

Теория телетрафика

часть 2

проф. Крылов В.В.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ ТЕЛЕТРАФИКА



Андрей Андреевич Марков родился 14 июня 1856. В цикле работ, опубликованном в 1906-1912гг., заложил основы одной из общих схем естественных процессов, которые можно изучать методами математического анализа. Впоследствии эта схема была названа цепями Маркова и привела к развитию нового раздела теории вероятностей - теории случайных процессов.

Вероятностная модель СМО

- дискретная цепь Маркова
- однородная цепь Маркова
- неприводимая цепь Маркова
- Возвратное и невозвратное состояние
- Периодическое и аperiodическое возвратное состояние
- Возвратное нулевое и возвратное ненулевое

Цепи Маркова

- **Теорема 1.**
- Состояния неприводимой цепи Маркова либо все невозвратные, либо все возвратные нулевые, либо все возвратные ненулевые. В случае периодической цепи все состояния имеют один и тот же период

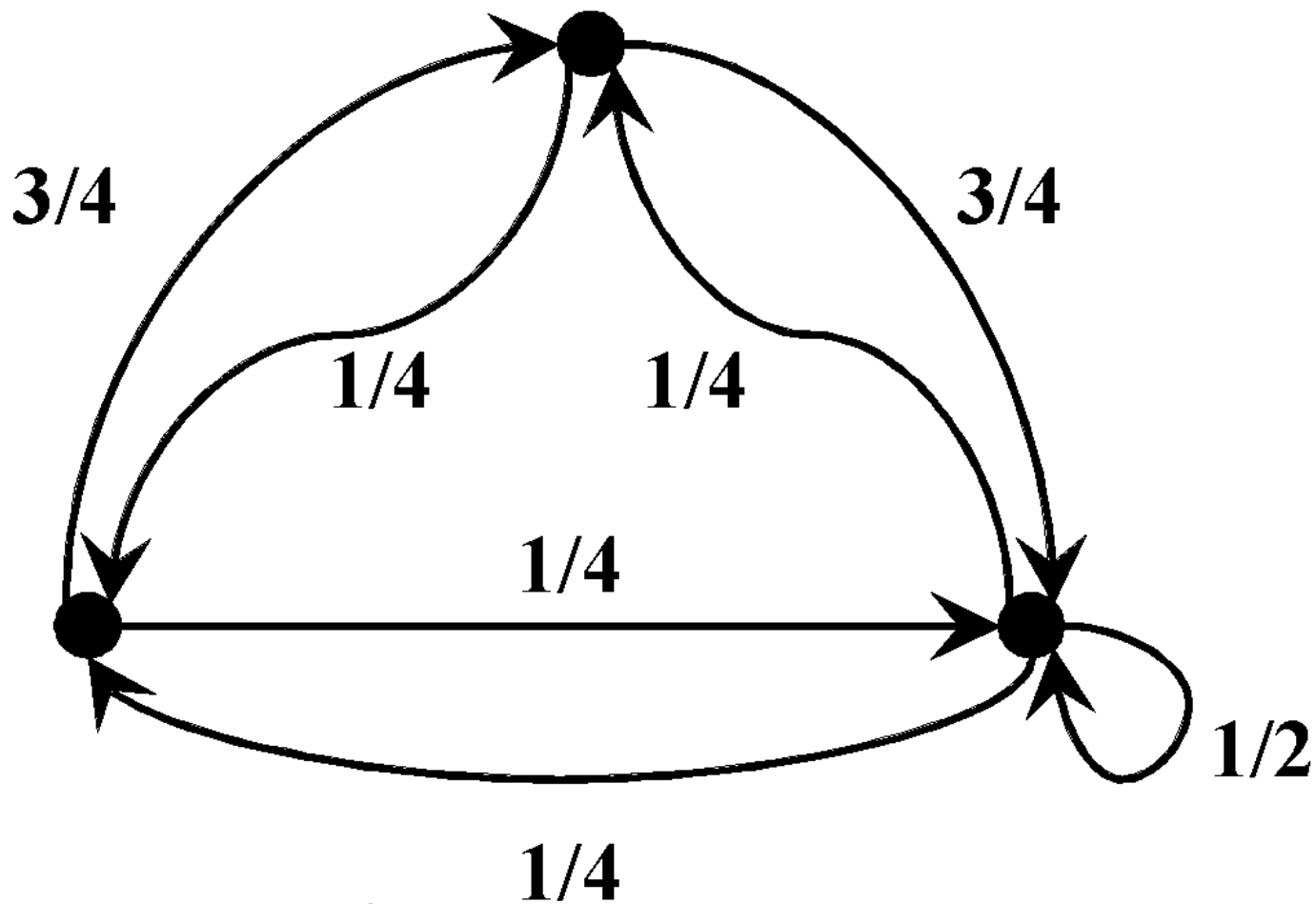
Цепи маркова

- Для неприводимой и апериодической цепи Маркова всегда существуют предельные вероятности, не зависящие от начального распределения вероятностей
- все состояния цепи невозвратные или все возвратные нулевые, и тогда все предельные вероятности равны нулю и стационарного состояния не существует
- все состояния возвратные ненулевые и тогда существует стационарное распределение вероятностей

Цепи Маркова

- Состояние называется **эргодическим**, если оно апериодично и возвратно ненулевое. Если все состояния цепи Маркова *эргодичны*, то вся цепь называется *эргодической*. Предельные вероятности эргодической цепи Маркова называют **вероятностями состояния равновесия**, имея в виду, что зависимость от начального распределения вероятностей полностью отсутствует.

Диаграмма переходов



Решение примера

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix} \quad 1 = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2$$

$$\begin{aligned} \pi_0 &= 0\pi_0 + (1/4)\pi_1 + (1/4)\pi_2; & \pi_0 &= 1/5 = 0,20 \\ \pi_1 &= (3/4)\pi_0 + 0\pi_1 + (1/4)\pi_2; & \pi_1 &= 7/25 = 0,28 \\ \pi_2 &= (1/4)\pi_0 + (3/4)\pi_1 + (1/2)\pi_2; & \pi_2 &= 13/25 = 0,52 \end{aligned}$$

Уравнения Чепмена- Колмогорова. (Chapman - Kolmogorov)

$$p_{ij}(m, n) = \sum_k p_{ik}(m, n-1) p_{kj}(n-1, n)$$

$$p_{ij}(m, n) = p_{ij}^{(m-n)}$$

Непрерывные цепи Маркова

- Случайный процесс $X(t)$ с дискретным множеством значений образует *непрерывную цепь Маркова*, если

$$P[X(t) = j / X(\tau) \text{ for } \tau_1 \leq \tau \leq \tau_2 < t] = P[X(t) = j / X(\tau_2)]$$

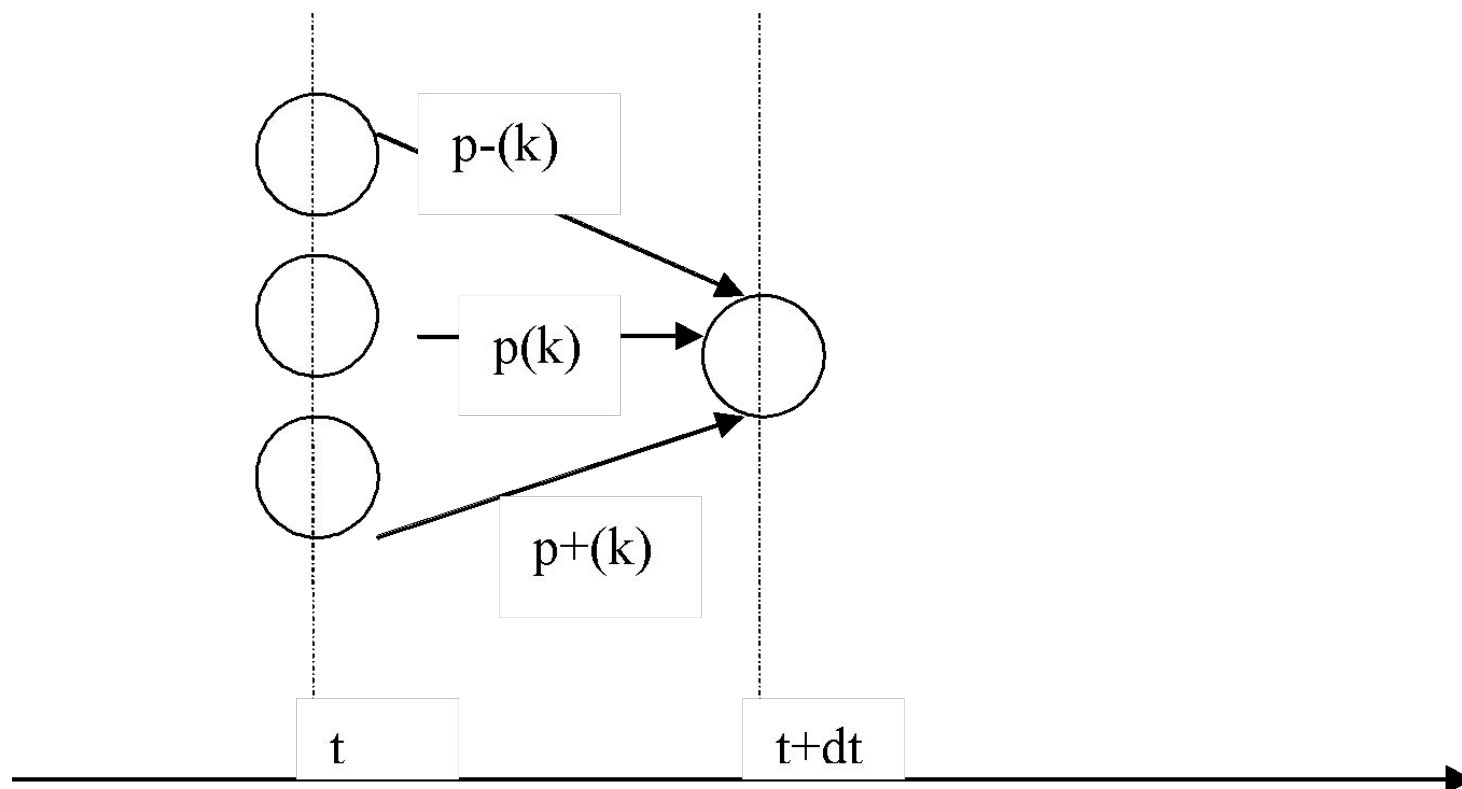
- Уравнение Чепмена – Колмогорова

$$\frac{d\mathbf{H}(t)}{dt} = \mathbf{H}(t)\mathbf{Q}$$

Непрерывные цепи Маркова

- $H(t) = [p_{ij}(t)]$ - **матрица вероятностей перехода** из состояния i в состояние j в момент времени t , а матрица Q называется **матрицей интенсивностей переходов**
- Интенсивности вероятностей переходов $q_{ij}(t)$

Переходы в процессе гибели-размножения

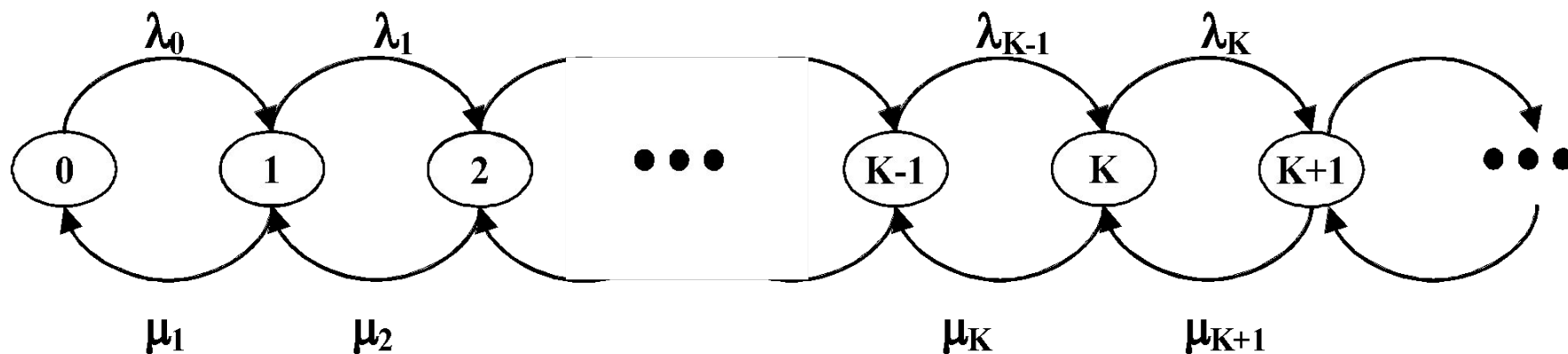


Уравнения процесса гибели-размножения

$$\frac{dP(k,t)}{dt} = -(\lambda_k + \mu_k)P(k,t) + \lambda_{k-1}P(k-1,t) + \mu_{k+1}P(k+1,t); k \geq 1$$

$$\frac{dP(0,t)}{dt} = -\lambda_0P(0,t) + \mu_1P(1,t)$$

Диаграмма интенсивностей переходов



Уравнения равновесия

$$-(\lambda_k + \mu_k)p_k + \lambda_{k-1}p_{k-1} + \mu_{k+1}p_{k+1} = 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$$

$$\lambda_{k-1}p_{k-1} + \mu_{k+1}p_{k+1} = (\lambda_k + \mu_k)p_k$$

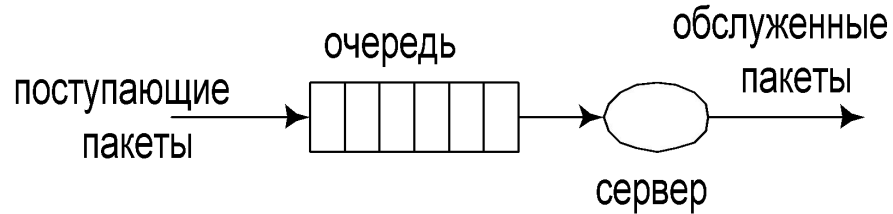
Решение уравнений равновесия

$$p_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \square \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \square \mu_k} p_0 = p_0 \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} \quad p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}}$$

$$p_{k+1} = \frac{\lambda_k}{\mu_{k+1}} p_k$$

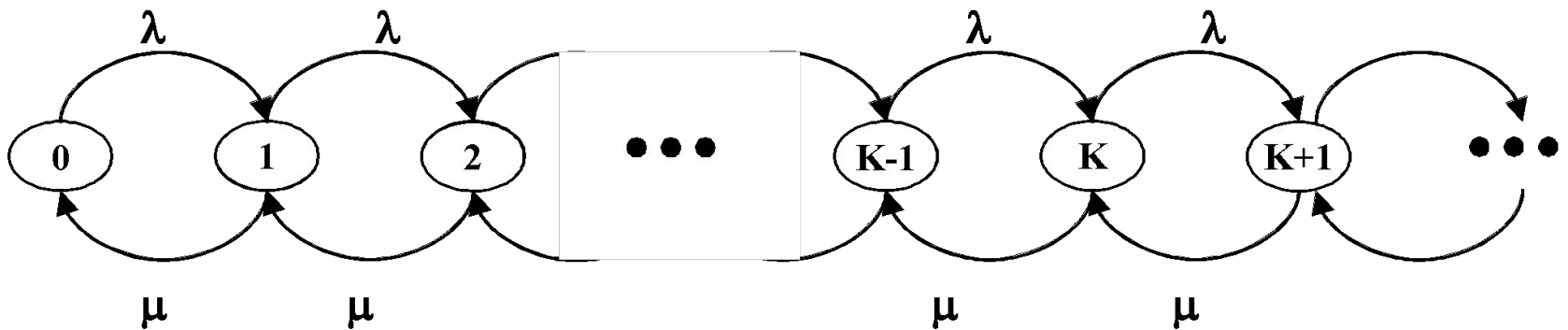
$$\frac{\lambda_k}{\mu_{k+1}} < C < 1$$

Система M/M/1



$$\lambda_k = \lambda, k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\mu_k = \mu = 1/\tau, k = 1, 2, 3, \dots$$

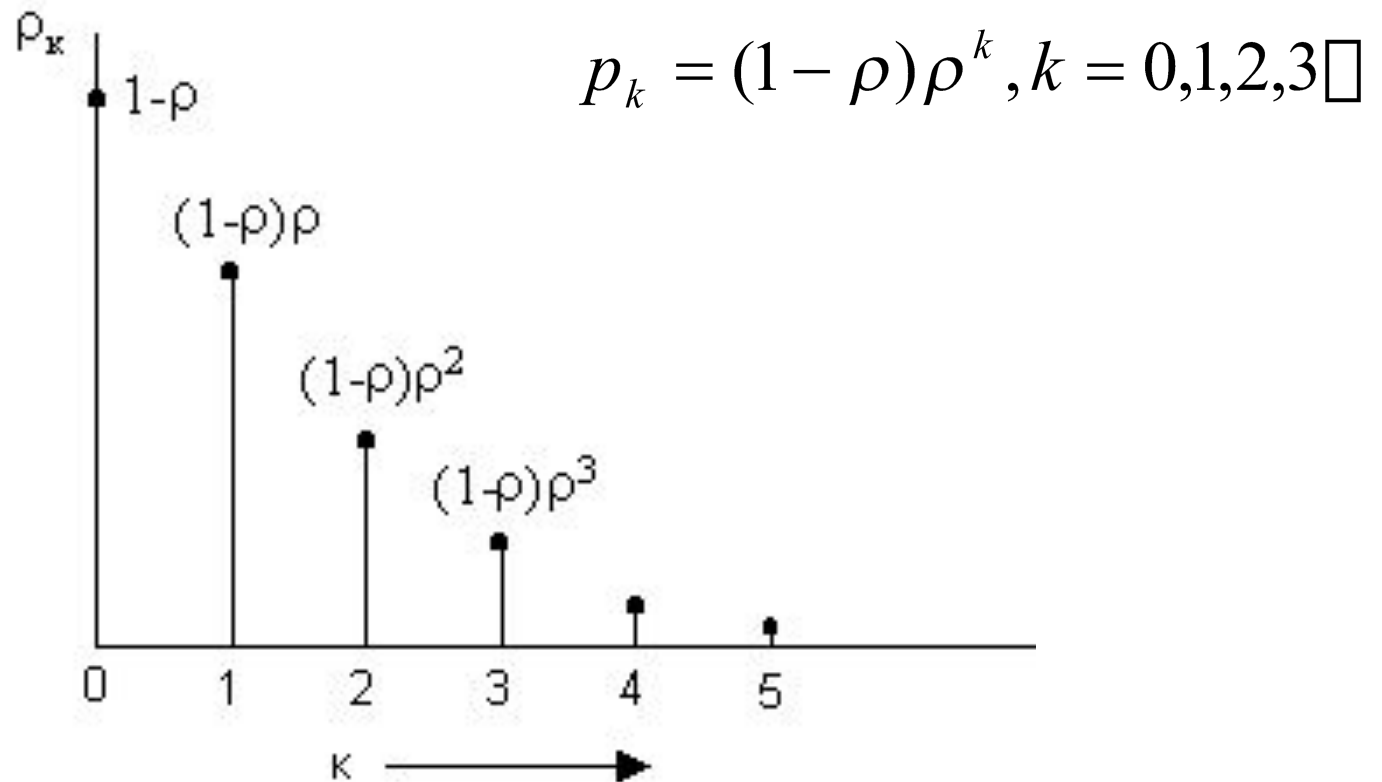


Стационарное распределение

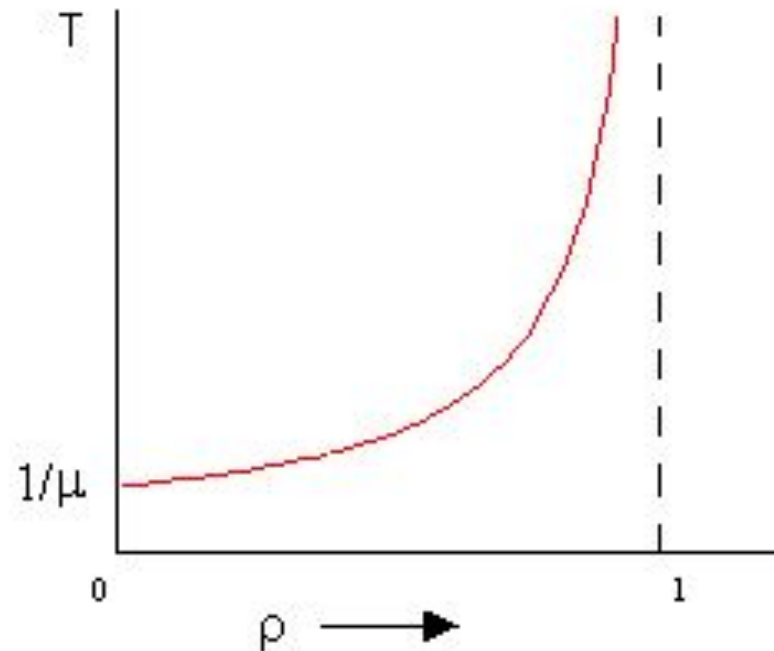
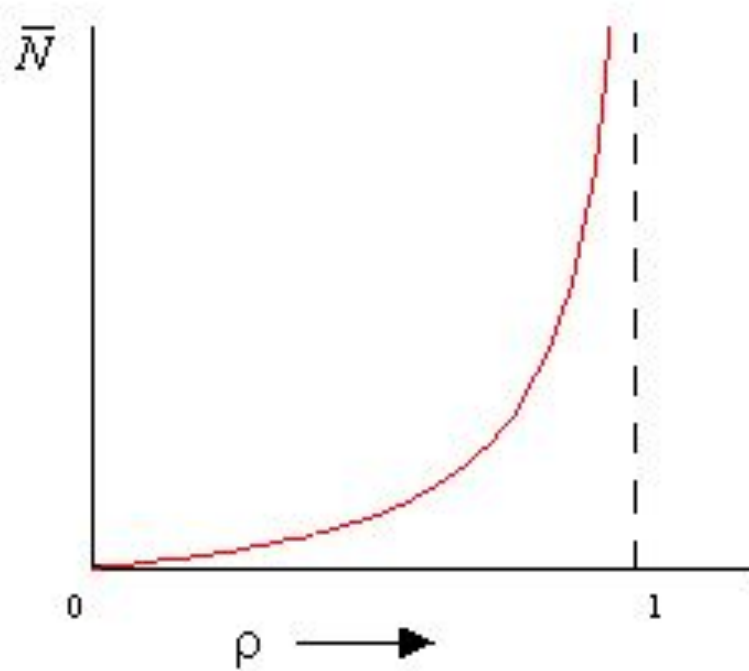
$$p_k = p_0 \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda}{\mu} = p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k ; k \geq 0$$

$$p_0 = 1 / \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k \right] = \frac{1}{1 + \frac{\lambda / \mu}{1 - \lambda / \mu}} = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \rho$$

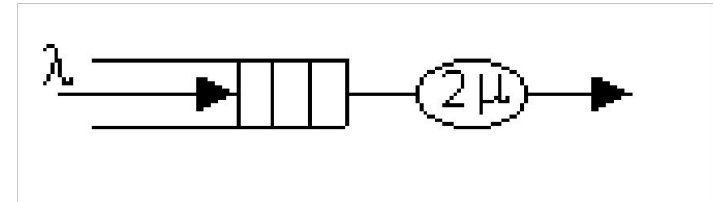
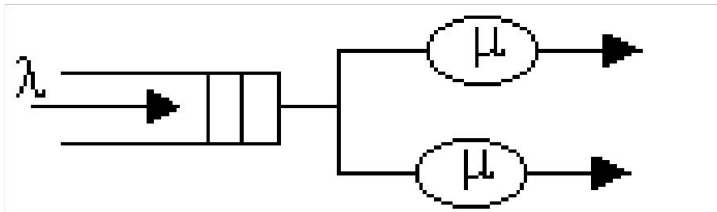
График распределения



Зависимость среднего числа заявок и времени пребывания в системе



Система с несколькими серверами



$$\lambda_k = \lambda$$

$$\mu_1 = \mu, \mu_n = 2\mu, \forall n \geq 2$$

$$p_k = p_0 \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} = \left(\frac{\lambda}{\mu} \right) \left(\frac{\lambda}{2\mu} \right)^{k-1} = p_0 \frac{1}{2^{k-1}} \rho^k = p_0 2 \rho_2^k, \rho_2 = \frac{\lambda}{2\mu}$$

$$p_0 = \frac{1 - \rho_2}{1 + \rho_2},$$

$$p_k = \frac{2(1 - \rho_2)}{(1 + \rho_2)} \rho_2^k$$

©Крылов

Двухсерверная система

$$\lambda_k = \lambda$$

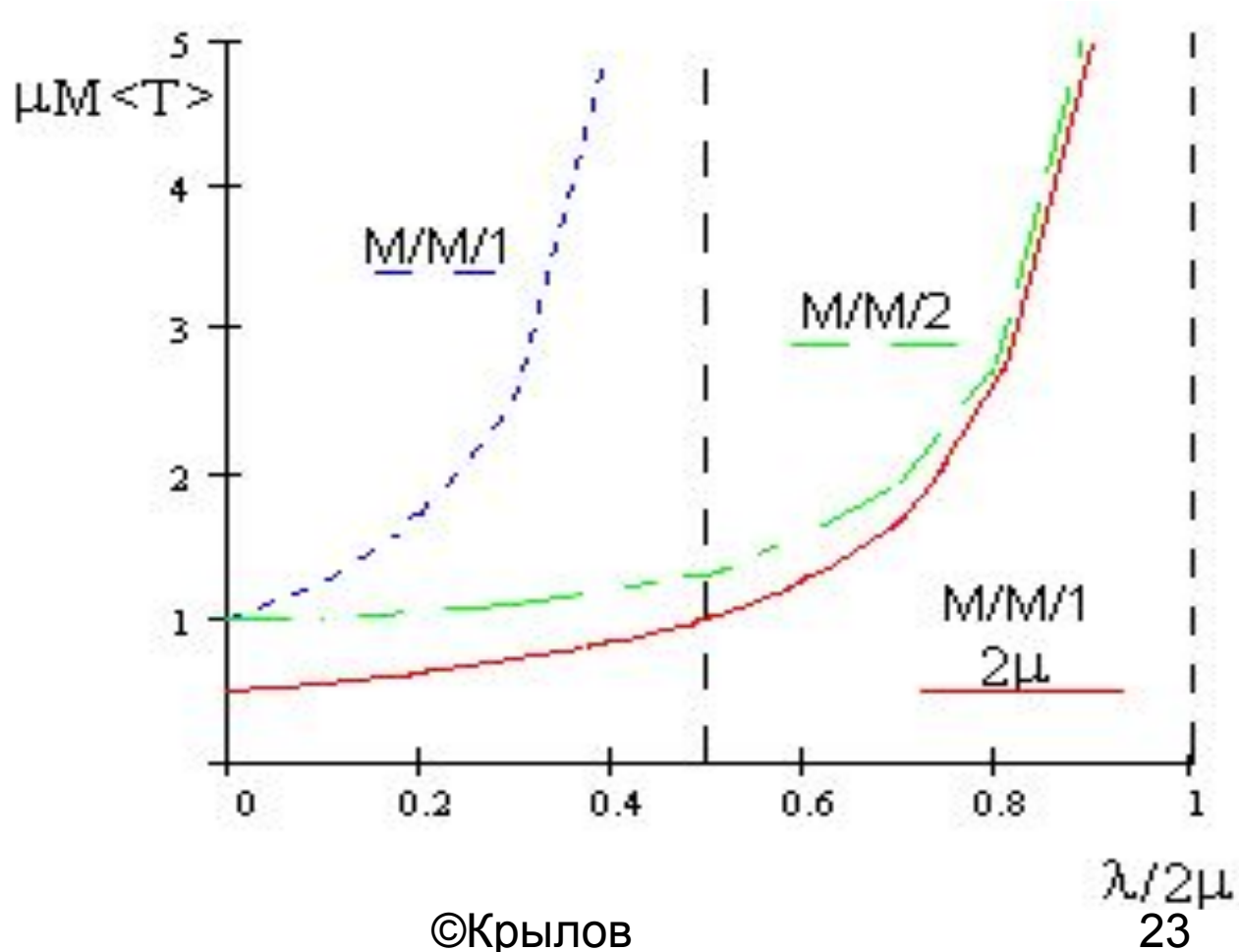
$$\mu_1 = \mu, \mu_n = 2\mu, \forall n \geq 2$$

$$p_k = p_0 \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} = \left(\frac{\lambda}{\mu} \right) \left(\frac{\lambda}{2\mu} \right)^{k-1} = p_0 \frac{1}{2^{k-1}} \rho^k = p_0 2 \rho_2^k, \rho_2 = \frac{\lambda}{2\mu}$$

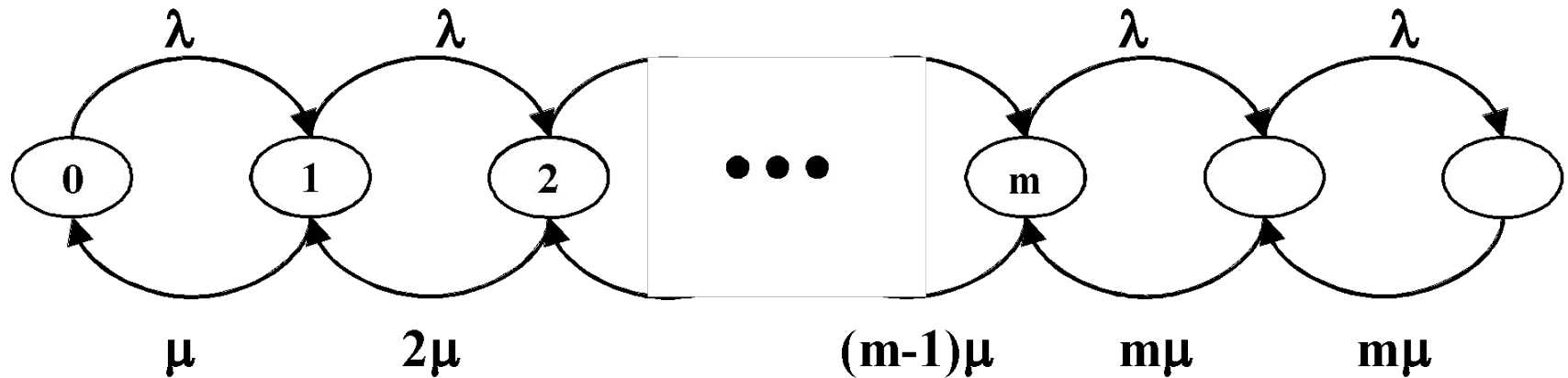
$$p_0 = \frac{1 - \rho_2}{1 + \rho_2}, \quad \overline{N}_2 = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = \frac{2\rho}{(1 - \rho_2^2)} \leq \overline{N}_1 = \frac{\rho}{1 - \rho}$$

$$p_k = \frac{2(1 - \rho_2)}{(1 + \rho_2)} \rho_2^k, \quad \overline{T}_2 = \overline{N}_2 / \lambda = \frac{1}{\mu} \left(1 - \rho_2^2 \right)$$

Сравнение нормированного времени пребывания в системе



m – серверная система



$$\lambda_n = \lambda, n = 0, 1, 2, 3 \dots$$

$$\mu_n = \min[n\mu, m\mu] = \begin{cases} n\mu, 0 \leq n \leq m \\ m\mu, m \leq n \end{cases}$$

m-серверная система

$$p_k = \begin{cases} p_0 \frac{(m\rho)^k}{k!}, k \leq m \\ p_0 \frac{\rho^k m^m}{m!}, k \geq m \end{cases}$$

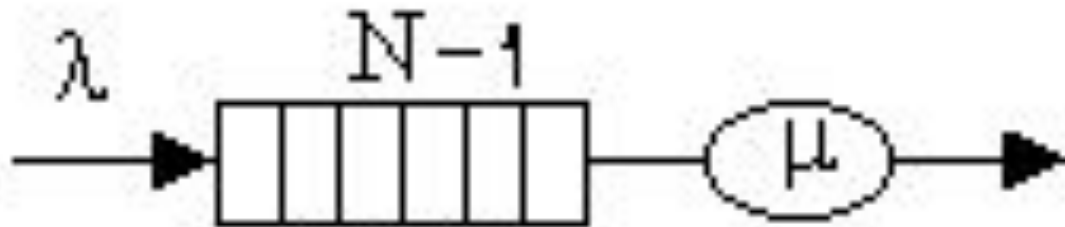
$$\rho = \frac{\lambda}{m\mu} = \frac{A}{m} < 1$$

$$p_0 = \left[\sum_{k=0}^{m-1} \frac{(A)^k}{k!} + \left(\frac{(A)^m}{m!} \right) \left(\frac{1}{1-\rho} \right) \right]^{-1}$$

C-формула Эрланга

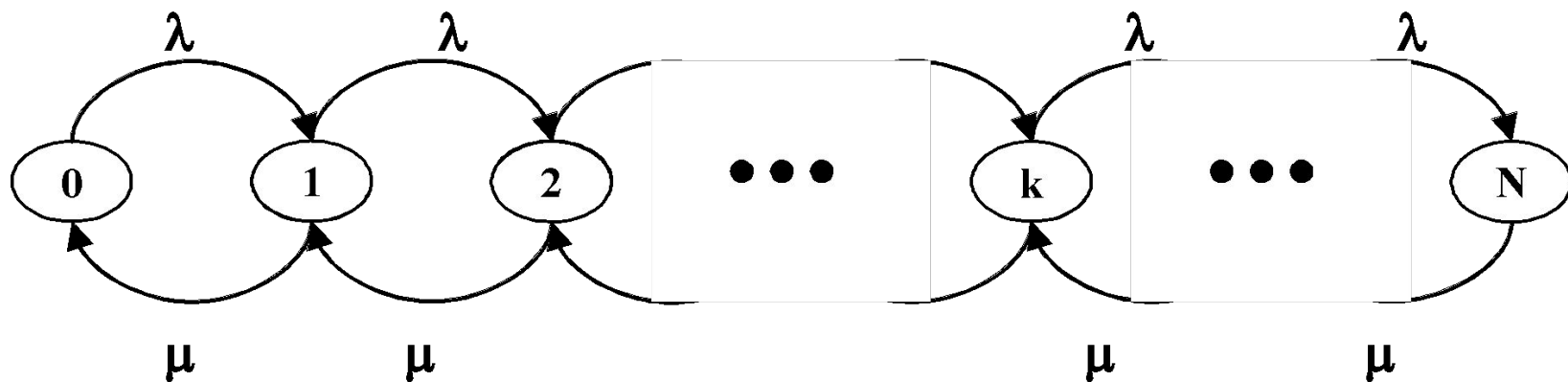
$$C(m, \lambda / \mu) = \frac{\left(\frac{(A)^m}{m!} \right) \left(\frac{1}{1 - A/m} \right)}{\left[\sum_{k=0}^{m-1} \frac{(A)^k}{k!} + \left(\frac{(A)^m}{m!} \right) \left(\frac{1}{1 - A/m} \right) \right]}$$

Анализ системы M/M/1:N



$$\lambda_k = \begin{cases} \lambda, & k < N \\ 0, & k \geq N \end{cases}, \mu_k = \mu, \quad k = 1, 2, \dots, N$$

Диаграмма интенсивностей переходов для системы с конечным буфером



$$p_k = p_0 \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda}{\mu}, k \leq N$$

$$p_k = p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k, k \leq N$$

$$p_k = 0, k > N$$

©Крылов

Стационарные вероятности

$$p_0 = \left[1 + \sum_{k=1}^N \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k \right]^{-1} = \left[1 + \frac{(\lambda / \mu)(1 - (\lambda / \mu)^N)}{1 - (\lambda / \mu)} \right]^{-1} = \frac{1 - \lambda / \mu}{1 - (\lambda / \mu)^{N+1}}$$

$$p_k = \begin{cases} \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{N+1}} \rho^k, 0 \leq k \leq N \\ 0, k < 0; k > N \end{cases}$$

Вероятность блокировки и пропускная способность

$$p_B = p_k(k = N) = \frac{(1 - \rho)\rho^N}{1 - \rho^{N+1}}$$

$$\gamma = \lambda(1 - p_B)$$

$$\gamma = \mu \left(1 - \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{N+1}} \right) \Rightarrow P_B = \frac{(1 - \rho)\rho^N}{1 - \rho^{N+1}} \approx (1 - \rho)\rho^N, \rho^N \ll 1$$

Средняя длина очереди и задержка в системе

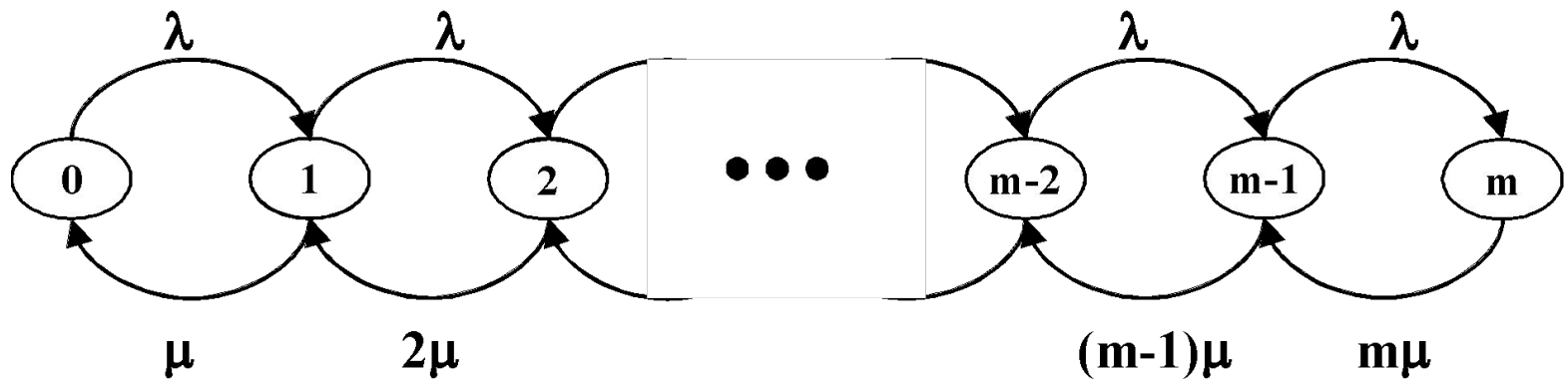
$$\bar{L} = \sum_{k=0}^N k p_k = \frac{(1-\rho)}{1-\rho^{N+1}} \sum_{k=0}^N k \rho^k = \frac{\rho(1-\rho)(1+2\rho+3\rho^2+4\rho^3+\dots+N\rho^{N-1})}{1-\rho^{N+1}}$$

$$\bar{T} = \frac{1}{\lambda} \bar{L}$$

Анализ систем с полными потерями

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda, n < m \\ 0, n \geq m \end{cases}$$

$$\mu_n = n\mu, n = 1, 2, 3, \dots, m$$



Стационарные вероятности

$$p_k = p_0 \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda}{(1+i)\mu} = p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k \frac{1}{k!}, k \leq m$$

$$p_0 = \left[\sum_{k=0}^m \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k \frac{1}{k!} \right]^{-1}$$

В-формула Эрланга

$$P_B = E_B(m, A) = p_m = \frac{\frac{A^m}{m!}}{\sum_{k=0}^m \frac{A^k}{k!}}, A = \frac{\lambda}{\mu}$$

Модель Энгсета

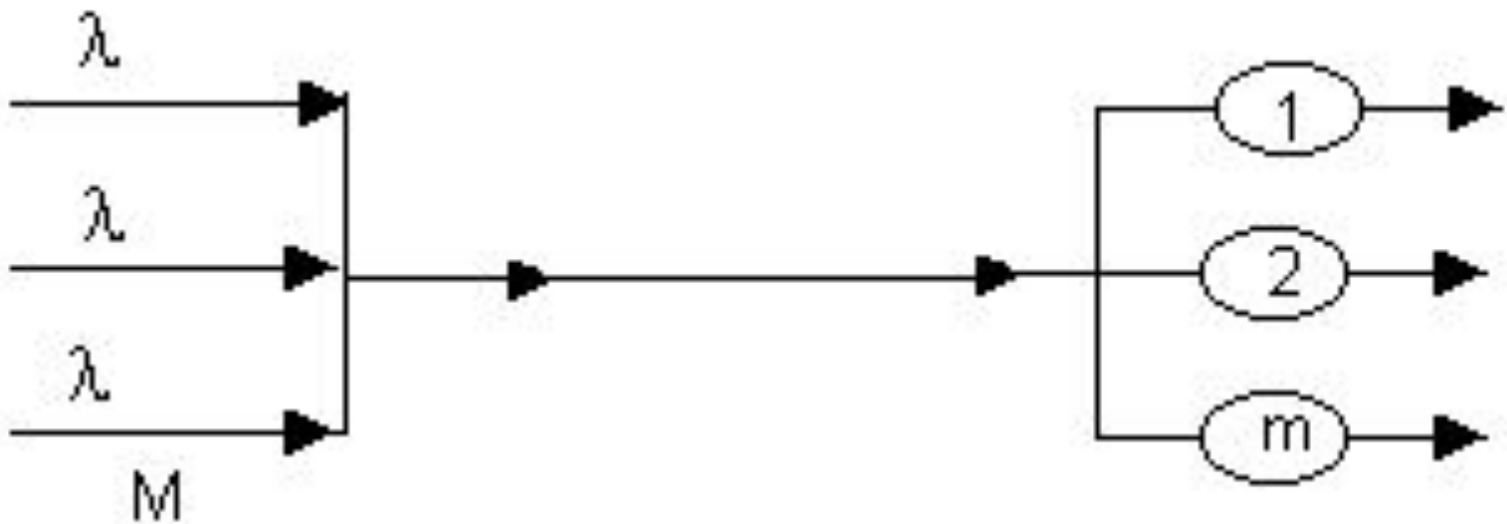
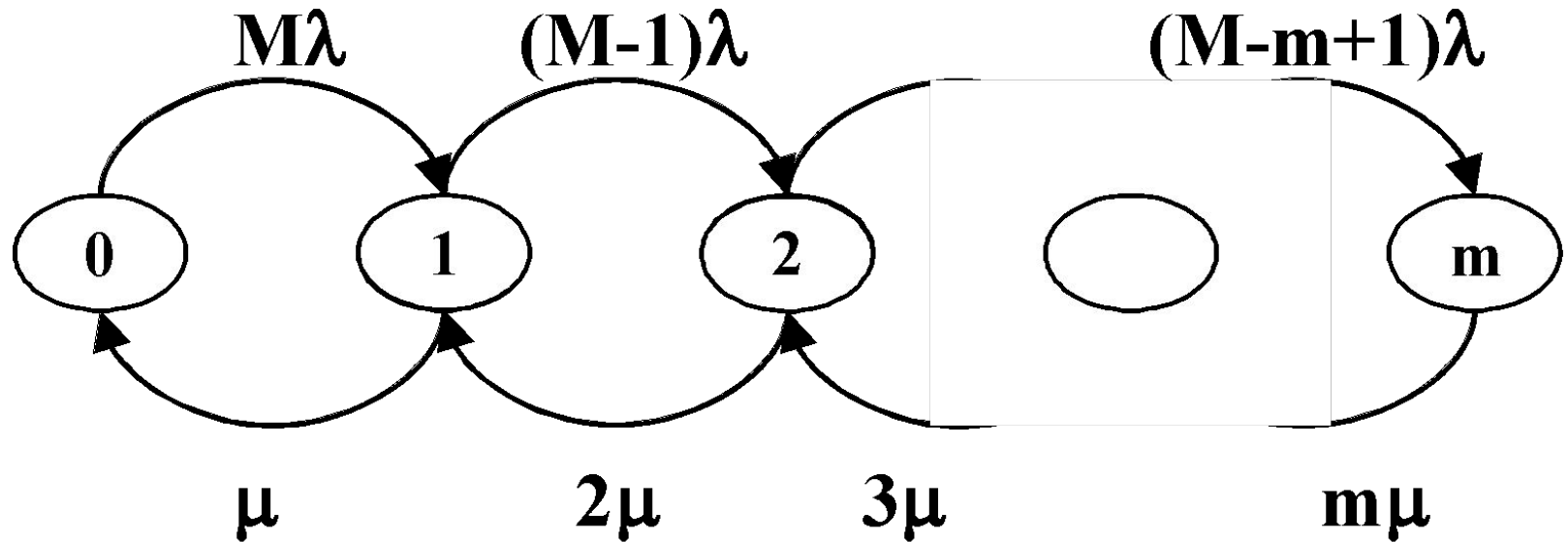


Диаграмма интенсивностей переходов модели Энгсета



Параметры и решение

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda(M - n), 0 \leq n \leq m - 1 \\ 0, n > m \end{cases}$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu, 0 \leq n \leq m \\ m\mu, n \geq m \end{cases}$$

$$p_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \square \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \square \mu_k} p_0 = p_0 \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}$$

$$p_{k+1} = \frac{\lambda_k}{\mu_{k+1}} p_k$$

Стационарные вероятности

$$p_k = p_0 \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda(M-i)}{(i+1)\mu} = C_m^k p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k, 0 \leq k \leq m-1, C_m^n = \frac{m!}{(m-n)!n!}$$

$$p_k = \frac{C_M^k \cdot A_1^k}{\sum_{i=0}^m C_M^i A_1^i}, k = 0, 1, 2, \dots, m; A_1 = \frac{\lambda}{\mu}$$

Формула Энгсета

$$p_m = \xi_M(m, A_1) = \frac{C_M^m A_1^m}{\sum_{k=0}^m C_M^k A_1^k}$$

$$A_1 = \lambda / \mu$$

Модель Молина *Lost Calls Held* (*LCH*)

$$P_b = e^{-A} \cdot \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

Анализ системы M/G/1

$$a(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad b(x) \quad \int_0^{\infty} b(x) dx = 1 \quad \bar{x} = \int_0^{\infty} x b(x) dx$$

$$\rho = \lambda \bar{x}$$

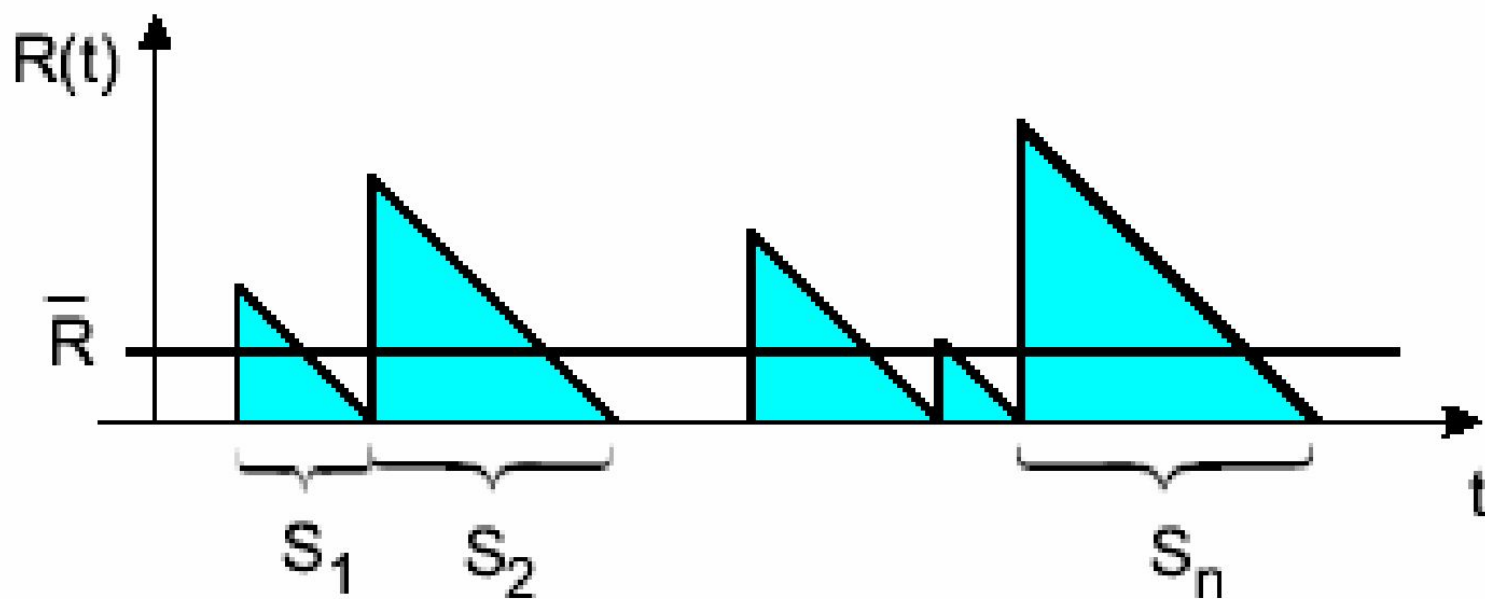
$$\bar{N} = \lambda \bar{W}$$

$$\bar{W} = N \bar{x} + \bar{I}$$

$$\bar{W} = \bar{W} \lambda \bar{x} + \bar{I}$$

$$\bar{W} = \frac{1}{1 - \rho}$$

Изменение незавершенной работы в СМО



$$\bar{R} = \frac{1}{t} \int_0^t R(t') dt' = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} S_i^a = \frac{n}{i} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} S_i^a \approx \lambda \bar{x}^2$$

Формула Полячека-Хинчина

$$\overline{W} = \frac{\lambda \overline{x^2}}{2(1-\rho)}$$

$$T = \overline{x} + \overline{W} \quad \overline{W} = \frac{\lambda \overline{x^2}}{2(1-\rho)} = \frac{1+C_v^2}{2} \cdot \frac{\rho}{1-\rho} \cdot \overline{x}$$

$$\overline{T} = \overline{S} + \frac{\lambda \overline{x^2}}{2(1-\rho)} = \left(1 + \frac{1+C_v^2}{2} \cdot \frac{\rho}{1-\rho}\right) \cdot \overline{x}$$

Среднее число требований

$$\bar{N}_q = \lambda \bar{W} = \frac{\lambda^2 \overline{x^2}}{2(1-\rho)} = \frac{1+C_v^2}{2} \cdot \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

$$\bar{N} = \lambda \bar{T} = \lambda \bar{S} + \frac{\lambda \overline{x^2}}{2(1-\rho)} = \rho + \frac{1+C_v^2}{2} \cdot \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

Система M/M/1

$$b(x) = \mu e^{-\mu x}$$

$$\overline{x^2} = \int_0^{\infty} x^2 b(x) dx = \mu \int_0^{\infty} x^2 e^{-\mu x} dx = \frac{2}{\mu^2}$$

$$\overline{N} = \rho + \frac{\rho^2}{1 - \rho} = \frac{\rho}{1 - \rho}$$

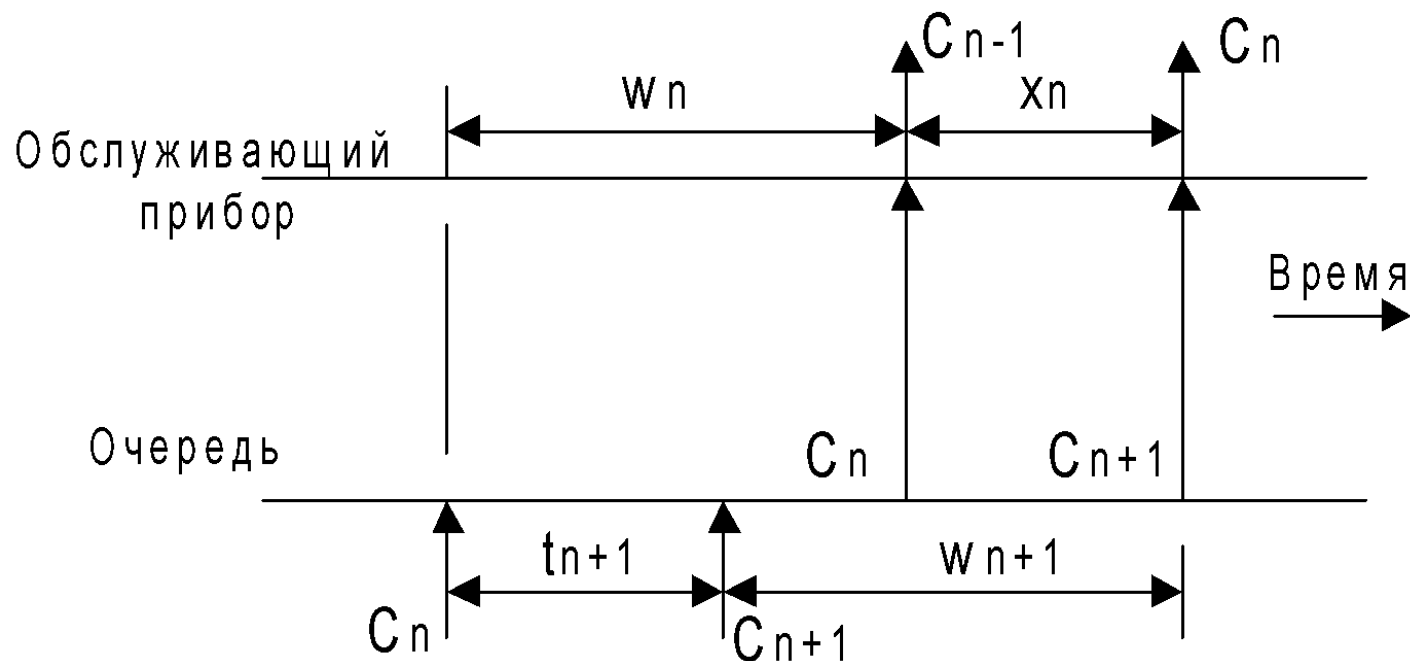
$$\overline{T} = \left(1 + \frac{\rho}{1 - \rho} \right) \cdot \overline{x} = \frac{1}{1 - \rho} \cdot \overline{x}$$

Система M/D/1

$$\bar{N} = \rho + \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{1 - \rho}$$

$$\bar{T} = \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho}{1 - \rho} \right) \cdot \bar{x}$$

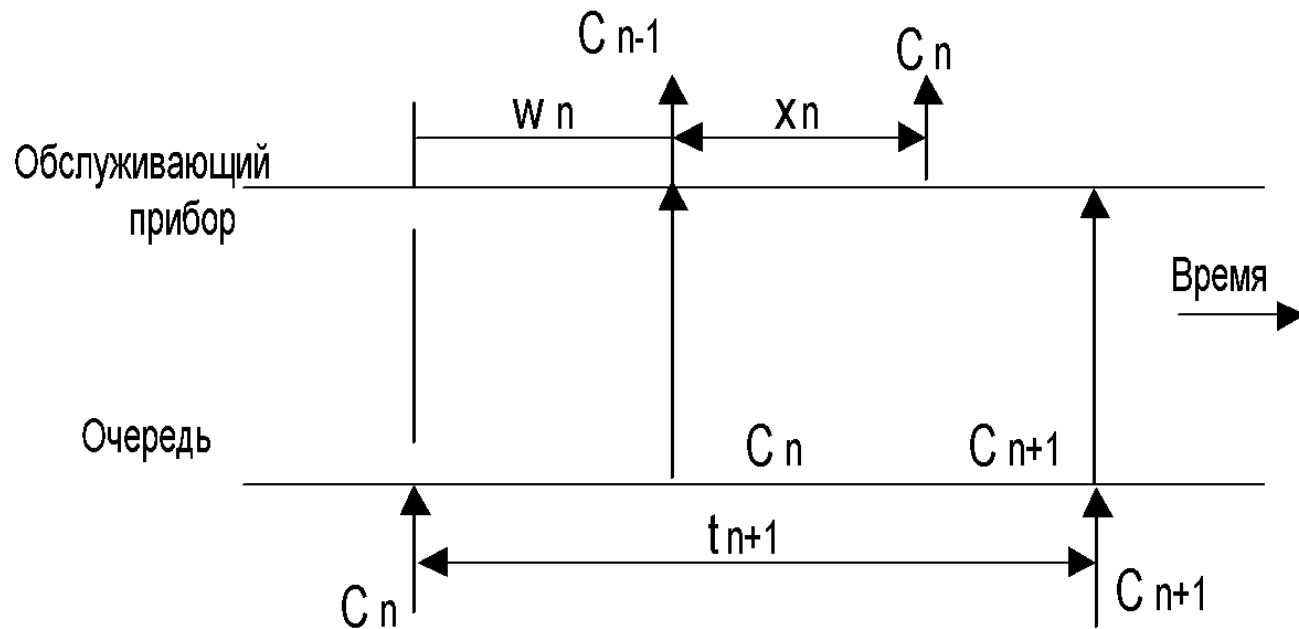
Система G/G/1 (занятая)



$$w_n + x_n - t_{n+1} \geq 0 \Rightarrow w_{n+1} = w_n + x_n - t_{n+1}$$

©Крылов

Система G/G/1 (свободная)



$$w_n + x_n - t_{n+1} < 0 \Rightarrow w_{n+1} = 0$$

© Крылов

Связанная марковская цепь

$$u_n = x_n - t_{n+1}$$

$$w_{n+1} = \begin{cases} 0, & w_n + u_n < 0, \\ w_n + u_n, & w_n + u_n \geq 0, \end{cases}$$

$$w_{n+1} = \max[0, w_n + u_n].$$

$$w_n = \max[0, u_{n-1}, u_{n-1} + u_{n-2}, \dots, u_{n-1} + \dots + u_1, u_{n-1} + \dots + u_1 + u_0 + w_0]$$

Решение (уравнение Линдли)

$$M\langle u_n \rangle = M\langle x_n - t_{n+1} \rangle = M\langle x_n \rangle - M\langle t_{n+1} \rangle = \bar{x} - \bar{t} = \bar{t}(\rho - 1)$$

$$\rho = \frac{\bar{x}}{\bar{t}} < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P[w_n \leq y] = P[w \leq y] = W(y).$$

$$W(y) = \int_{-\infty}^y w(t) dt \quad w(y) = \begin{cases} \int_{-\infty}^y w(y-u)c(u)du, & y \geq 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

Решение уравнения Линдли

$$c(u) = \int_0^{\infty} a(t+u)b(t)dt$$

$$C(s) = A(-s)B(s),$$

$$W(s)[A(-s)B(s) - 1] = 0.$$

$$A(s) = \int_0^{\infty} a(t)e^{-st} dt, \quad ,$$

$$B(s) = \int_0^{\infty} b(x)e^{-sx} dx, \quad ,$$

$$A(-s)B(s) - 1 = \frac{\Psi_+(s)}{\Psi_-(s)}$$

$$W(s) = \frac{K}{\Psi_+(s)},$$

$$K = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Psi_+(s)}{s}.$$

Приближенное решение

$$M\langle W \rangle = \frac{\sigma_a^2 + \sigma_b^2 + \left(\bar{t}\right)^2 (1 - \rho)^2}{2\bar{t}(1 - \rho)} - \frac{\bar{I}^2}{2\bar{I}}$$

$$A(-s) = 1 + \bar{t}s + \frac{\bar{t}^2 s^2}{2!} + o(s^2),$$

$$B(s) = 1 - \bar{x}s + \frac{\bar{x}^2 s^2}{2!} + o(s^2),$$

$$A(-s)B(s) - 1 = s \left[\bar{t} - \bar{x} + s \left(\frac{\bar{x}^2}{2} + \frac{\bar{t}^2}{2} - \bar{x}\bar{t} \right) \right] + o(s^2).$$

Приближенное решение

$$A(-s)B(s) - 1 \approx s(s - s_2) \frac{\sigma_a^2 + \sigma_b^2}{2},$$

$$\Psi_+(s) \approx s(s - s_2)C,$$

$$s_2 \approx -\frac{2\bar{t}(1-\rho)}{\sigma_a^2 + \sigma_b^2}$$

$$C = \Psi_-(0) \frac{\sigma_a^2 + \sigma_b^2}{2},$$

$$K = \lim_{s \rightarrow 0} (s - s_2)C = -s_2 C,$$

$$W(s) \approx \frac{-s_2}{s(s - s_2)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s - s_2},$$

$$M\langle W \rangle \approx \frac{\sigma_a^2 + \sigma_b^2}{2(1-\rho)\bar{t}}.$$

$$w(y) \approx \frac{2\bar{t}(1-\rho)}{\sigma_a^2 + \sigma_b^2} e^{-\frac{2\bar{t}(1-\rho)}{\sigma_a^2 + \sigma_b^2} y},$$

Верхняя граница, граница Маршалла

$$M\langle W \rangle \leq \frac{\sigma_a^2 + \sigma_b^2}{2t(1-\rho)} = W_{High}$$

$$M\langle W \rangle \leq \frac{1 + C_b^2}{(1/\rho)^2 + C_b^2} \left[\frac{\sigma_a^2 + \sigma_b^2}{2t(1-\rho)} \right],$$

$$C_b = \frac{\sigma_b}{x}.$$

Нижняя граница для потоков с МОНОТОННОСТЬЮ

$$\frac{A(t_2 + \varepsilon) - A(t_2)}{1 - A(t_2)} - \frac{A(t_1 + \varepsilon) - A(t_1)}{1 - A(t_1)} > 0, \forall t_2 > t_1, \varepsilon > 0.$$

$$\frac{\rho^2 C_b^2 + \rho(\rho - 2)}{2\lambda(1 - \rho)} = W_{Low} \leq M \langle W \rangle$$

Уточненная нижняя граница

$$y = g(y),$$

$$g(y) = \int_{-y}^{\infty} [1 - C(x)] dx ,$$

$$C(x) = \int_0^x c(t) dt ,$$

$$c(t) = \int_0^{\infty} a(x + t) b(x) dx .$$

Графическое решение

