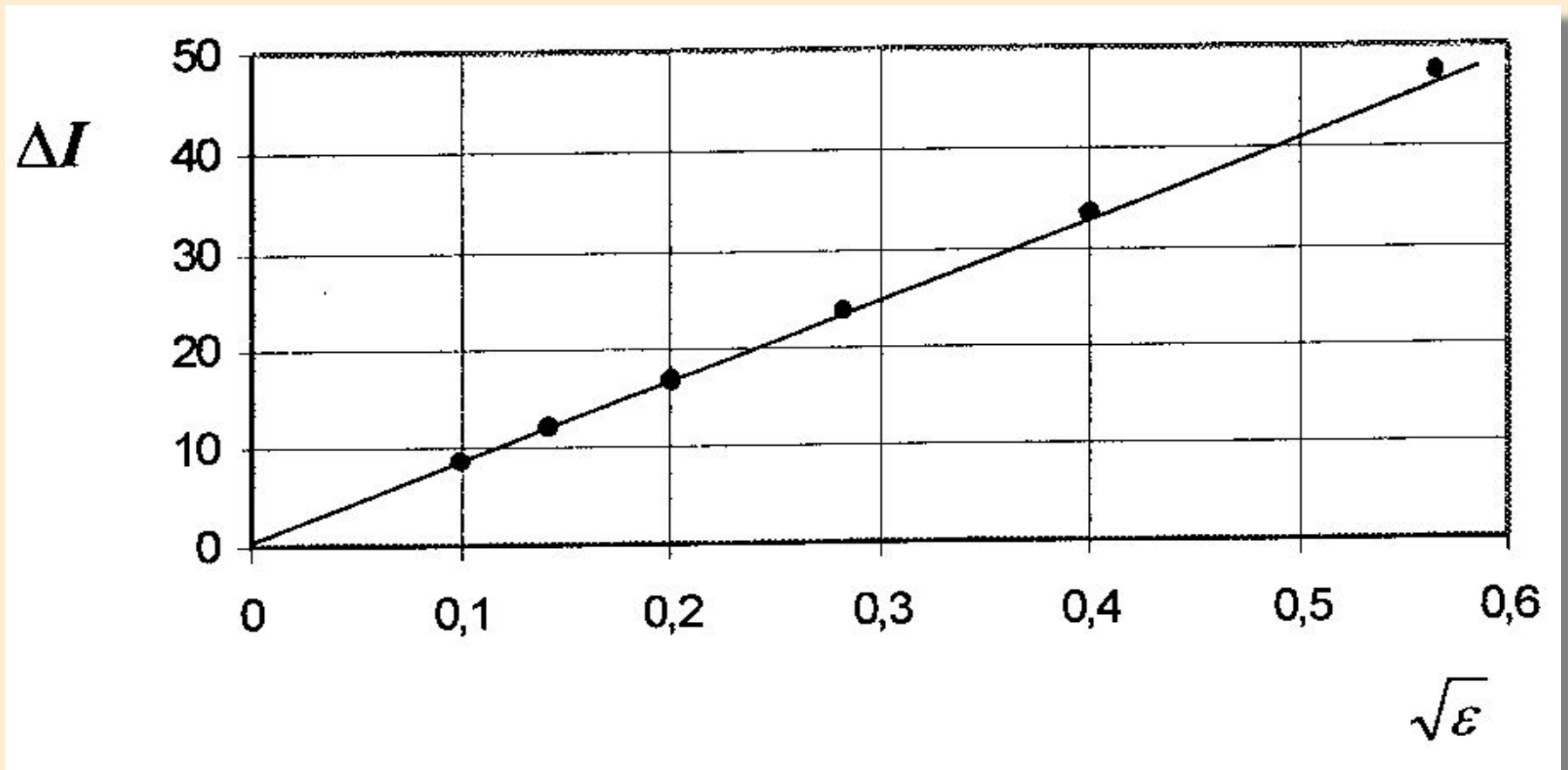
Рассеяние на резонансе:



Распределение фазы попадания на резонанс:



Амплитуда рассеяния (при заданной фазе):



Диффузия при многократных проходах через резонанс:

