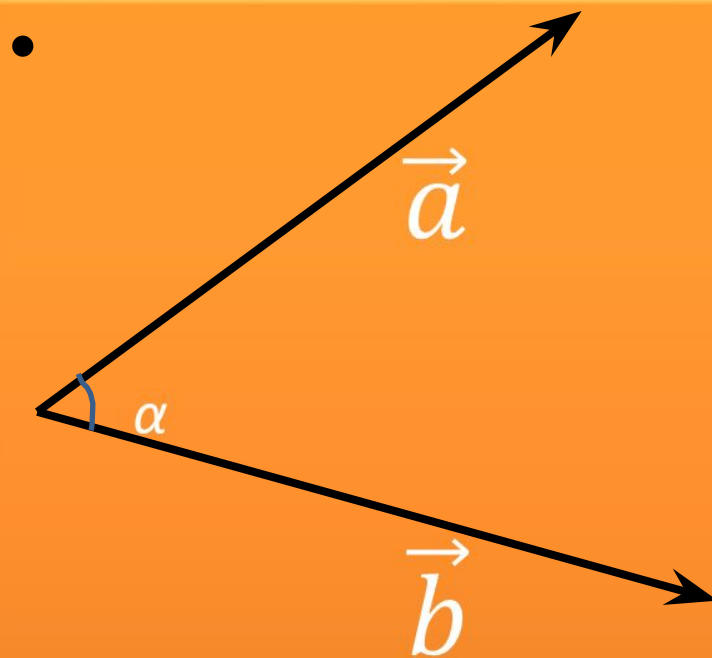


Скалярное произведение векторов геометрия 9 класс

Подготовила
Акчурина О.О.

Угол между векторами

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не являются сонаправленными.



$$\angle(\vec{a} \vec{b}) = \alpha$$

- Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправленные, или один или оба вектора нулевые, то угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 0° .

$$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ$$

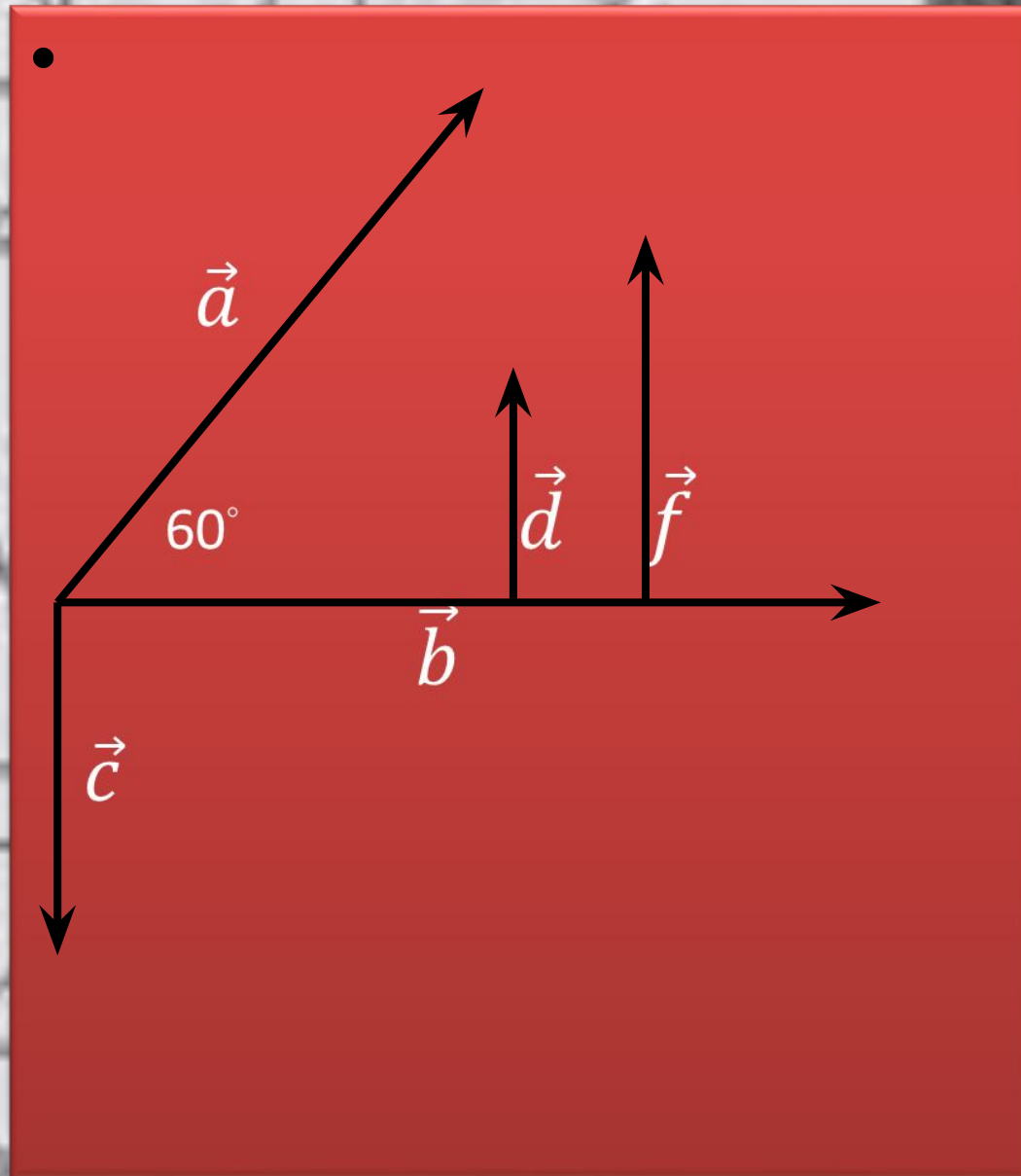
- Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ противоположно направленные, то угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 180° .

$$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ$$

Два вектора называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90° .



Пример



$$\angle(\vec{a} \ \vec{b}) = 60^\circ ;$$

$$\angle(\vec{a} \ \vec{c}) = 150^\circ ;$$

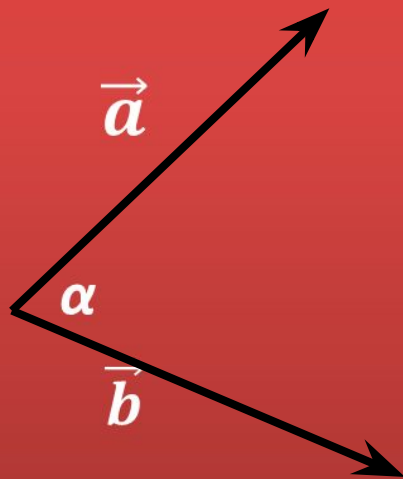
$$\angle(\vec{c} \ \vec{b}) = 90^\circ ;$$

$$\angle(\vec{d} \ \vec{f}) = 0^\circ ;$$

$$\angle(\vec{c} \ \vec{d}) = 180^\circ ;$$

$$\angle(\vec{d} \ \vec{b}) = 90^\circ .$$

Скалярным произведением двух векторов называют произведение их длин на косинус угла между ними.



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$$

Скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы **перпендикулярны**.

Действительно.

Если $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$, $\cos 90^\circ = 0$ и тогда $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Обратно.

Если $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ и векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - ненулевые, тогда $\cos \alpha = 0$ и $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$, т.е. $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Произведение $\vec{a} \cdot \vec{a}$ называют скалярным квадратом и обозначают $\vec{a}^2$.

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$$



Примеры

Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

- 1) $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 5, \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ;$
- 2) $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 7, \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 150^\circ;$
- 3) $|\vec{a}| = 9, |\vec{b}| = 8, \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ;$



Решени е

Для решения задачи воспользуемся формулой:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$$

$$1) \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = \mathbf{5}.$$

$$\begin{aligned} 2) \vec{a} \cdot \vec{b} &= 4 \cdot 7 \cdot \cos 150^\circ = 28 \cdot \cos(180^\circ - 30^\circ) = \\ &= 28 \cdot \cos 30^\circ = 28 \cdot \frac{1}{2} = \mathbf{14}. \end{aligned}$$

$$3) \vec{a} \cdot \vec{b} = 9 \cdot 8 \cdot \cos 90^\circ = 72 \cdot 0 = \mathbf{0}.$$

Пусть в прямоугольной системе координат даны векторы $\vec{a}\{x_1, y_1\}$ и $\vec{b}\{x_2, y_2\}$

- Теорема

В прямоугольной системе координат скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выражается формулой

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$$

Следствия:

- 1) Ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда $x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = 0$
- 2) Косинус угла α между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выражается формулой

$$\cos \alpha = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$



Примеры

1. Найти скалярное произведение векторов

$\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

a) $\vec{a}\{3;4\}$; $\vec{b}\{5;2\}$;

b) $\vec{a}\{-8;4\}$; $\vec{b}\{3;6\}$

2. Найти косинус угла α между векторами

$\vec{a}\{-2;3\}$ и $\vec{b}\{3;4\}$.



Решение

1. Для решения задачи воспользуемся формулой $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 5 + 4 \cdot 2 = 15 + 8 = 23$

b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -8 \cdot 3 + 4 \cdot 6 = -24 + 24 = 0.$

$$\begin{aligned} 2. \cos \alpha &= \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}} = \frac{-2 \cdot 3 + 3 \cdot (-4)}{\sqrt{4+9} \cdot \sqrt{9+16}} \\ &= \frac{-6 + (-12)}{5\sqrt{13}} = \frac{-18}{5\sqrt{13}}. \end{aligned}$$

Свойства скалярного произведения

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и любого числа k верны соотношения:

1. $\vec{a}^2 \geq 0$, причем $\vec{a}^2 > 0$ при $\vec{a} \neq 0$;

2. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;

3. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$;

4. $(k \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = k \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$.



Пример

- Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 30° ,
 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$.
Вычислить скалярное произведение
 $(\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{a} + \vec{b})$.



Решение

- $$\begin{aligned}(\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{a} + \vec{b}) &= \vec{a}^2 - 2\vec{b}\vec{a} + \vec{a}\vec{b} - 2\vec{b}^2 = \\&= \vec{a}^2 - \vec{b}\vec{a} - 2\vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 30^\circ - 2|\vec{b}|^2 = \\&= 1 - 1 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \cdot 1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = -\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)\end{aligned}$$

Вопросы для повторения изученного материала

1. Что означают слова «угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен α »?
2. В каком случае угол между векторами равен 0° ?
3. Какие два вектора называются перпендикулярными?
4. Что такое скалярное произведение двух векторов?
5. В каком случае скалярное произведение ненулевых векторов:
а) равно 0; б) больше 0; в) меньше 0?
6. Записать формулу скалярного произведения векторов в координатной форме.
7. Записать формулу косинуса угла между ненулевыми векторами через их координаты.
8. Сформулировать свойства скалярного произведения векторов.