

По заказу Министерства просвещения РСФСР

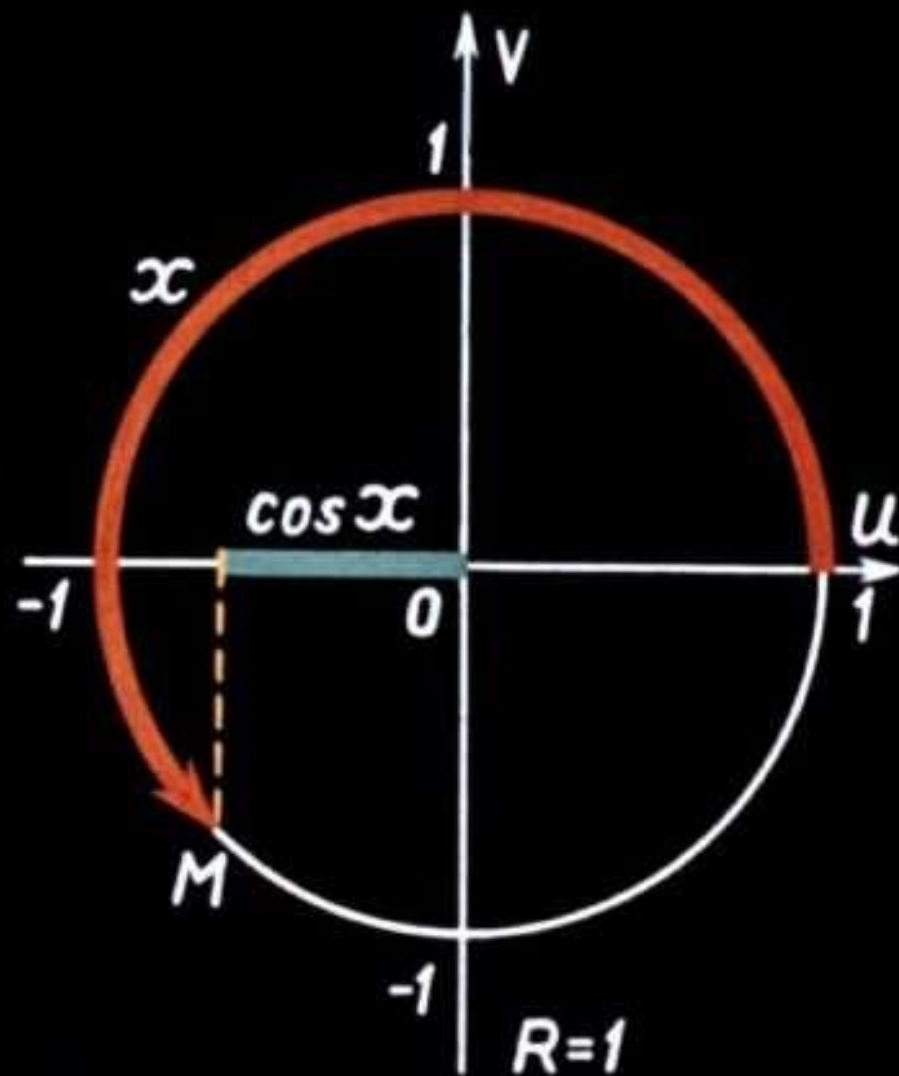
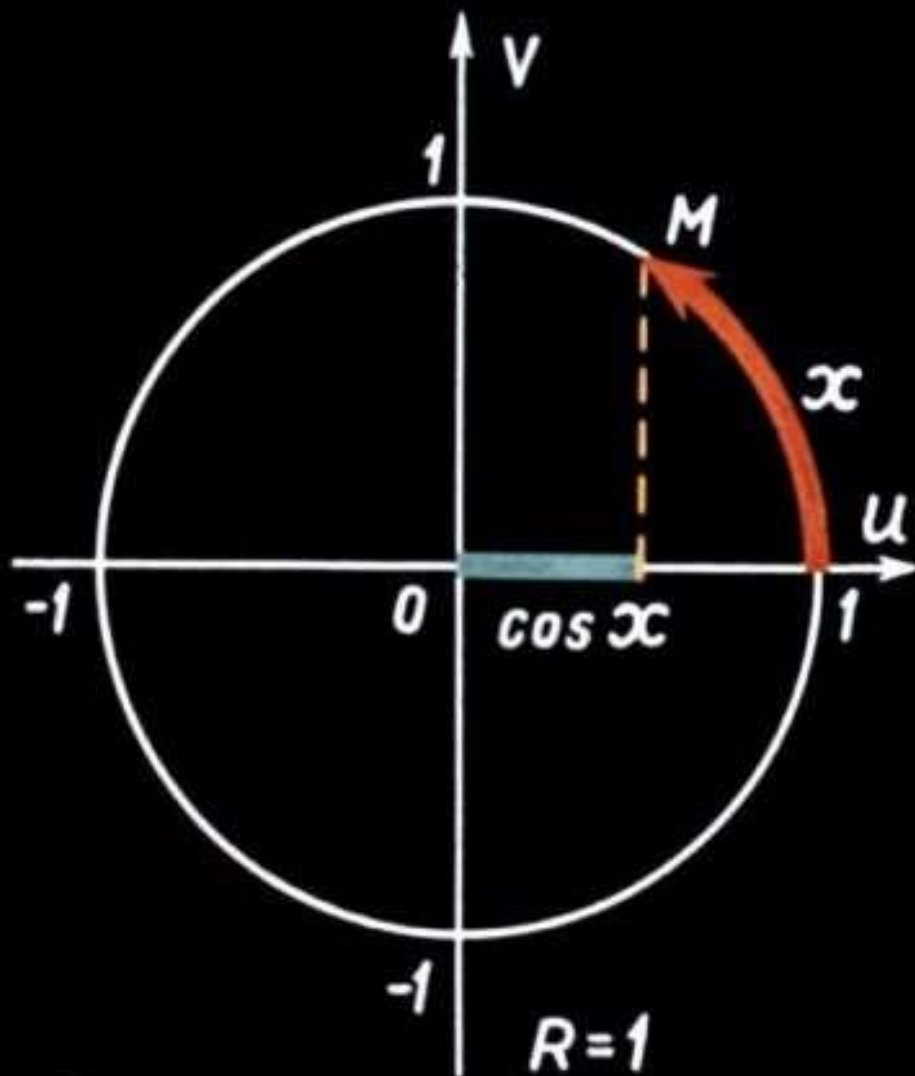
ГРАФИКИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

(Графическая иллюстрация
свойств простейших
тригонометрических функций)

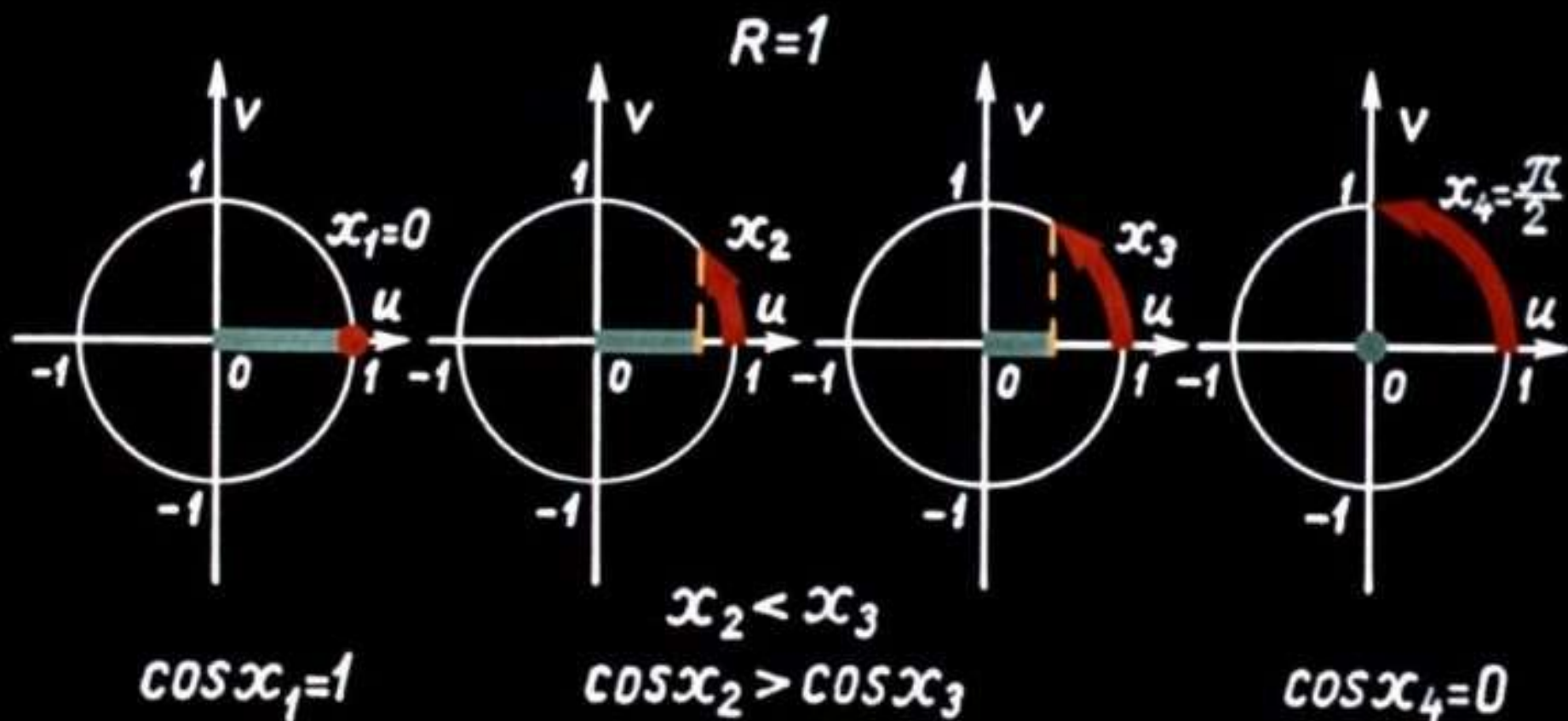
Диафильм по математике для средней школы

1. Функция

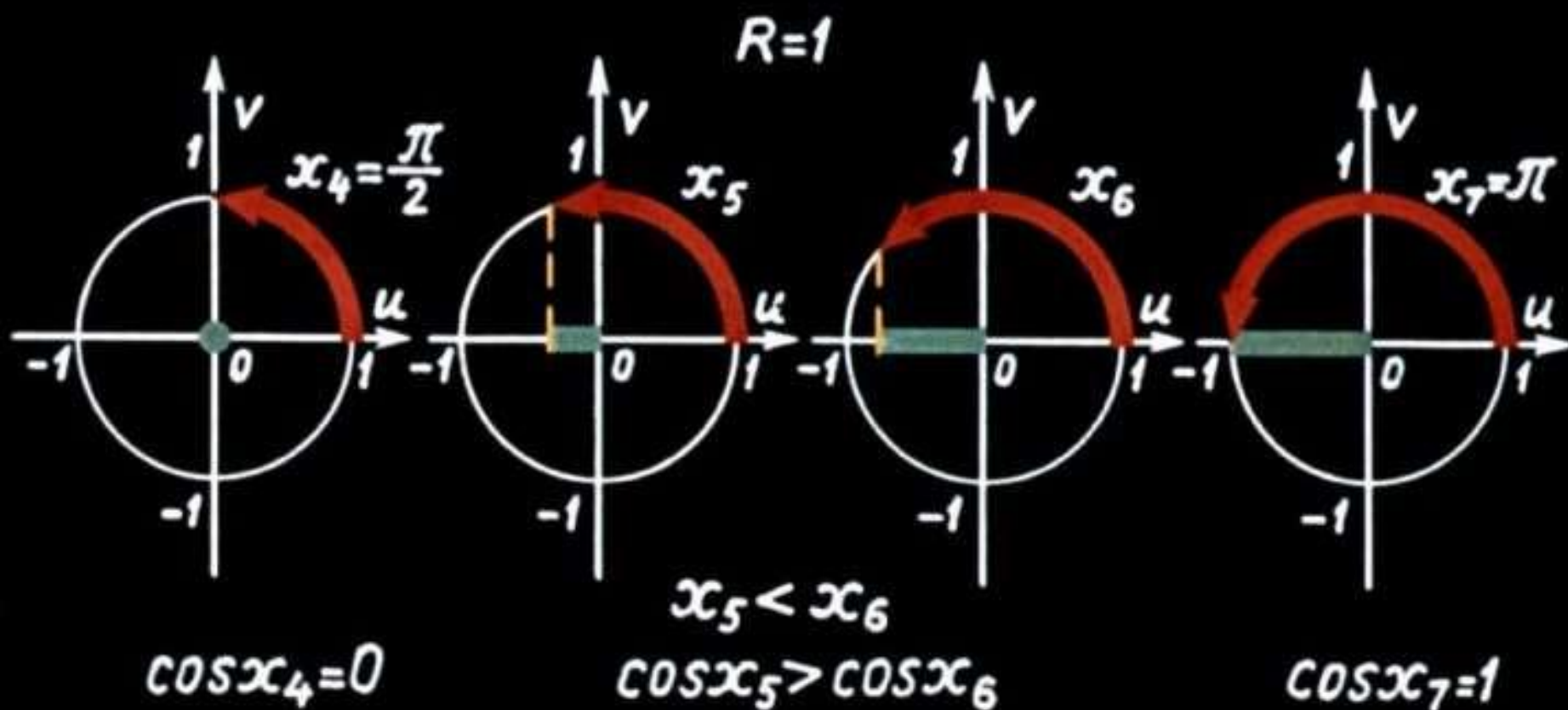
$$y = \cos x$$



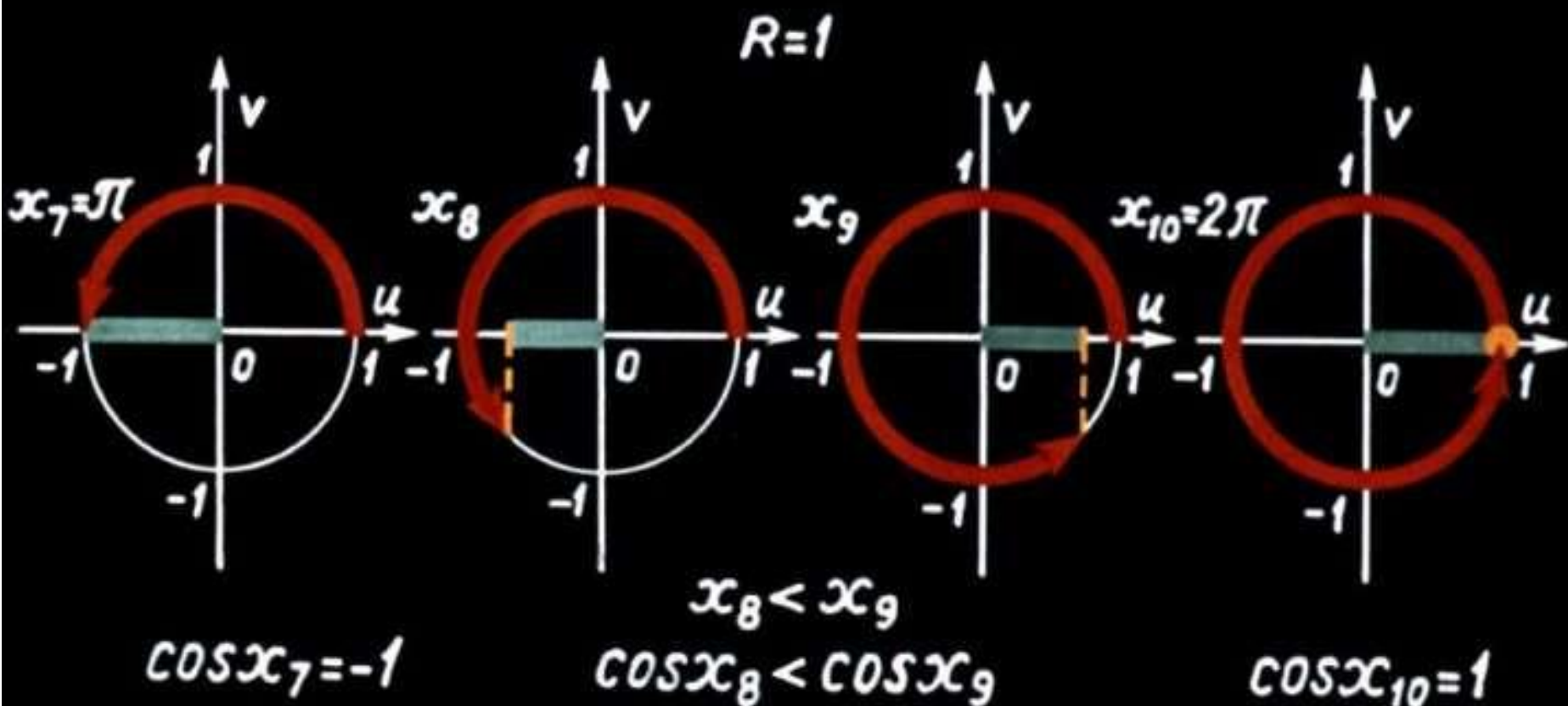
Косинус дуги (угла) x есть отношение абсциссы точки M к длине радиуса. В единичной окружности ($R=1$) значение косинуса дуги x численно равно абсциссе точки M .



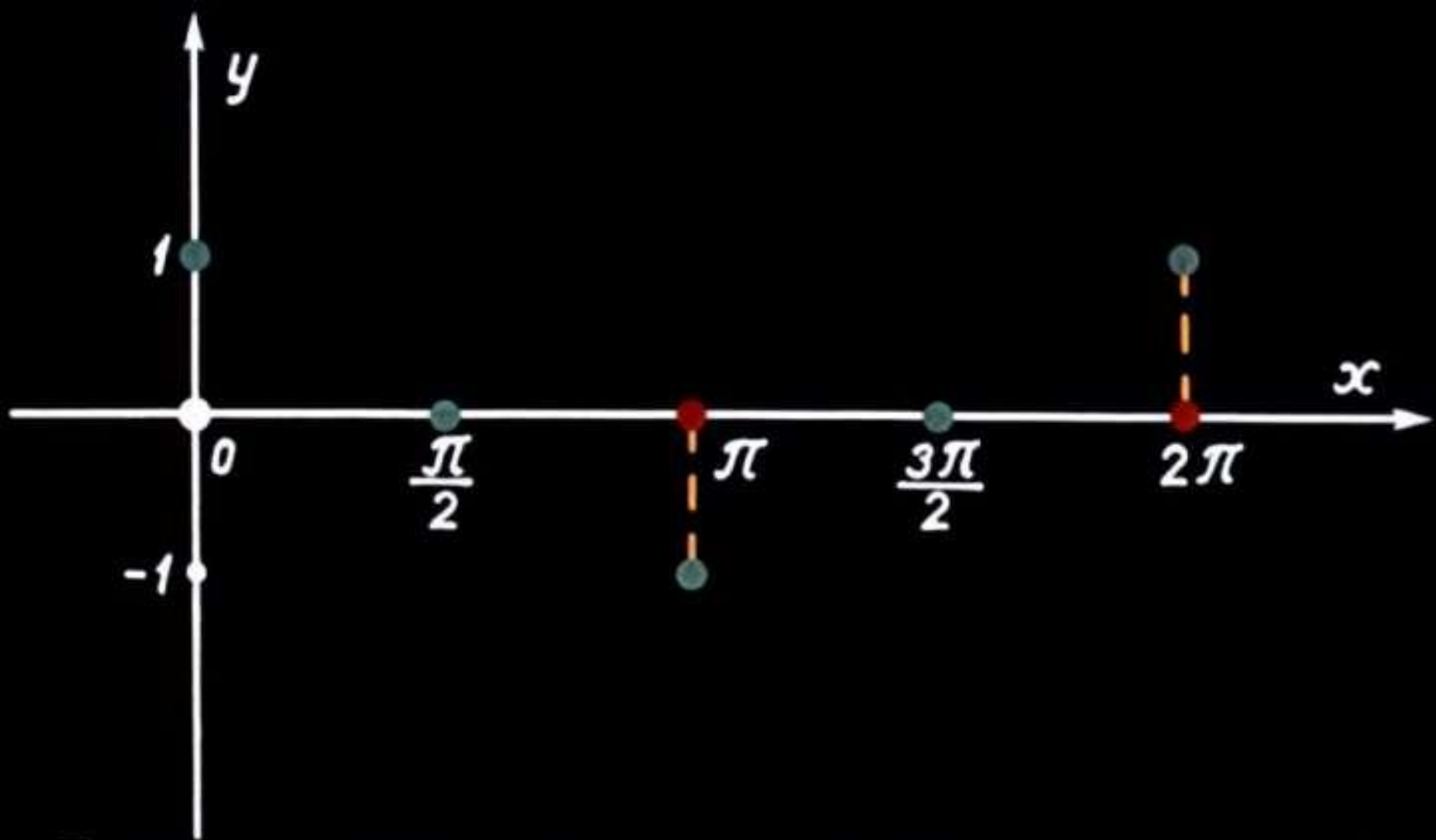
При изменении дуги от 0 до $\frac{\pi}{2}$ косинус этой дуги убывает.



При изменении дуги x от $\frac{\pi}{2}$ до π $\cos x$ убывает.
Как изменяется модуль $\cos x$ в этом промежутке?



Как изменяется $\cos x$ в промежутке от π до 2π ?
 Какое значение принимает $\cos x$ при $x = \frac{3\pi}{2}$? На-
 зовите наибольшее и наименьшее значение функции
 $\cos x$ при изменении x от 0 до 2π .



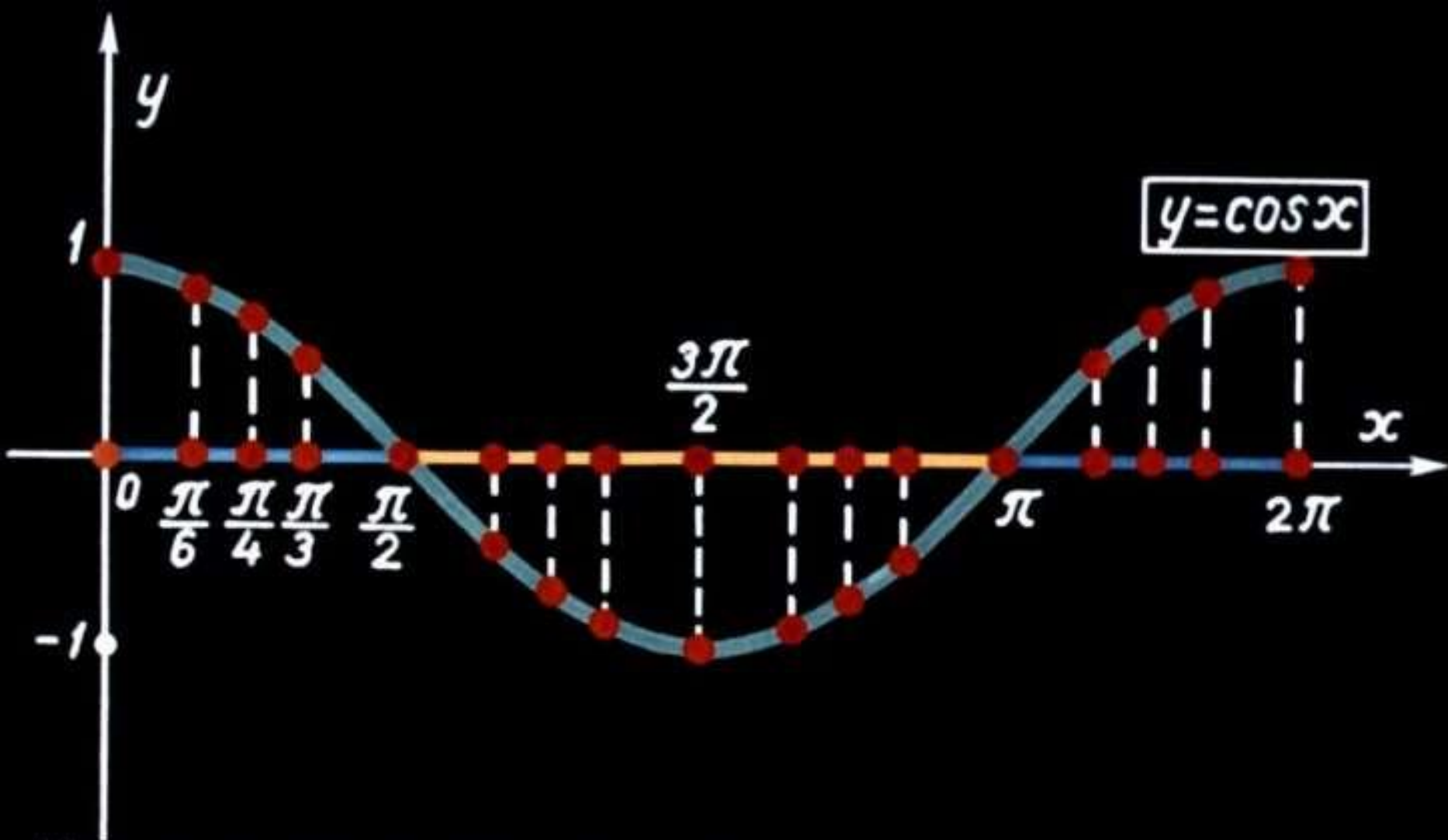
Построим график функции $y = \cos x$ на отрезке от 0 до 2π . Для этого сначала наметим точки, в которых $\cos x$ обращается в 0 , принимает наибольшее и наименьшее значения.

Для большей точности построения графика составим таблицу промежуточных значений.

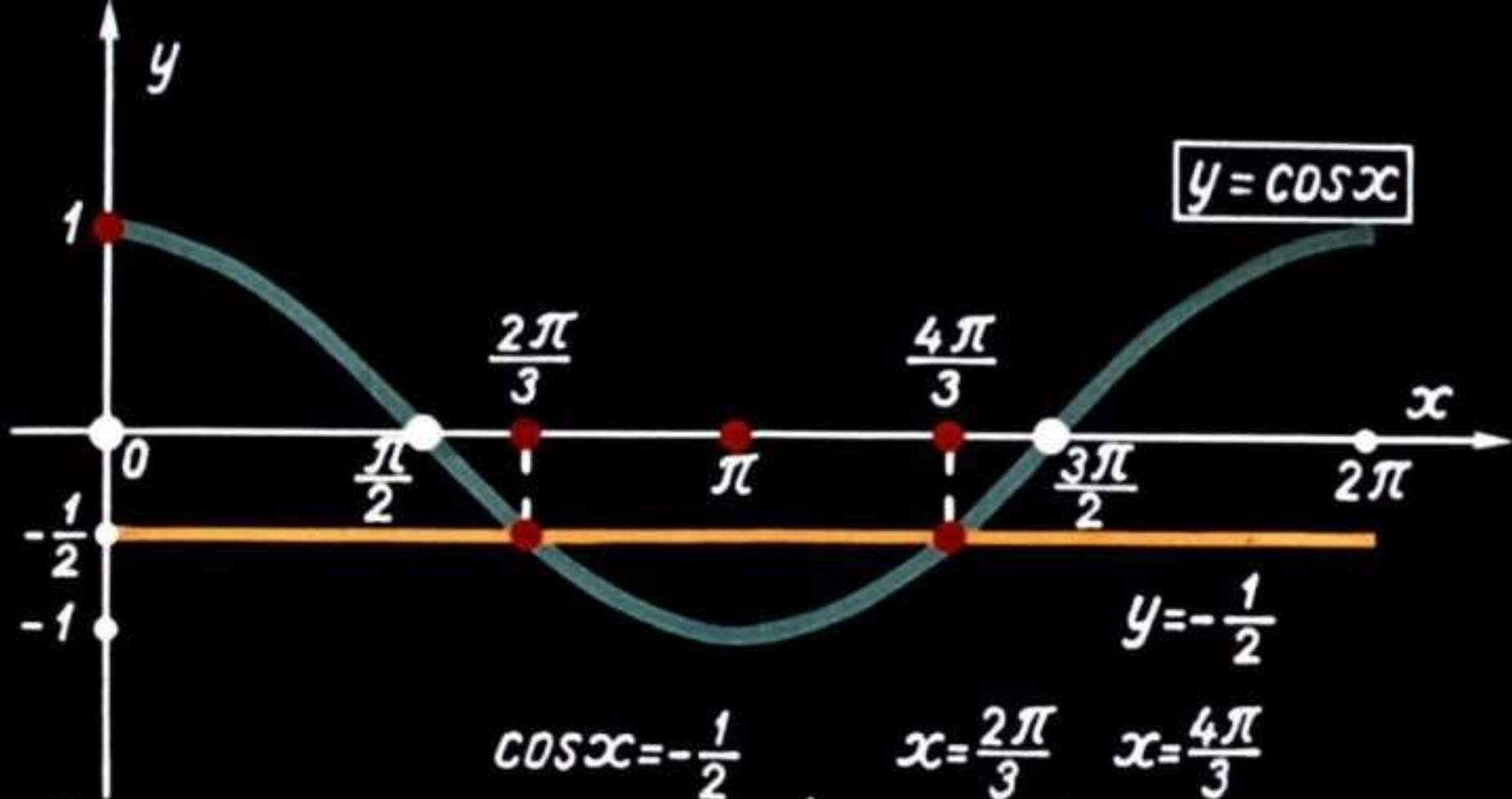
8

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,87$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,71$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} \approx -0,71$	$-\frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0,87$

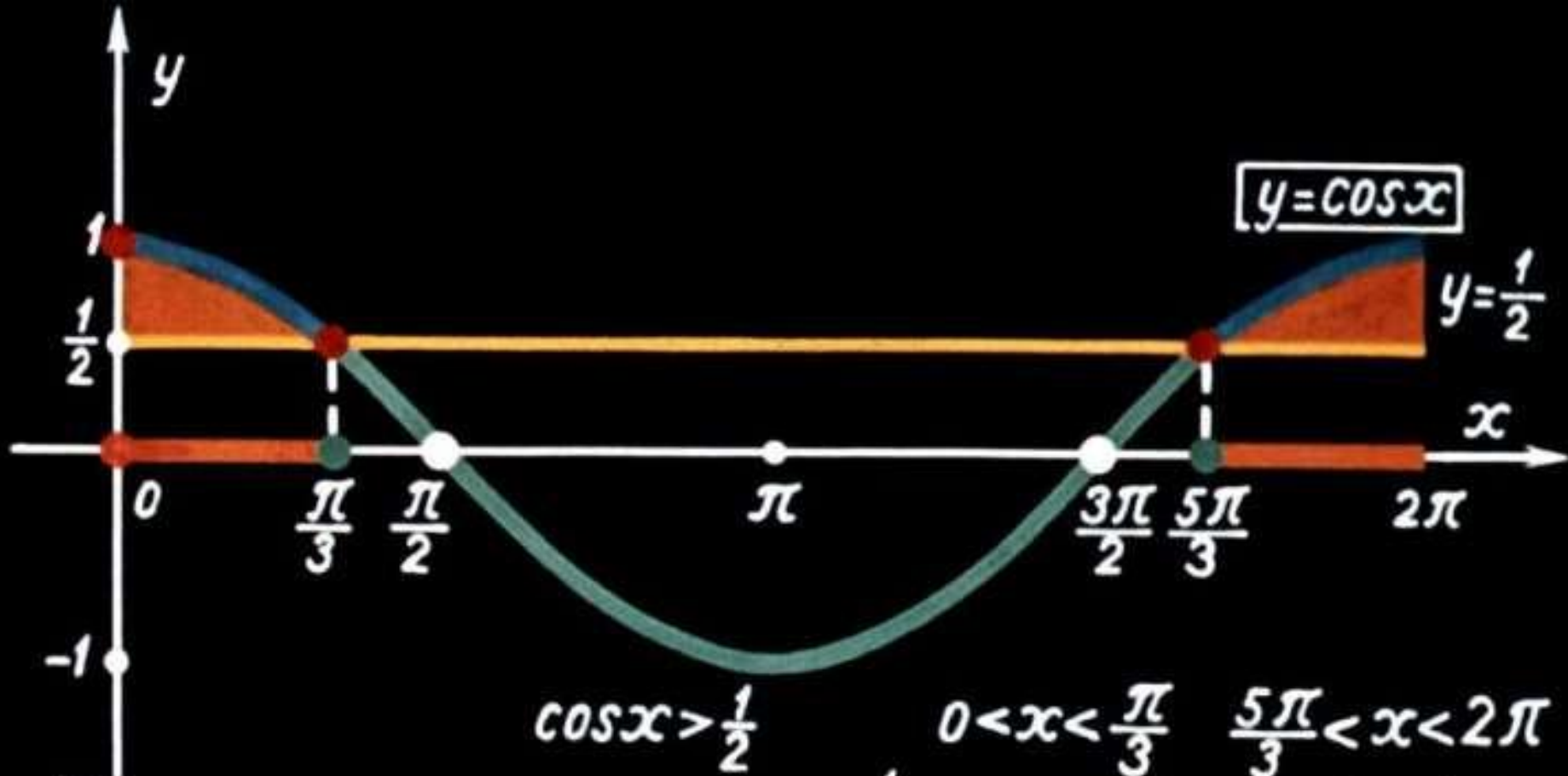
x	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	π
$\cos x$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



Учитывая характер изменения функции $\cos x$ на отрезке от 0 до 2π и данные таблицы, строим график. Укажите по графику, в каких промежутках косинус положителен, отрицателен, возрастает, убывает.



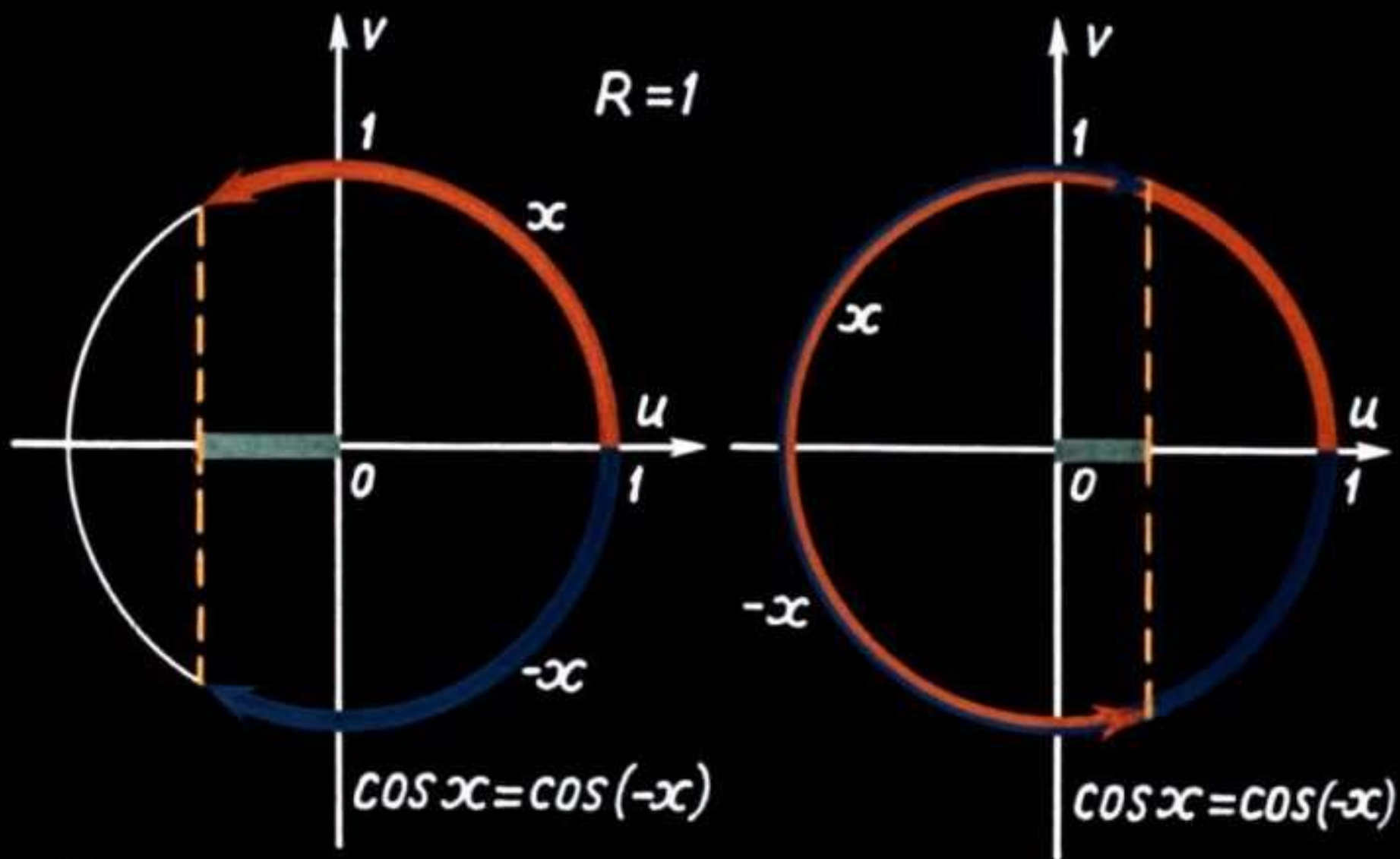
Решим уравнение: $\cos x = -\frac{1}{2}$, если $0 \leq x \leq 2\pi$. Для этого построим графики $y = \cos x$ и $y = -\frac{1}{2}$. Абсциссы точек пересечения этих графиков будут корнями данного уравнения. Решите уравнения: $\cos x = 0$, $\cos x = 1$, $\cos x = -1$, $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ($0 \leq x \leq 2\pi$).



Решим неравенство $\cos x > \frac{1}{2}$, если $0 \leq x \leq 2\pi$. Абсциссы точек, в которых график функции $y = \cos x$ расположен выше графика функции $y = \frac{1}{2}$, образуют множество решений данного неравенства.

Решите неравенства:

$$\cos x < \frac{1}{2}, \cos x > 0, \cos x < 0, \cos x < \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (0 \leq x \leq 2\pi).$$



Косинусы противоположных значений аргумента равны. Это означает, что функция $\cos x$ чётная.

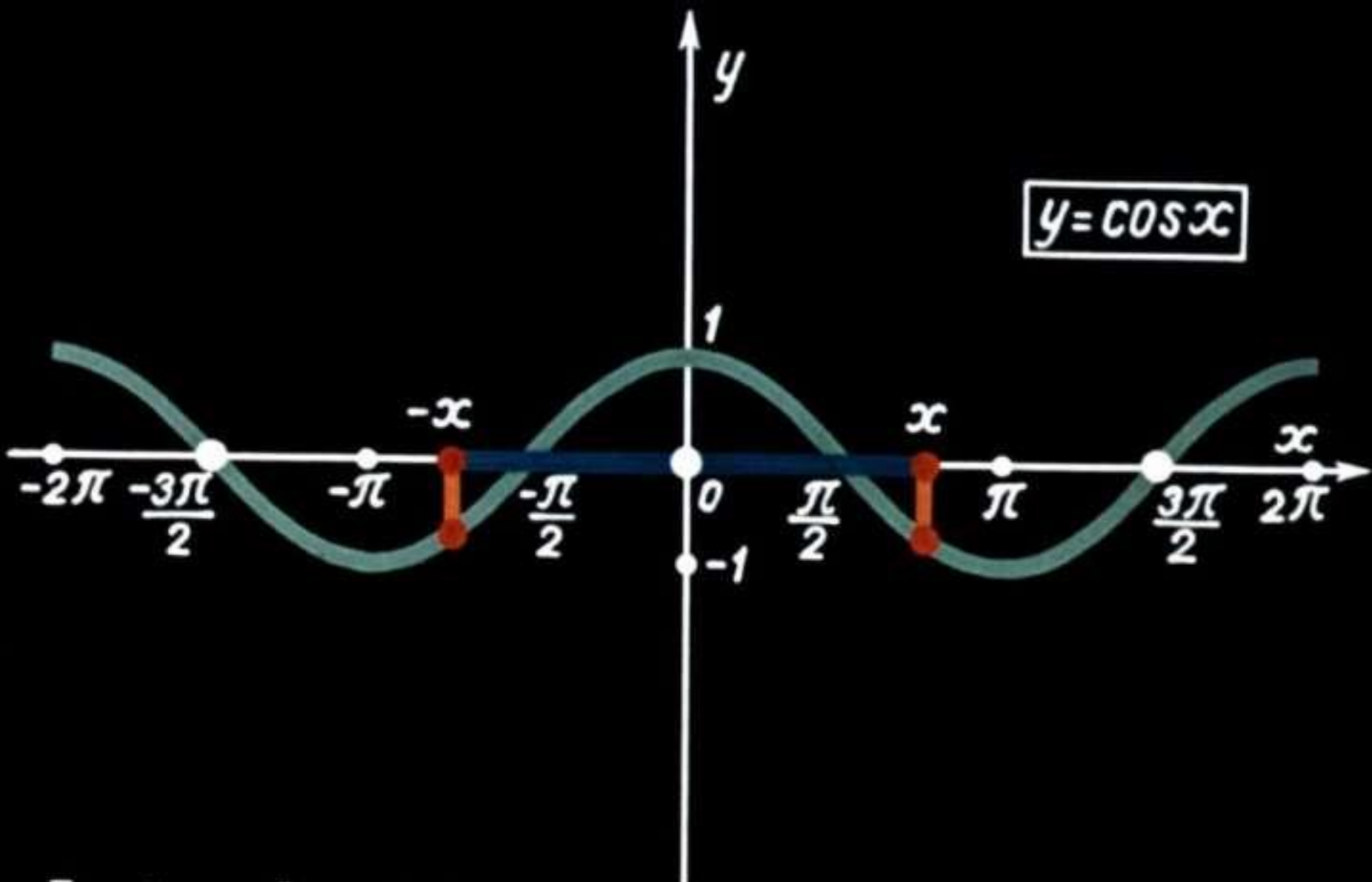
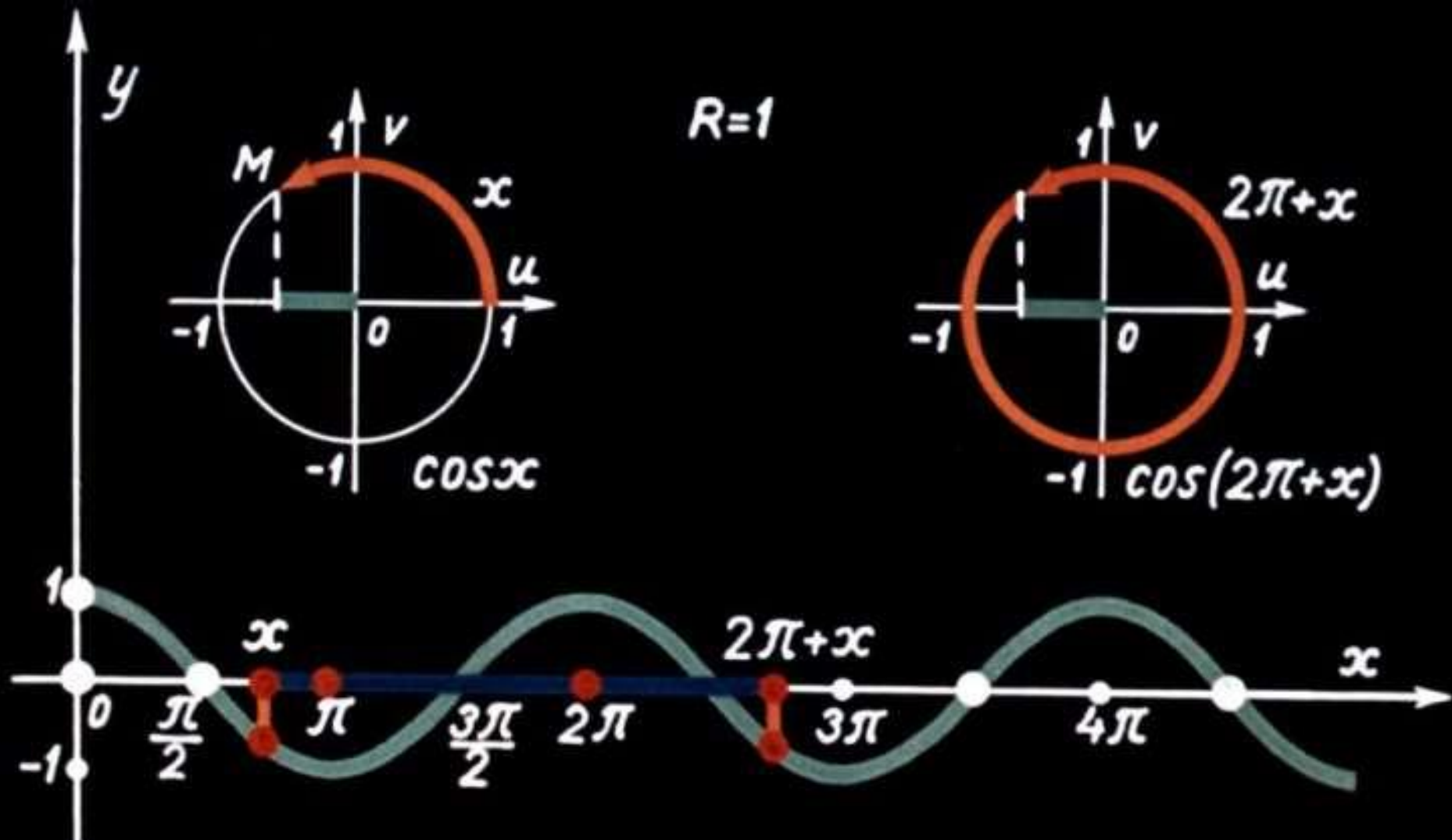
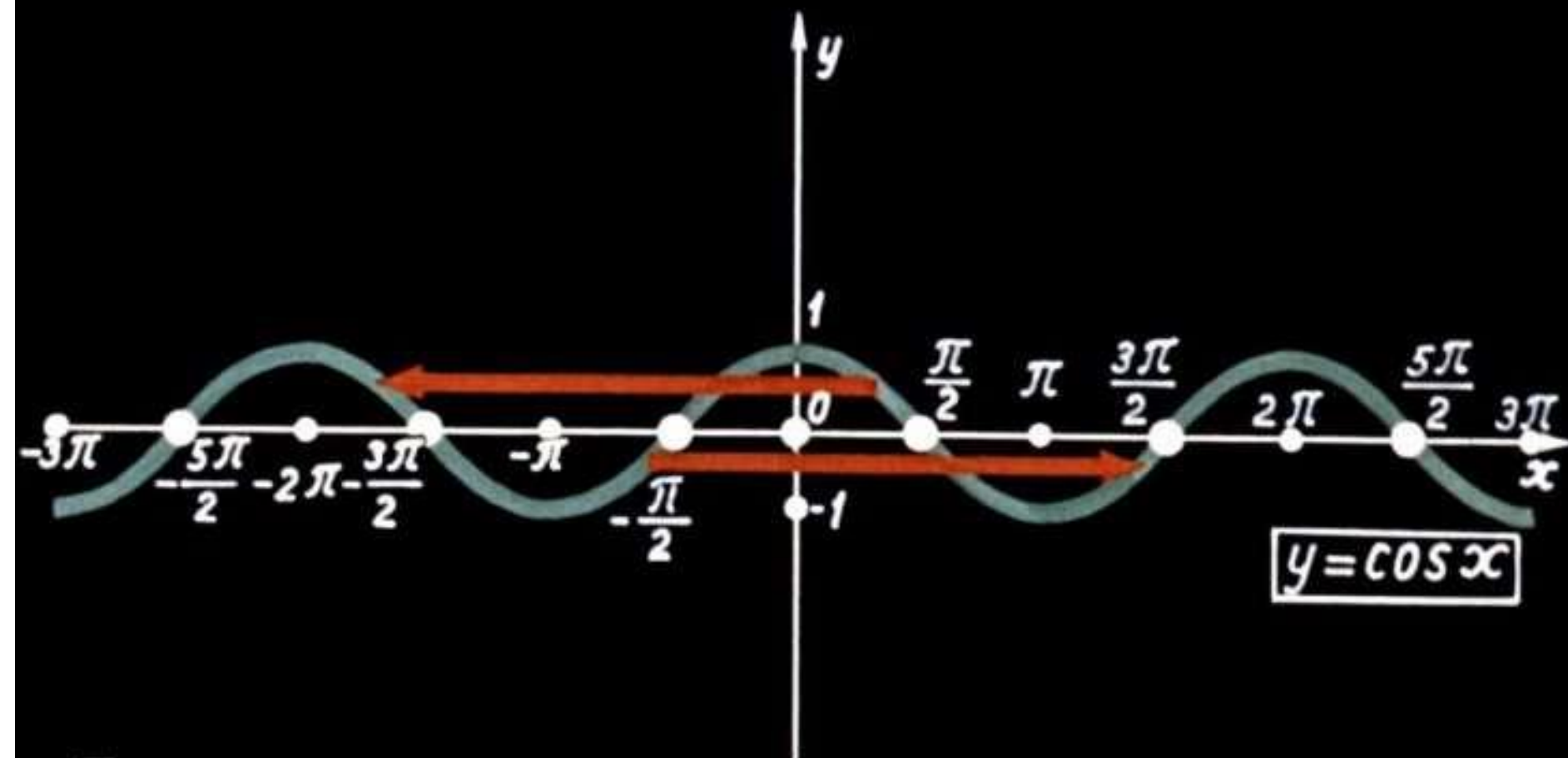


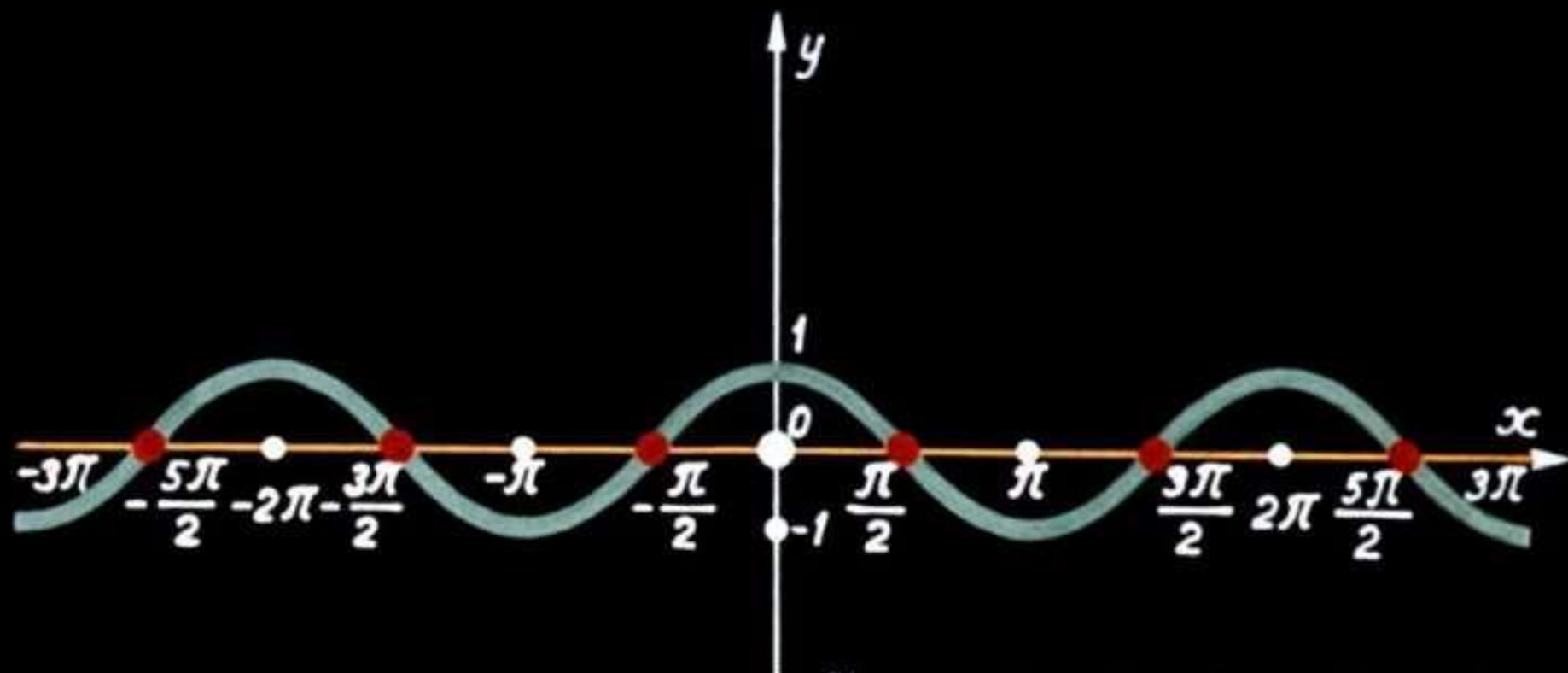
График чётной функции симметричен относительно оси y . Найдите значения: $\cos(-\frac{\pi}{6})$, $\cos(-\frac{\pi}{2})$, $\cos(-\pi)$.



При значениях x , больших 2π , значения $\cos x$ будут периодически повторяться: $\cos(x + 2\pi) = \cos x$. Найдите значения: $\cos \frac{13\pi}{6}$, $\cos \frac{5\pi}{2}$, $\cos 3\pi$, $\cos \frac{8\pi}{3}$, $\cos 4,5\pi$, $\cos(\frac{\pi}{4} + 2\pi k)$, где $k = 0, 1, 2, 3, \dots$



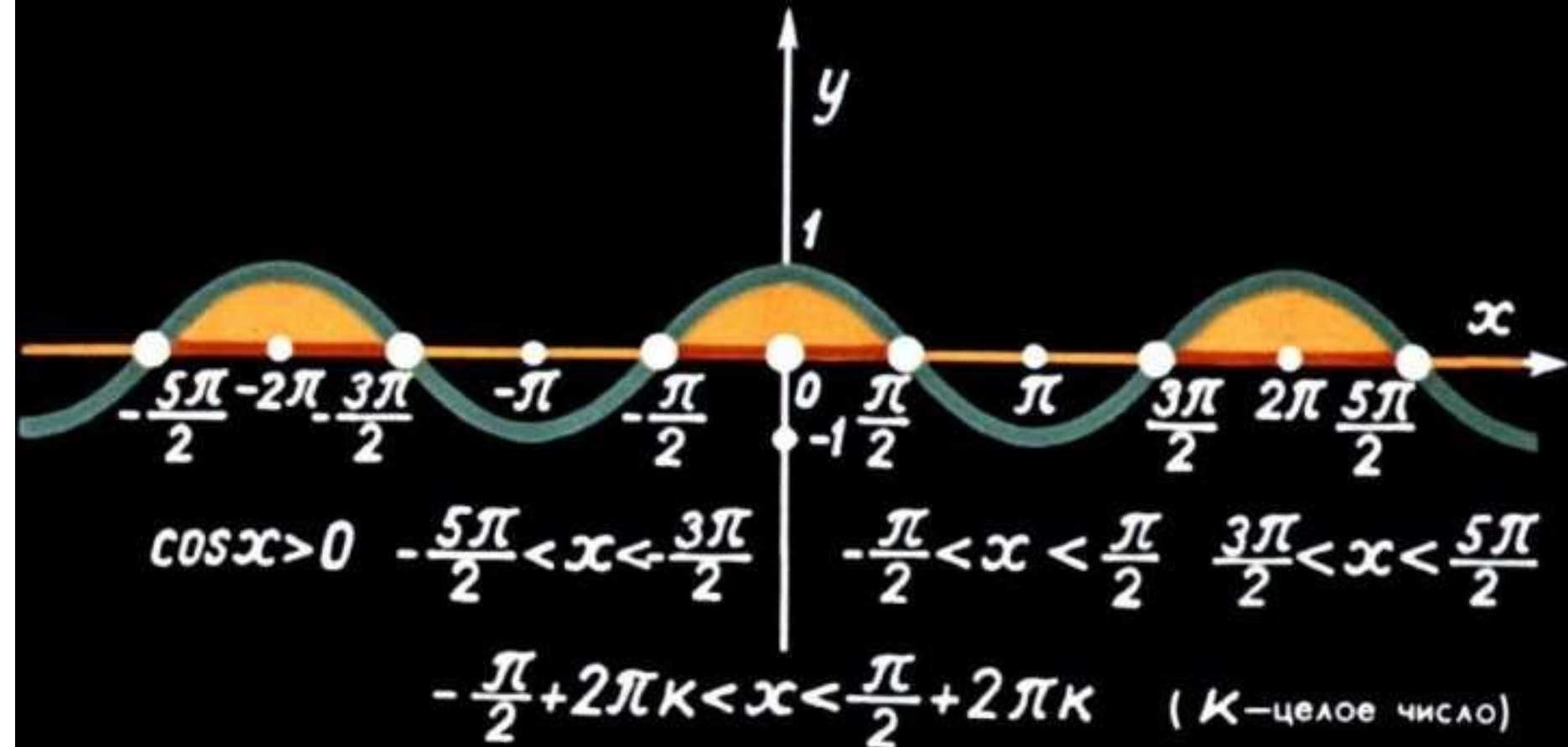
При сдвиге графика функции $y = \cos x$ вдоль оси x на 2π или -2π он преобразуется сам в себя. Это означает, что функция $y = \cos x$ периодическая. Будет ли число 4π , 6π , 7π , -8π периодом этой функции? Каков наименьший положительный период функции $\cos x$?



$$\cos x = 0$$

$$x = \dots -5 \cdot \frac{\pi}{2}, -3 \cdot \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 3 \cdot \frac{\pi}{2}, 5 \cdot \frac{\pi}{2} \dots$$

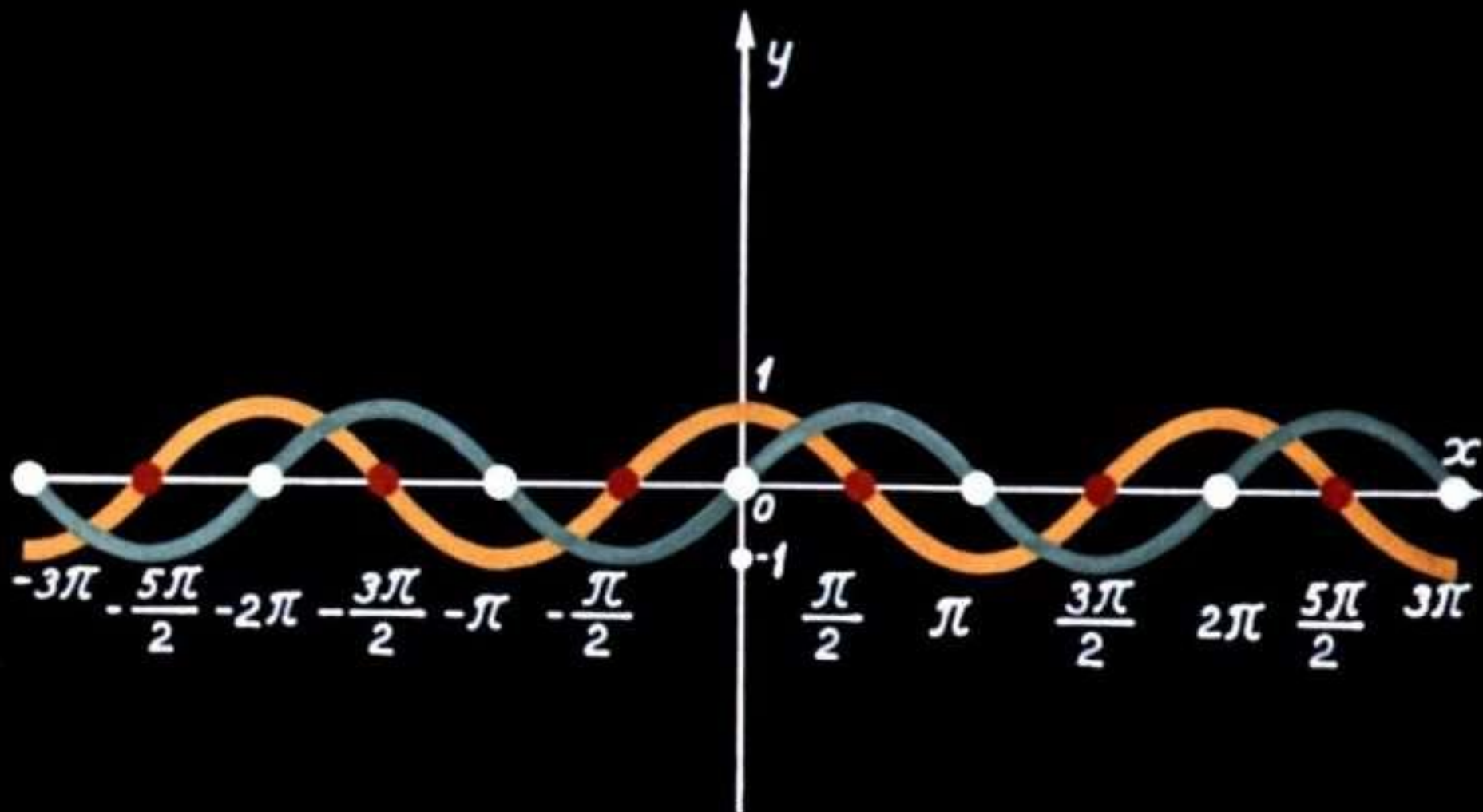
Решим уравнение $\cos x = 0$. Для этого достаточно найти абсциссы точек пересечения графика $y = \cos x$ с осью x . На графике видно, что абсциссы этих точек образуют последовательность с общим членом $\frac{\pi}{2}(2k+1)$, где k — целое число. Решите уравнения: $\cos x = 1$, $\cos x = -1$.



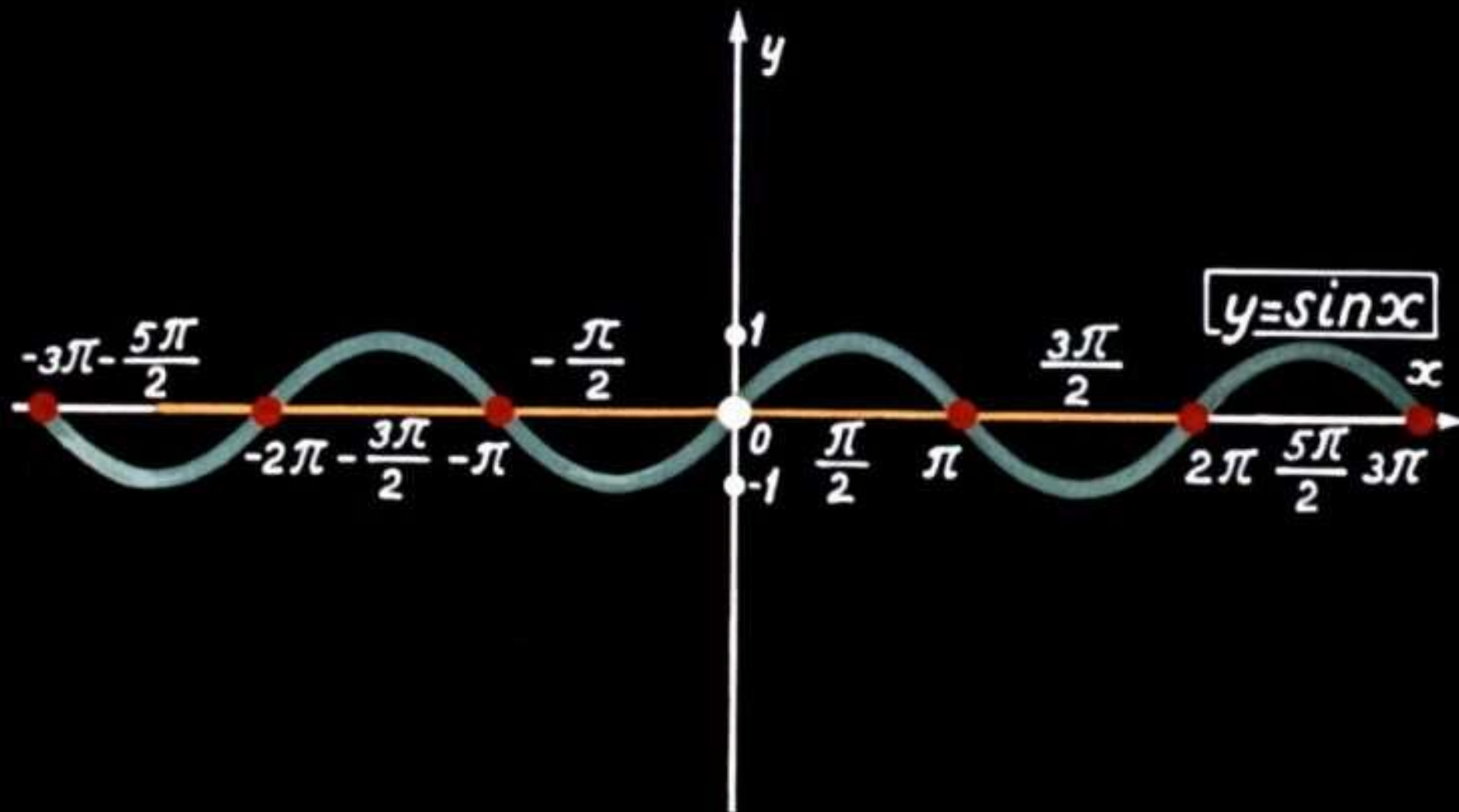
Решим неравенство $\cos x > 0$. Абсциссы точек, в которых график функции $y = \cos x$ расположен выше оси x , образуют множество решений данного неравенства. Какие из чисел $-1\frac{7}{9}\pi, -1, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, 6, 24\pi$ являются решениями данного неравенства? Решите неравенство $\cos x < 0$.

2. Функция

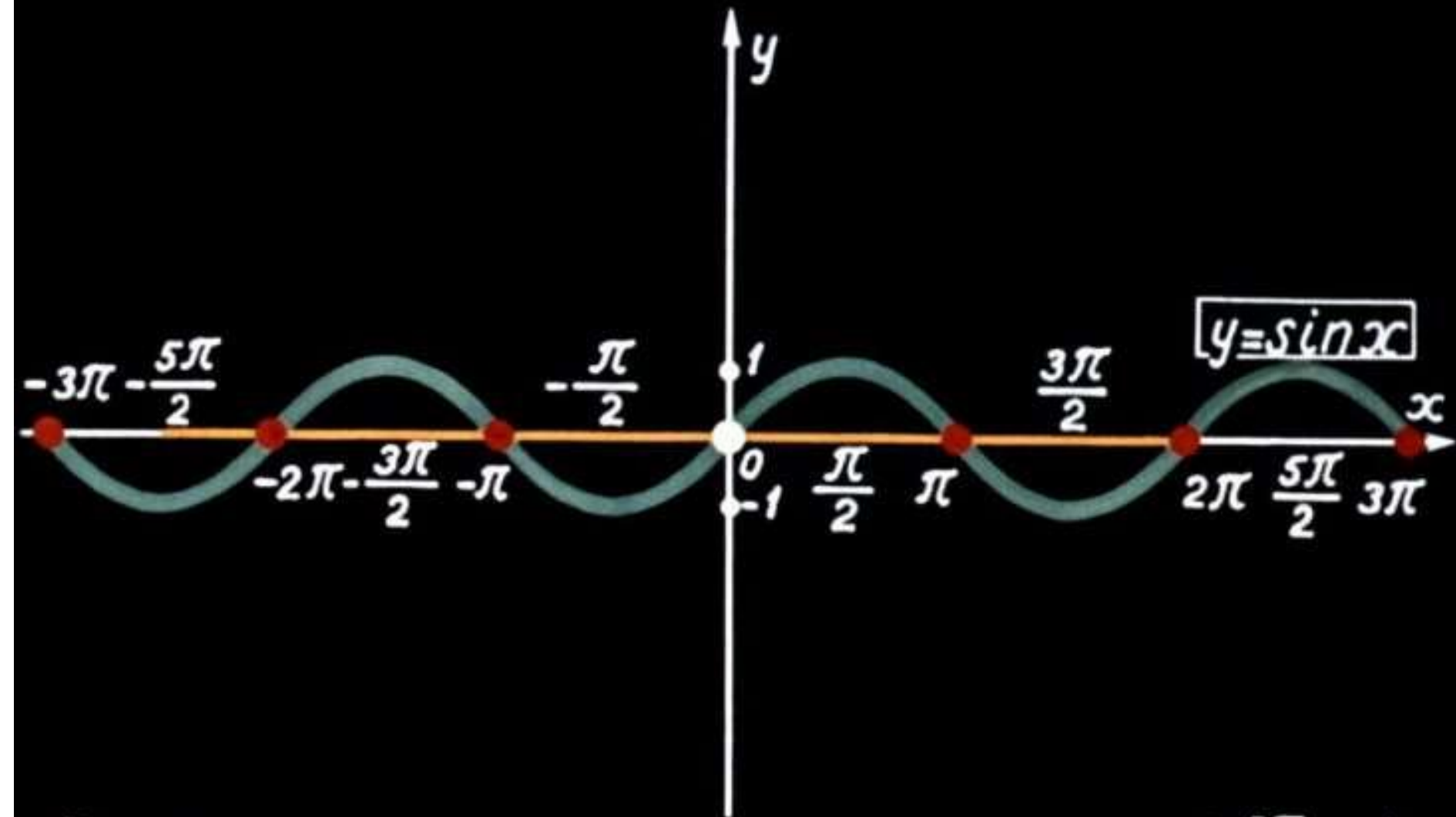
$$y = \sin x$$



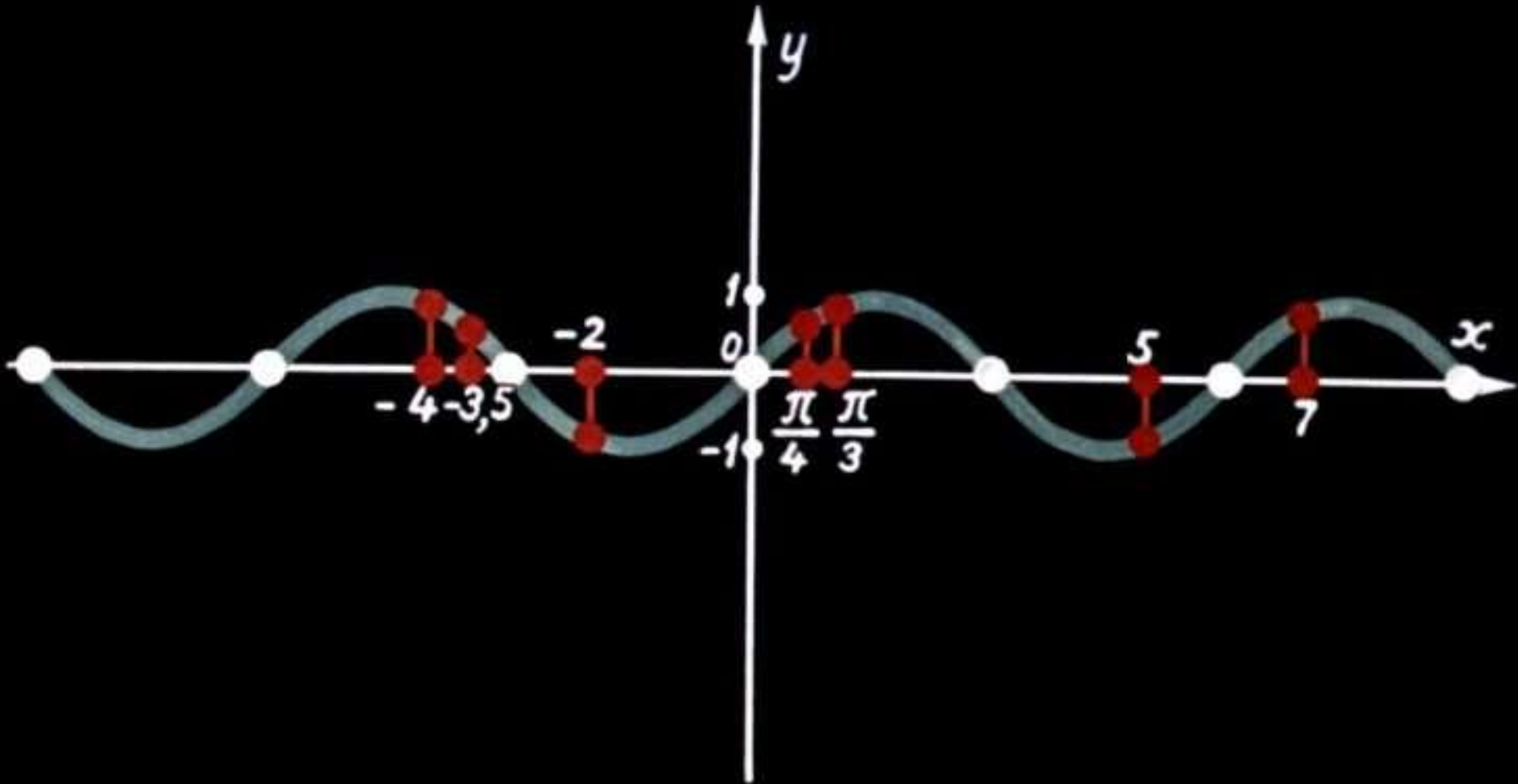
Построим график $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ путём сдвига вдоль оси x графика функции $y = \cos x$ на вектор $\frac{\pi}{2}$. Мы получим график функции $y = \sin x$. Будет ли эта функция периодической?



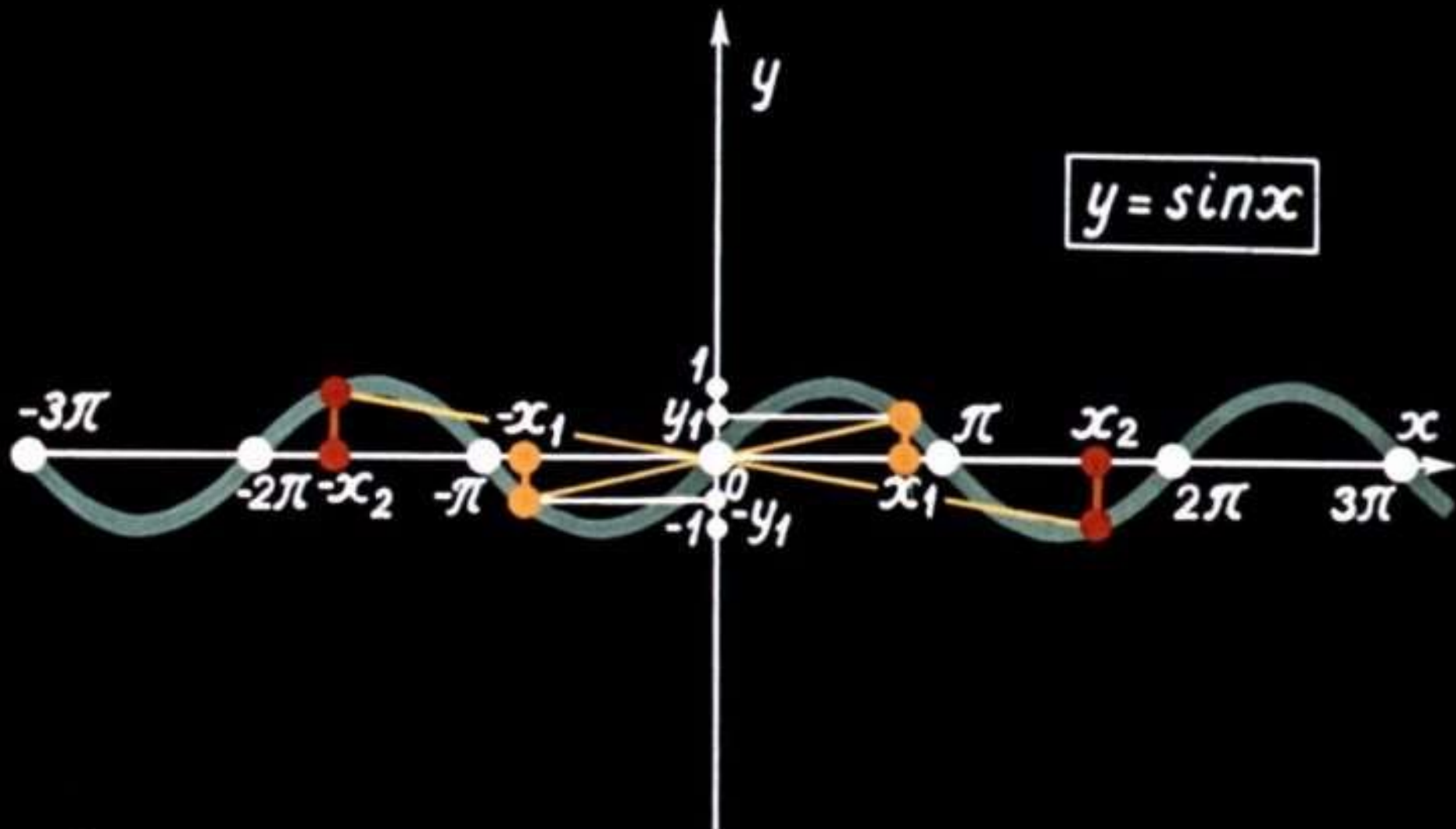
Рассматривая функцию $y = \sin x$ в интервале $(-\frac{5\pi}{2}, 2\pi)$, укажите, где она обращается в нуль, положительна, отрицательна. Решите в интервале $(-\infty, \infty)$ уравнение $\sin x = 0$ и неравенства $\sin x > 0$, $\sin x < 0$.



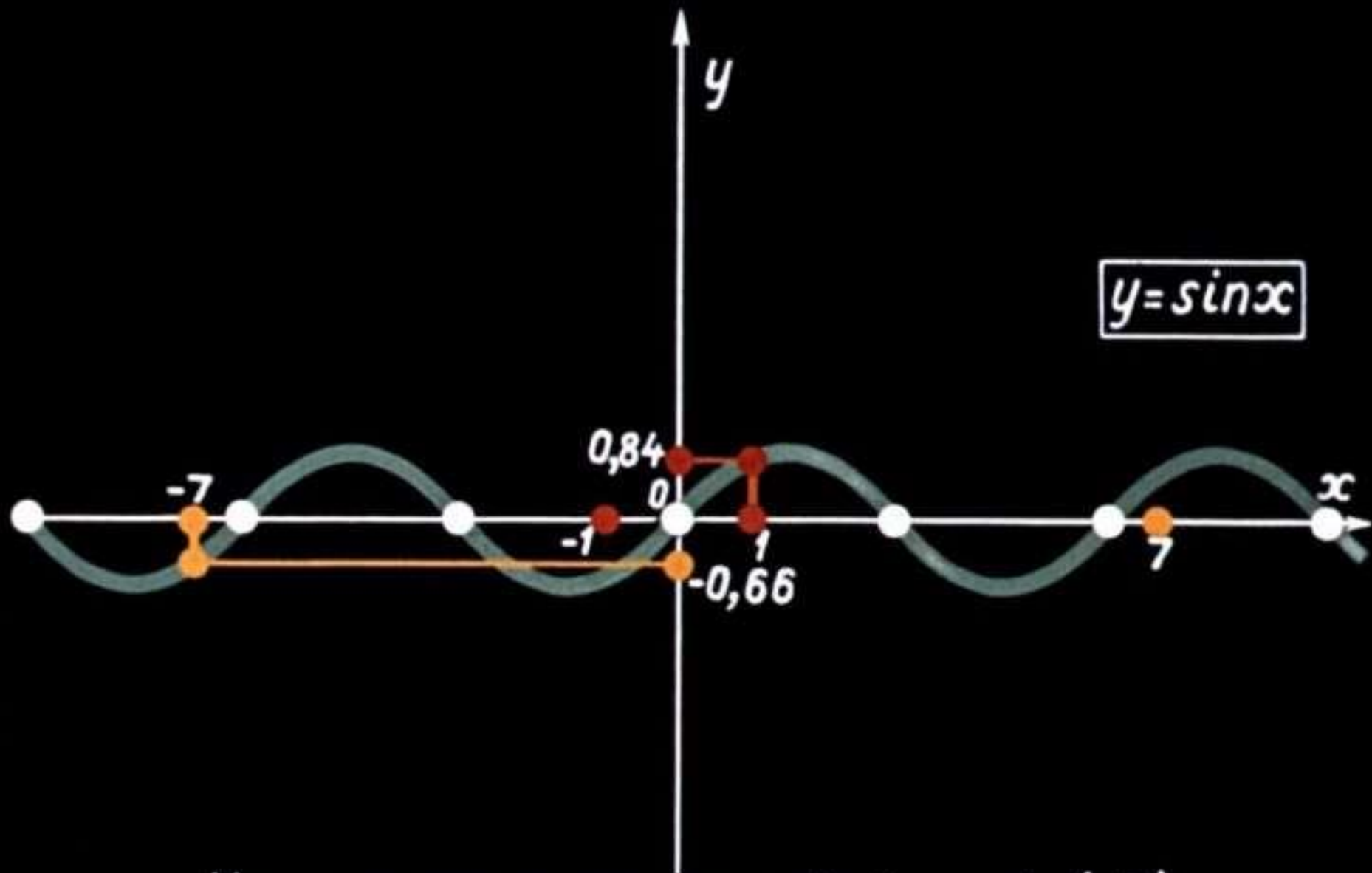
Рассматривая функцию $y = \sin x$ в интервале $(-\frac{5\pi}{2}, 2\pi)$, укажите промежутки её возрастания и убывания. В каких точках функция принимает наибольшее или наименьшее значения?



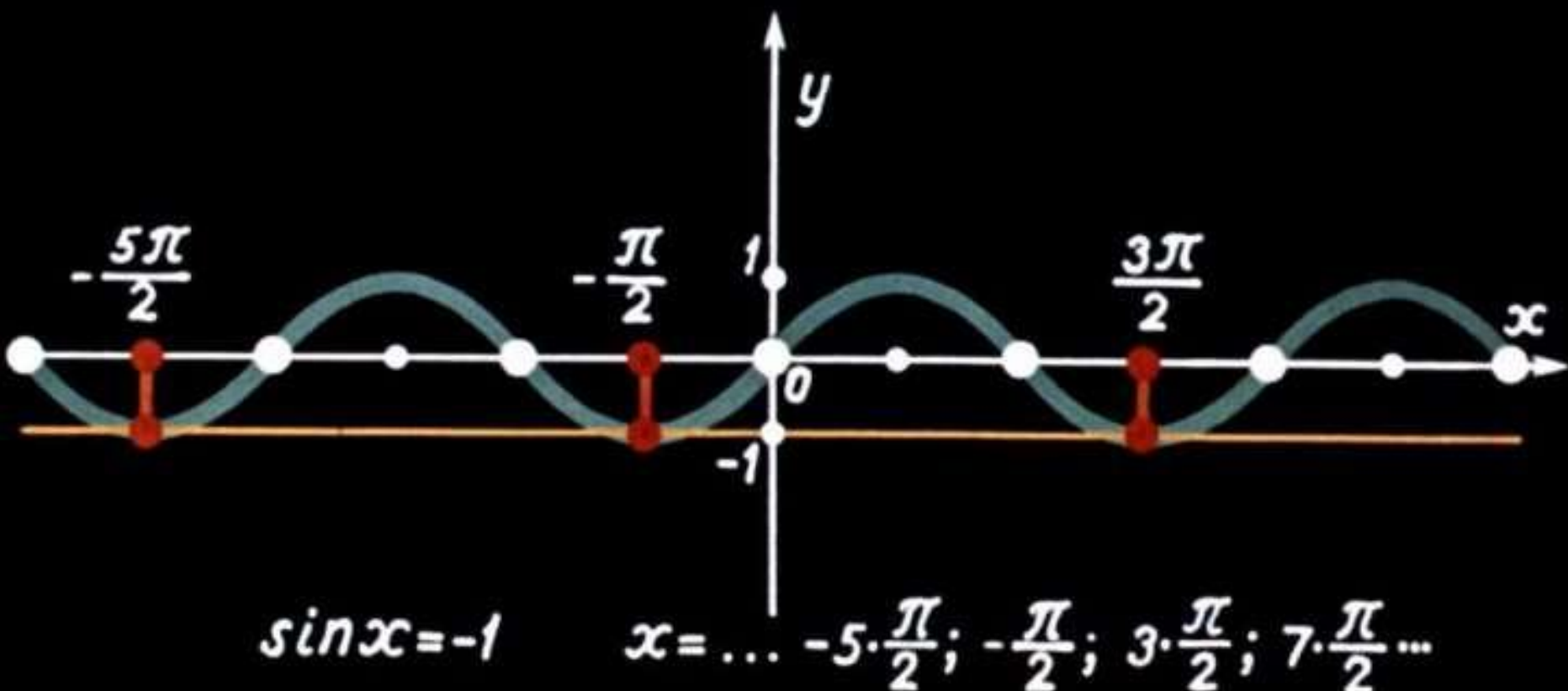
Сравните значения функций: $\sin \frac{\pi}{3}$ и $\sin \frac{\pi}{4}$; $\sin(-4)$ и $\sin(-3.5)$; $\sin(-4)$ и $\sin(-2)$; $\sin 5$ и $\sin 2\pi$; $\sin 5$ и $\sin 7$; $\sin(-4)$ и $\sin 5$; $\sin(-\frac{3\pi}{2})$ и $\sin \frac{\pi}{2}$.



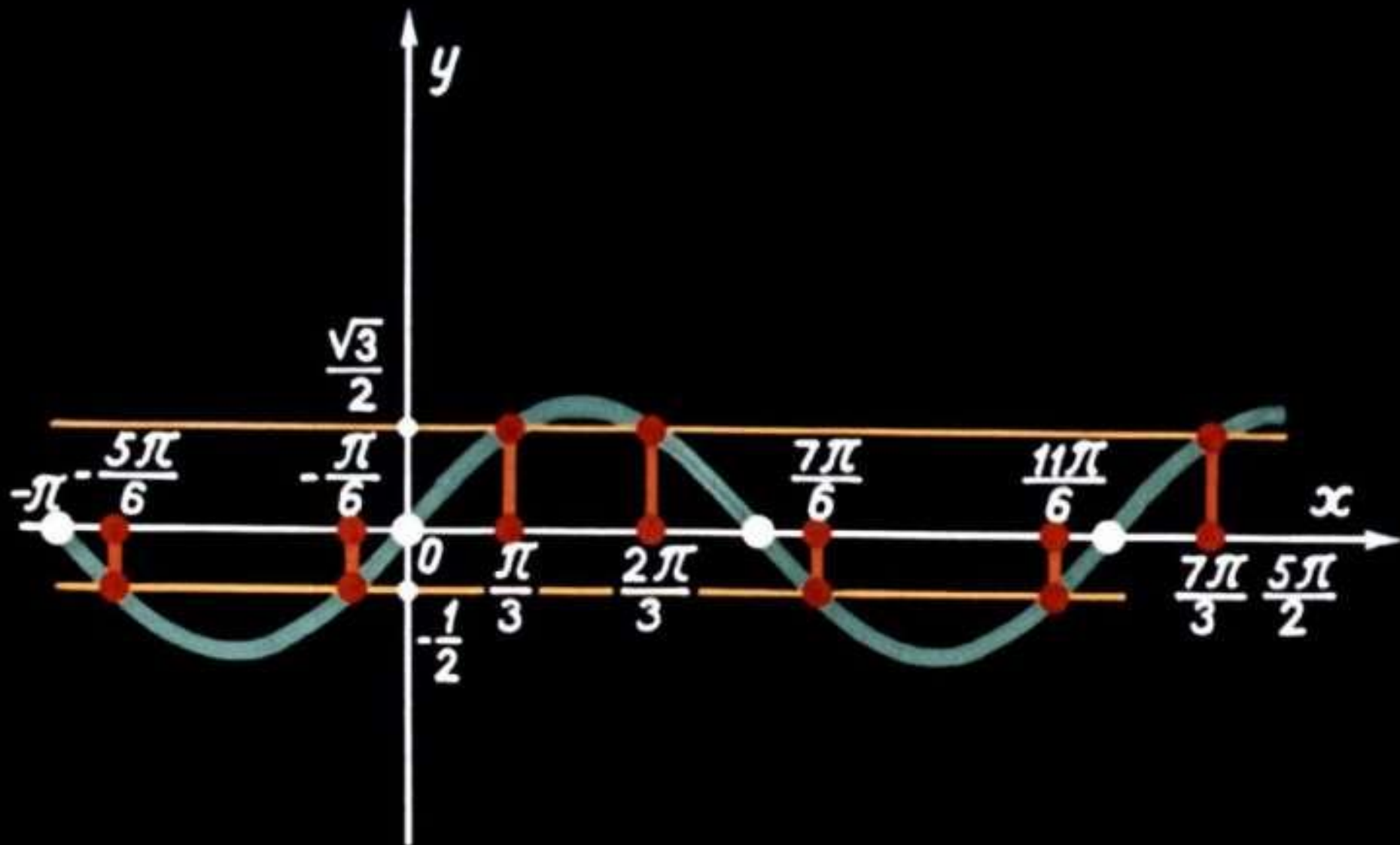
Функция $y = \sin x$ нечётная, так как её значения противоположны при противоположных значениях аргумента. График такой функции симметричен относительно начала координат.



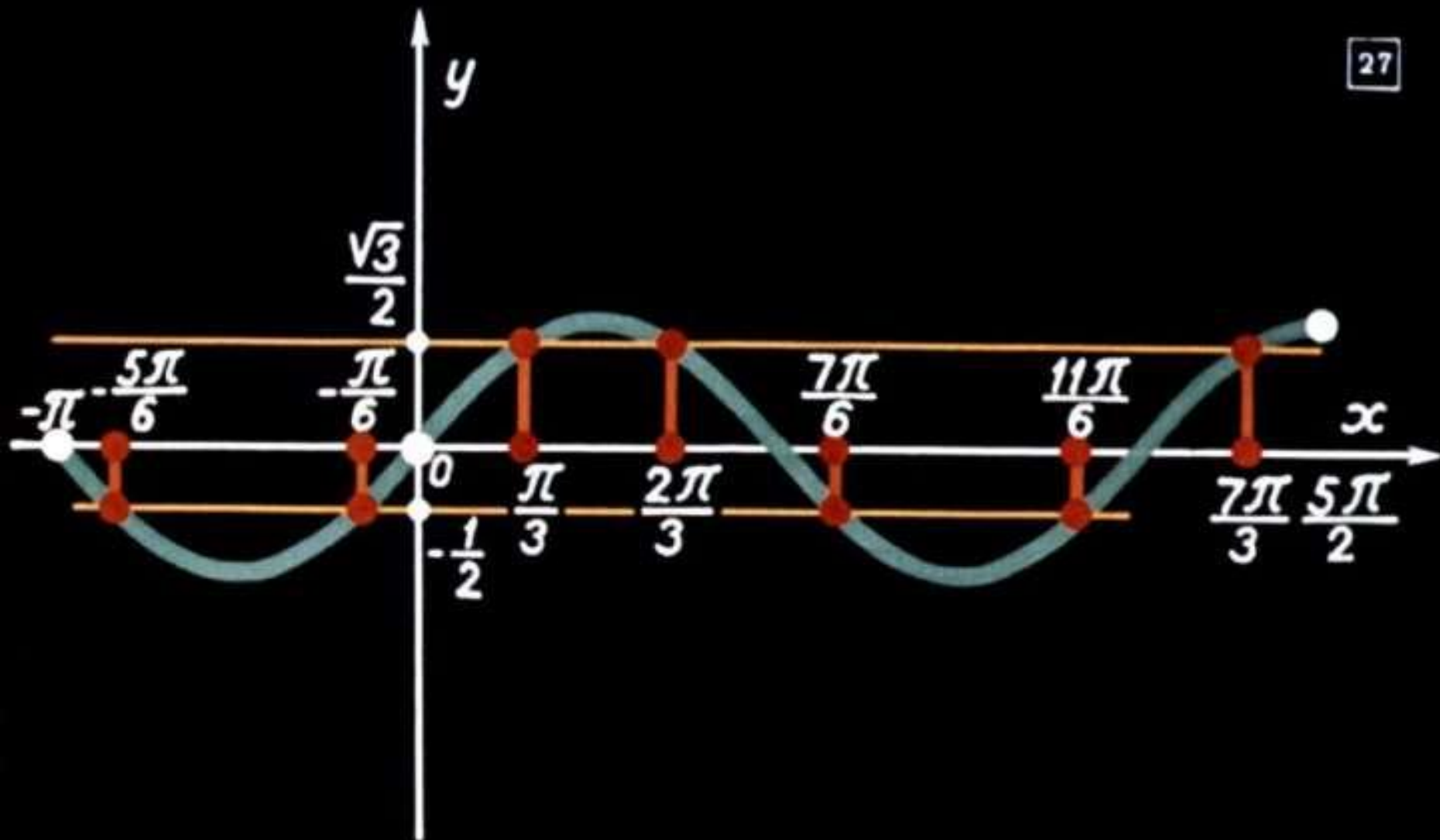
Чему равно значение $\sin 1$, $\sin(-7)$, $\sin(-1)$, $\sin 7$? Дайте объяснение.



Решим уравнение $\sin x = -1$. Для этого найдём абсциссы точек пересечения графиков функций $y = \sin x$ и $y = -1$. Абсциссы этих точек образуют последовательность с общим членом $\frac{\pi}{2}(4k-1)$, где k — целое число. Решите уравнение $\sin x = 1$.



Назовите для промежутка $(-\pi; \frac{5\pi}{2})$ решения уравнений: а) $\sin x = -\frac{1}{2}$, б) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



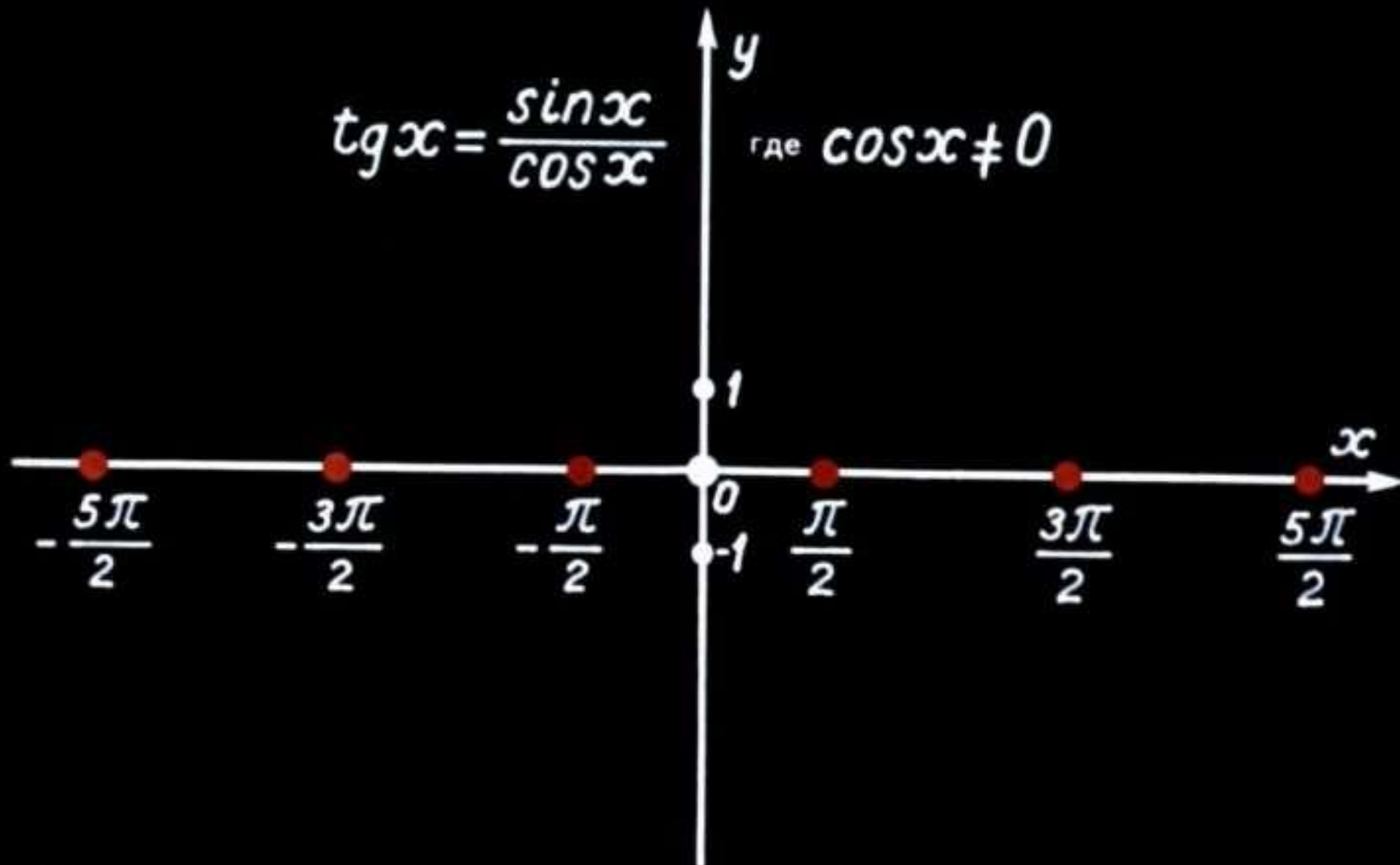
Назовите множество решений неравенства или системы неравенств для промежутка $(-\pi; \frac{5\pi}{2})$;
 а) $\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\sin x < \frac{1}{2}$; в) $-\frac{1}{2} < \sin x < 0$; г) $-\frac{1}{2} < \sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Функция

$$y = \operatorname{tg} x$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

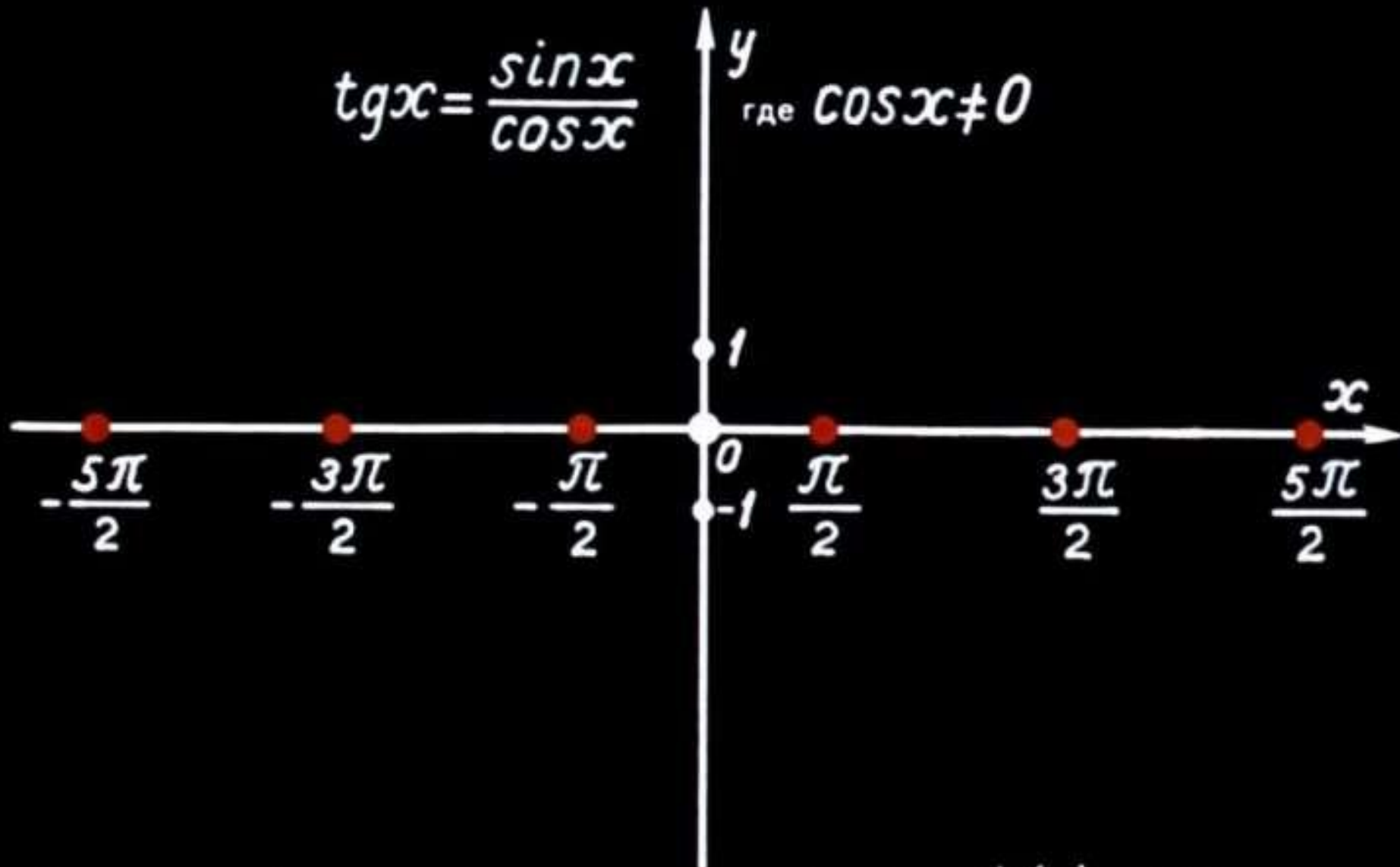
где $\cos x \neq 0$



Построим график функции $y = \operatorname{tg} x$. Функция $\operatorname{tg} x$ не определена при $x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, где k — целое число. Отметим эти точки на оси абсцисс.

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

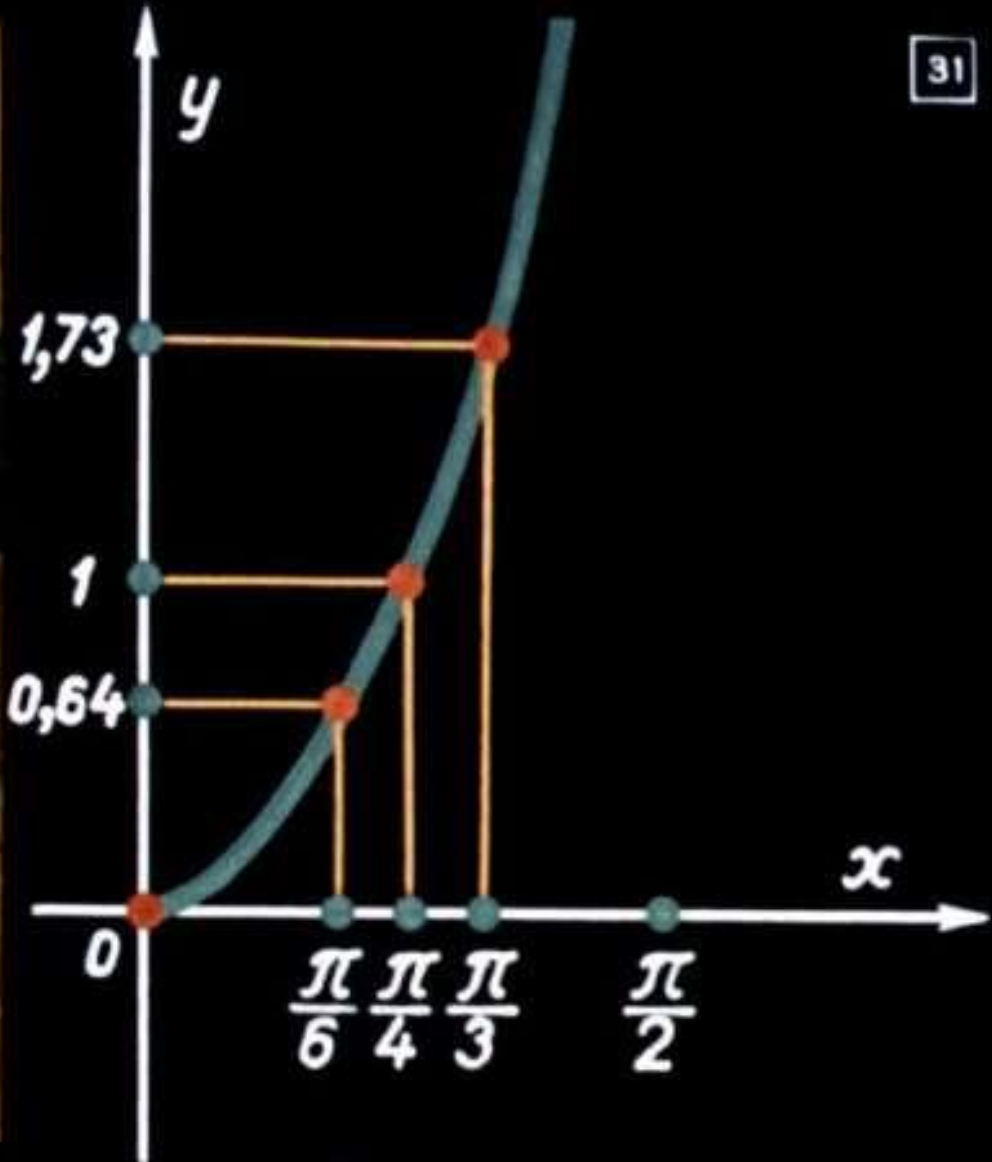
где $\cos x \neq 0$



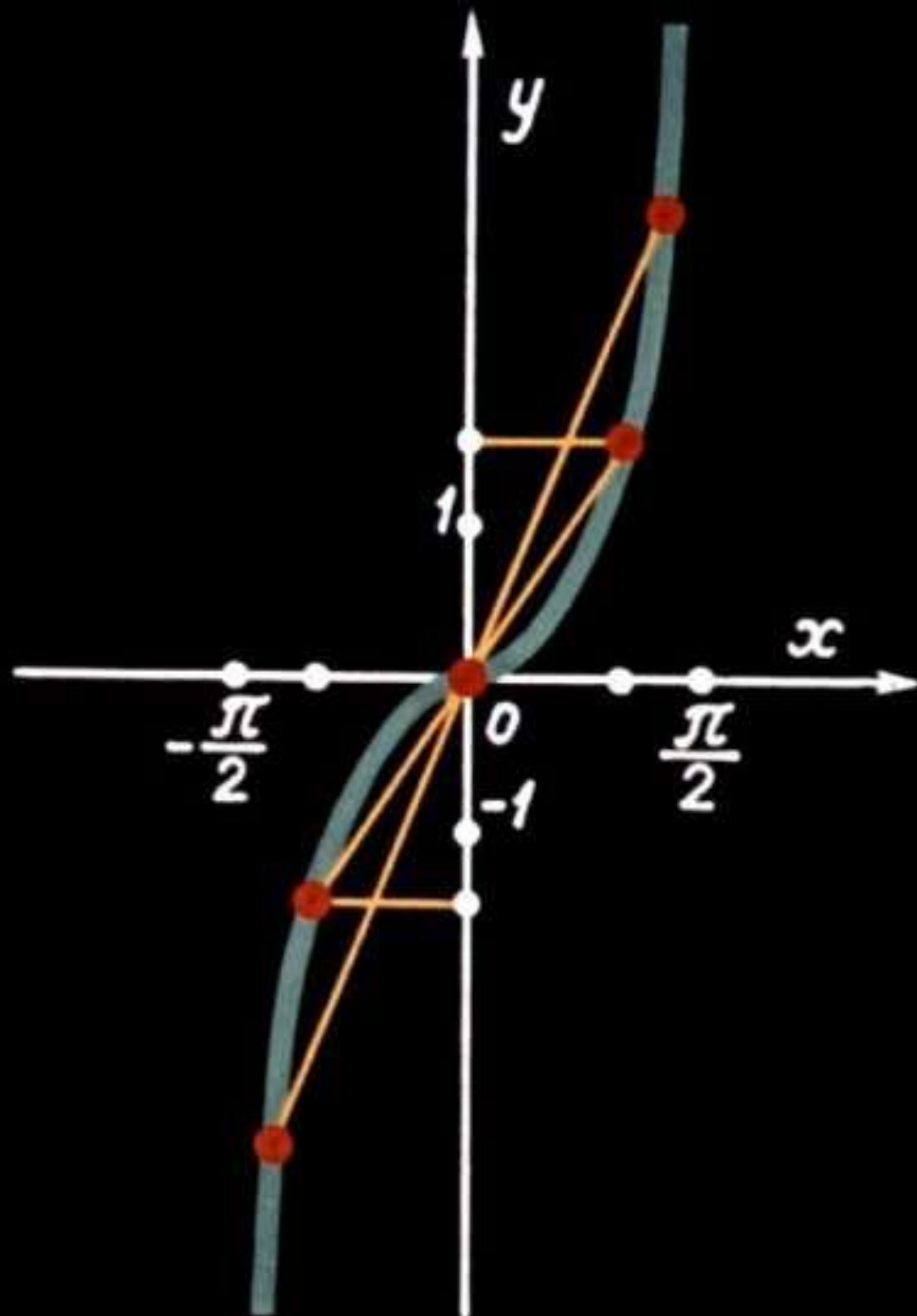
Функция $\operatorname{tg} x$ нечётная, так как $\operatorname{tg}(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x$.
Следовательно, её график симметричен относительно начала координат.

x	0	$\longrightarrow$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	возрастает	1
$\cos x$	1	убывает	0
$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$	0	возрастает	не существует

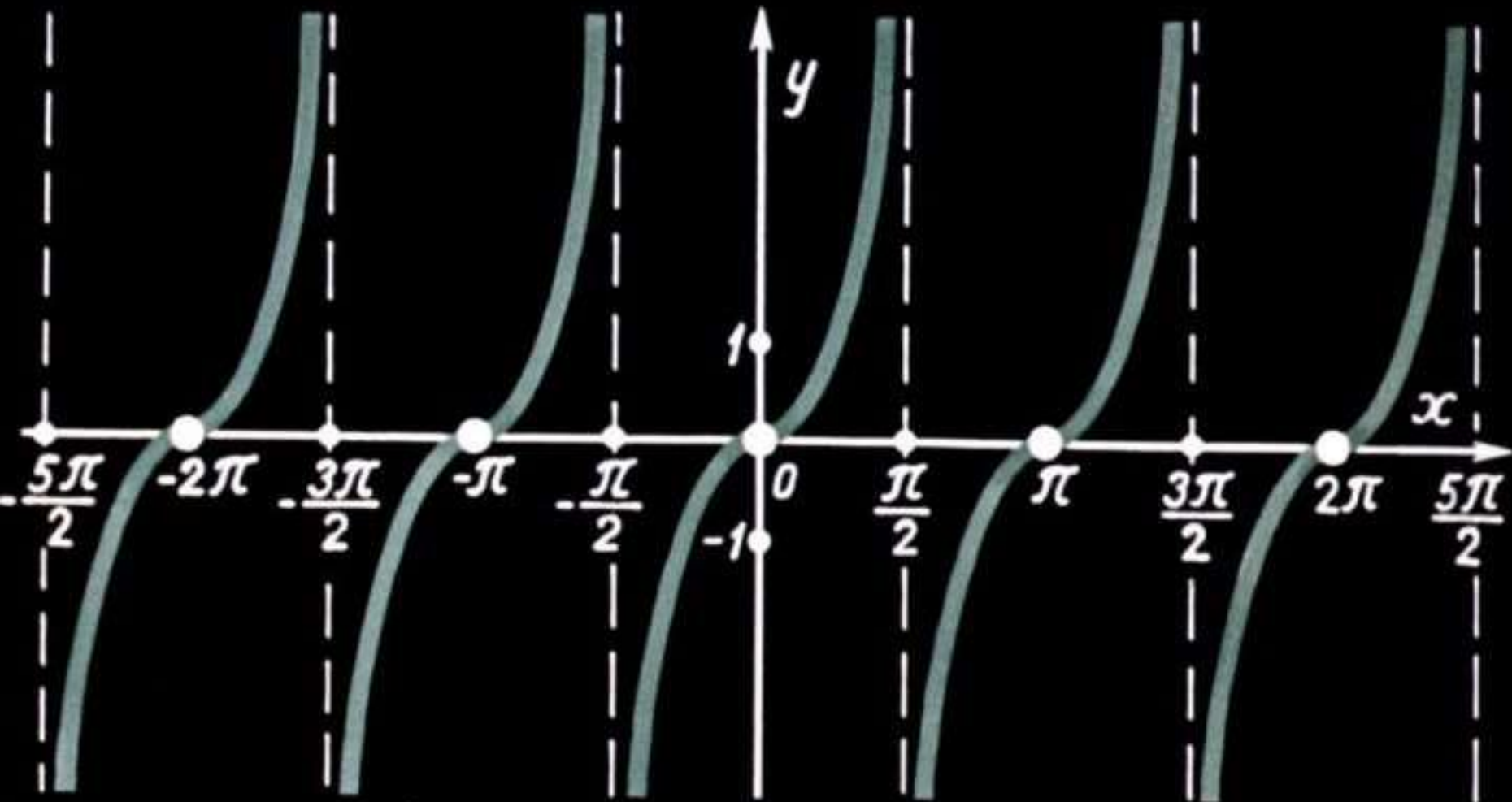
x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\sin x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$



В промежутке $(0, \frac{\pi}{2})$ функция $\operatorname{tg} x$ возрастает от 0 до бесконечности. Используя таблицу некоторых значений функции, строим график в этом промежутке.

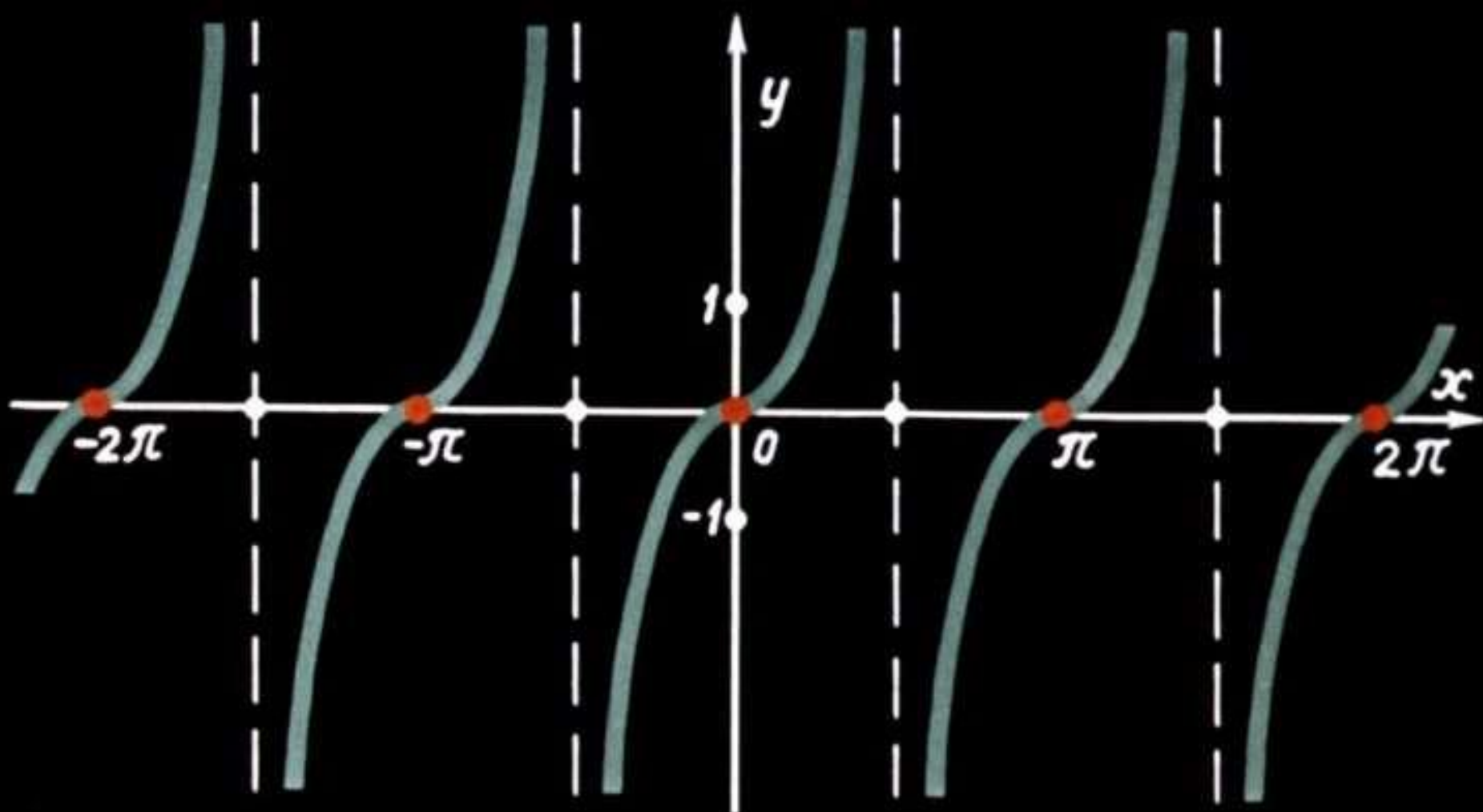


Используя свойство не-
чётной функции строим
график $y = \operatorname{tg} x$ в проме-
жутке $(-\frac{\pi}{2}, 0)$.

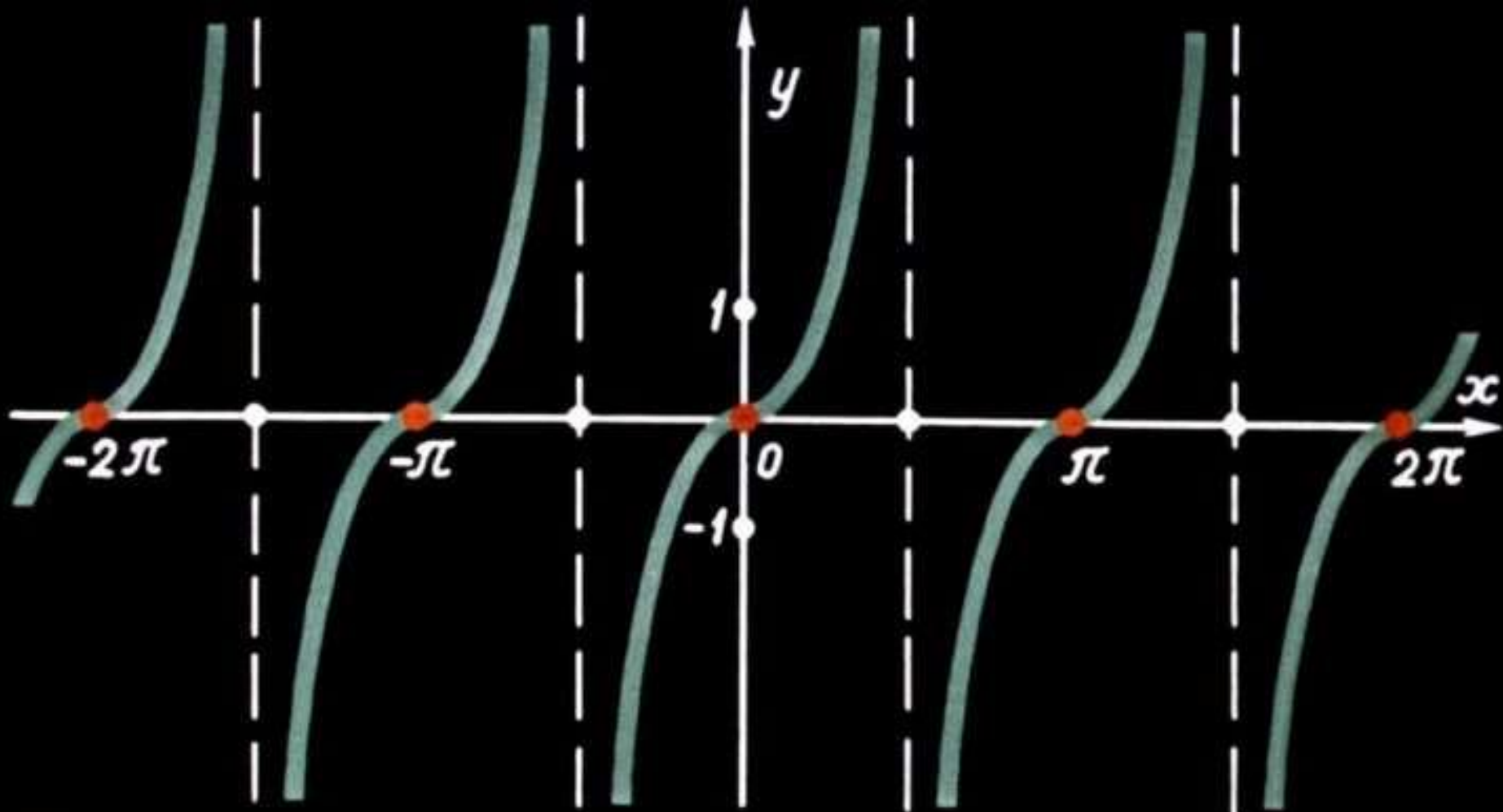


Функция $y = \operatorname{tg} x$ периодическая, с положительным периодом, равным π , так как $\operatorname{tg}(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \operatorname{tg} x$.

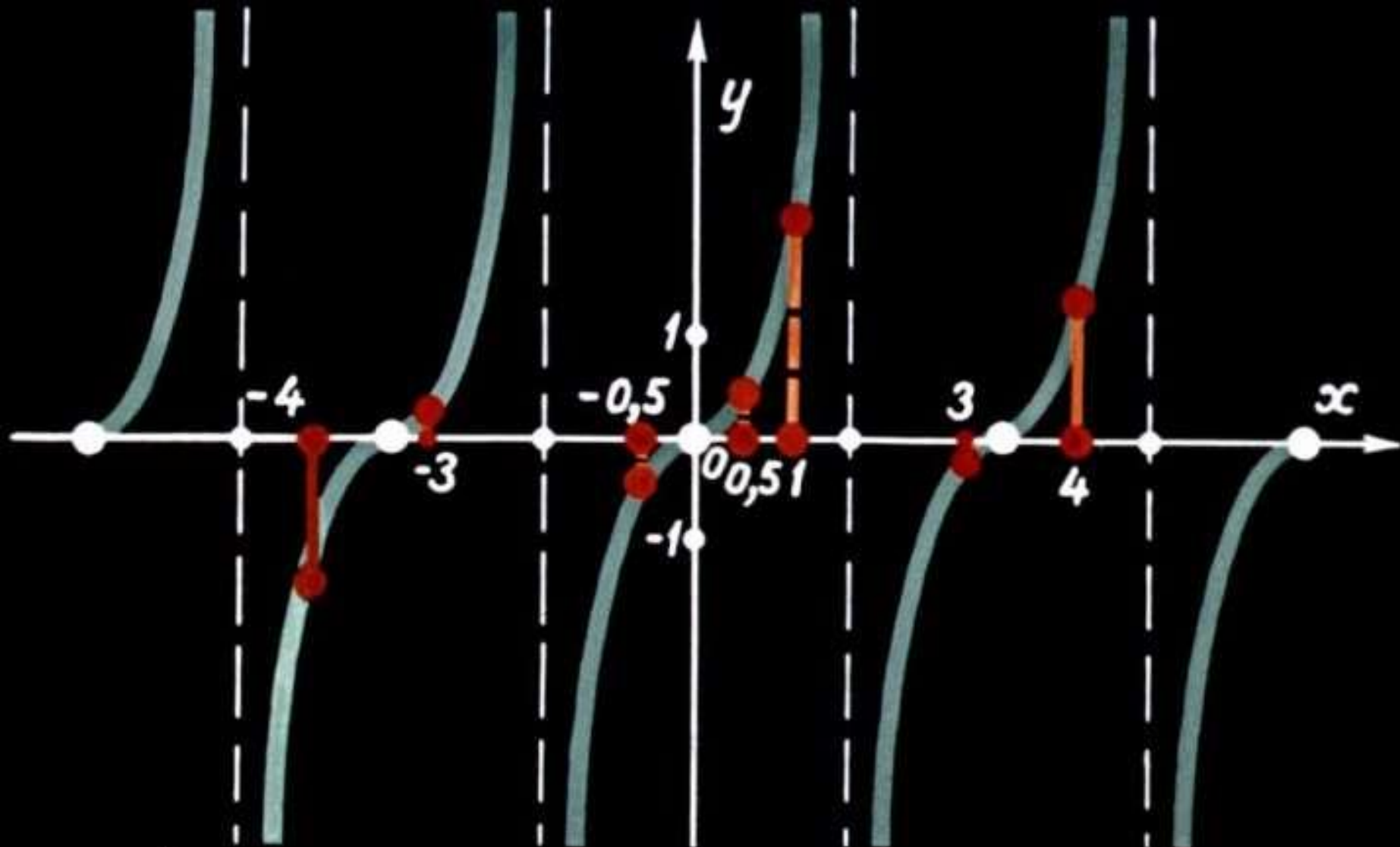
Учитывая это, мы можем построить график функции $y = \operatorname{tg} x$.



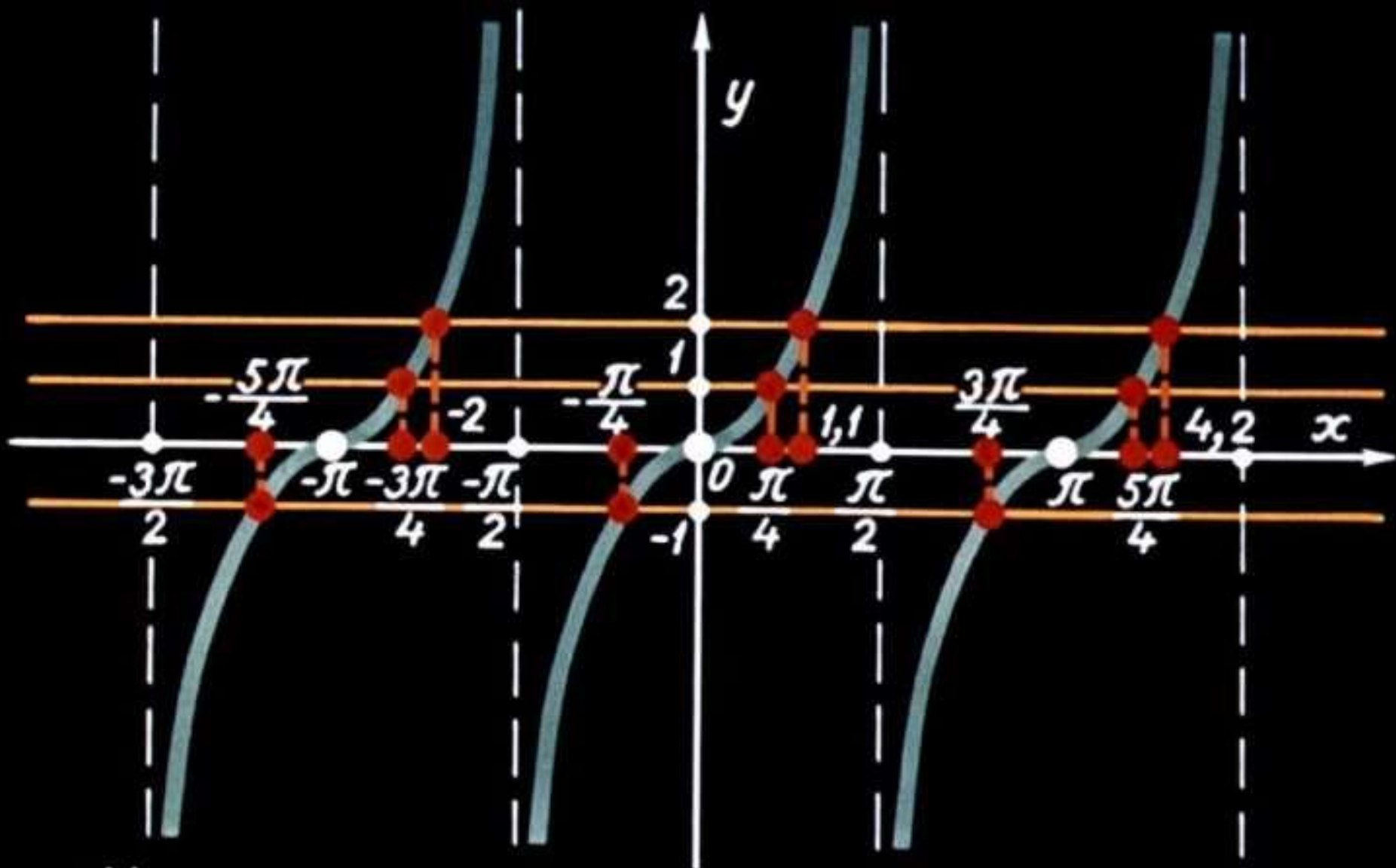
Рассматривая функцию $y = \operatorname{tg} x$ в интервале $(-2\pi, 3\pi)$, укажите, где она обращается в нуль, положительна, отрицательна. Решите в интервале $(-\infty, \infty)$ уравнение $\operatorname{tg} x = 0$ и неравенства $\operatorname{tg} x > 0$, $\operatorname{tg} x < 0$.



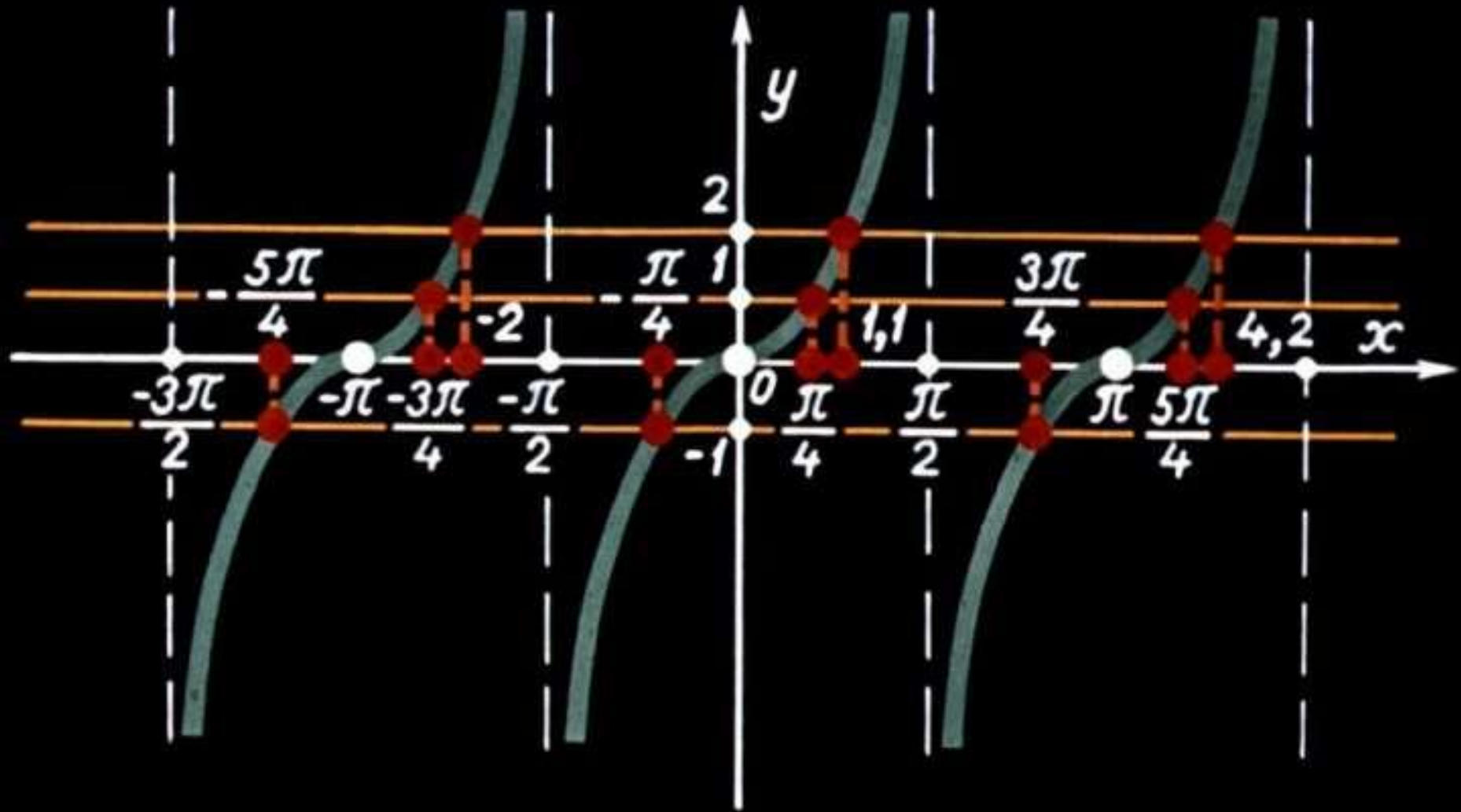
Рассматривая функцию $y = \operatorname{tg} x$ в интервале $(-2\pi; 3\pi)$, укажите промежутки её возрастания. Существуют ли промежутки убывания функции, точки, в которых функция принимает наибольшее или наименьшее значения?



Расположите в порядке возрастания числа:
 $\operatorname{tg}(-4), \operatorname{tg}(-3), \operatorname{tg}(-0.5), \operatorname{tg}0, \operatorname{tg}0.5, \operatorname{tg}1, \operatorname{tg}3, \operatorname{tg}4$.



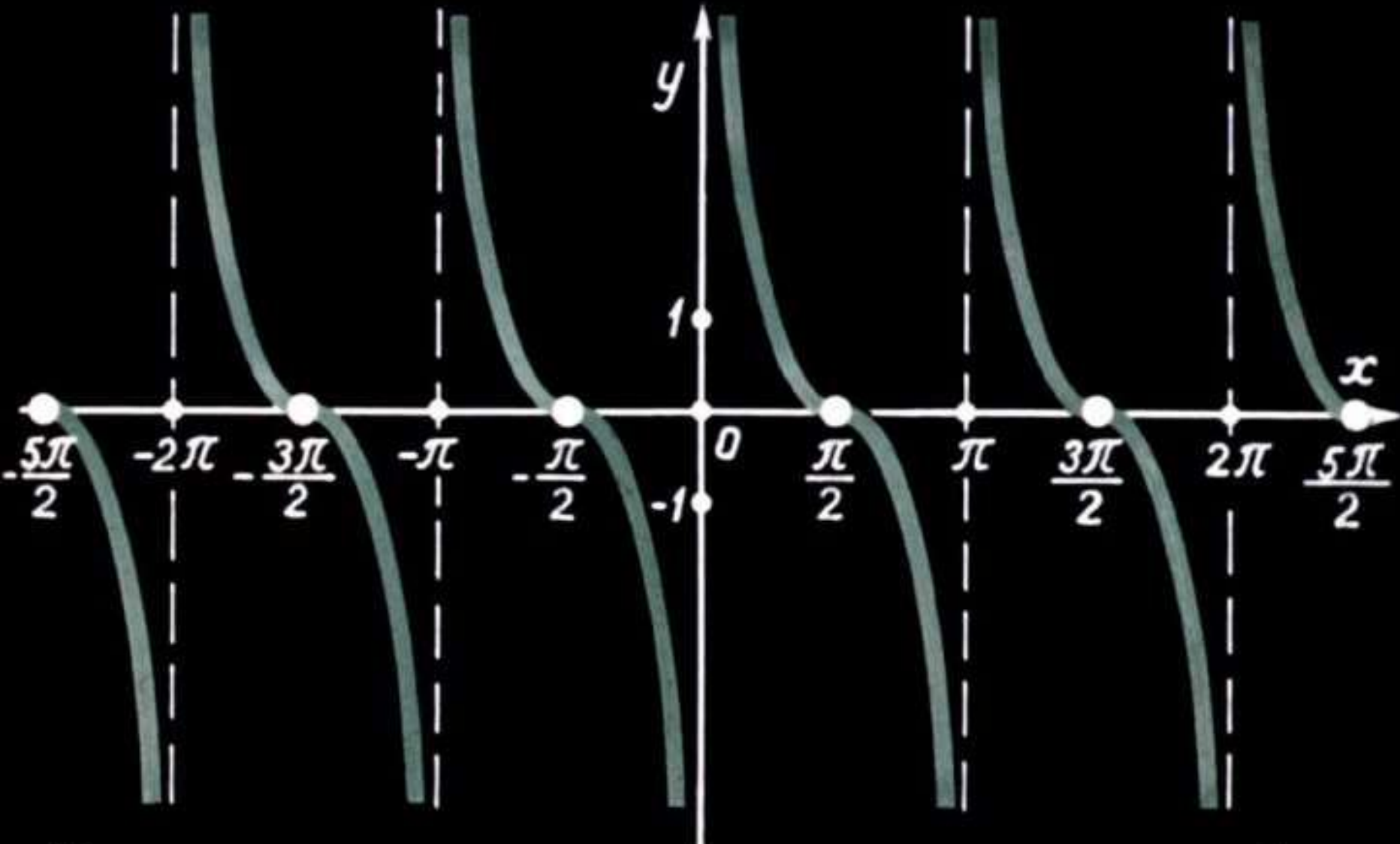
Назовите решения уравнений для промежутка $(-\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2})$, $\operatorname{tg} x = 1$, $\operatorname{tg} x = -1$, $\operatorname{tg} x = 2$.



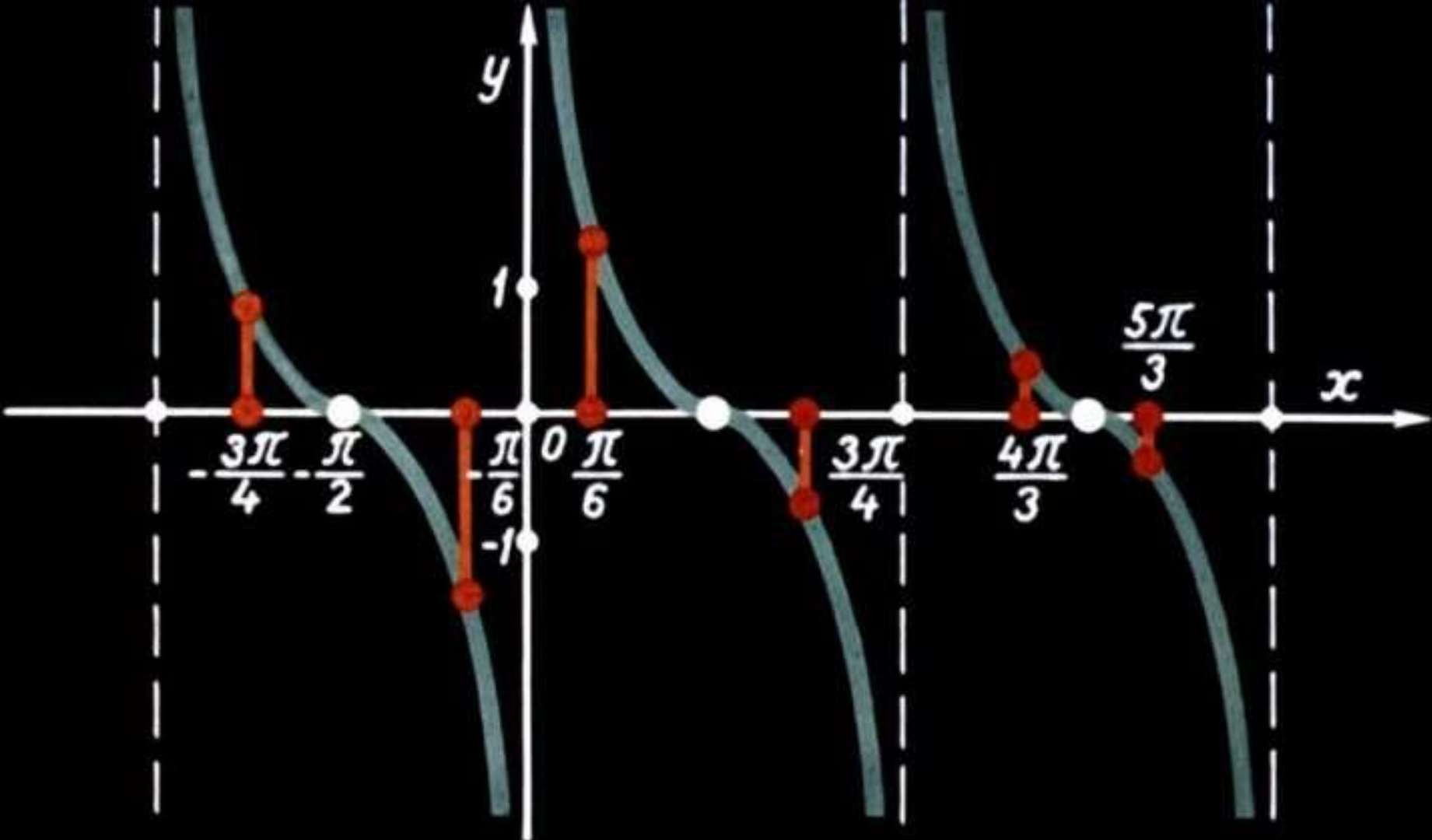
Назовите множество решений неравенства или системы неравенств для промежутка $(-\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2})$:

а) $\text{tg} x > 1$; б) $\text{tg} x < 1$; в) $\text{tg} x < -1$; г) $-1 < \text{tg} x < 0$; д) $0 < \text{tg} x < 2$; е) $-1 < \text{tg} x < 1$.

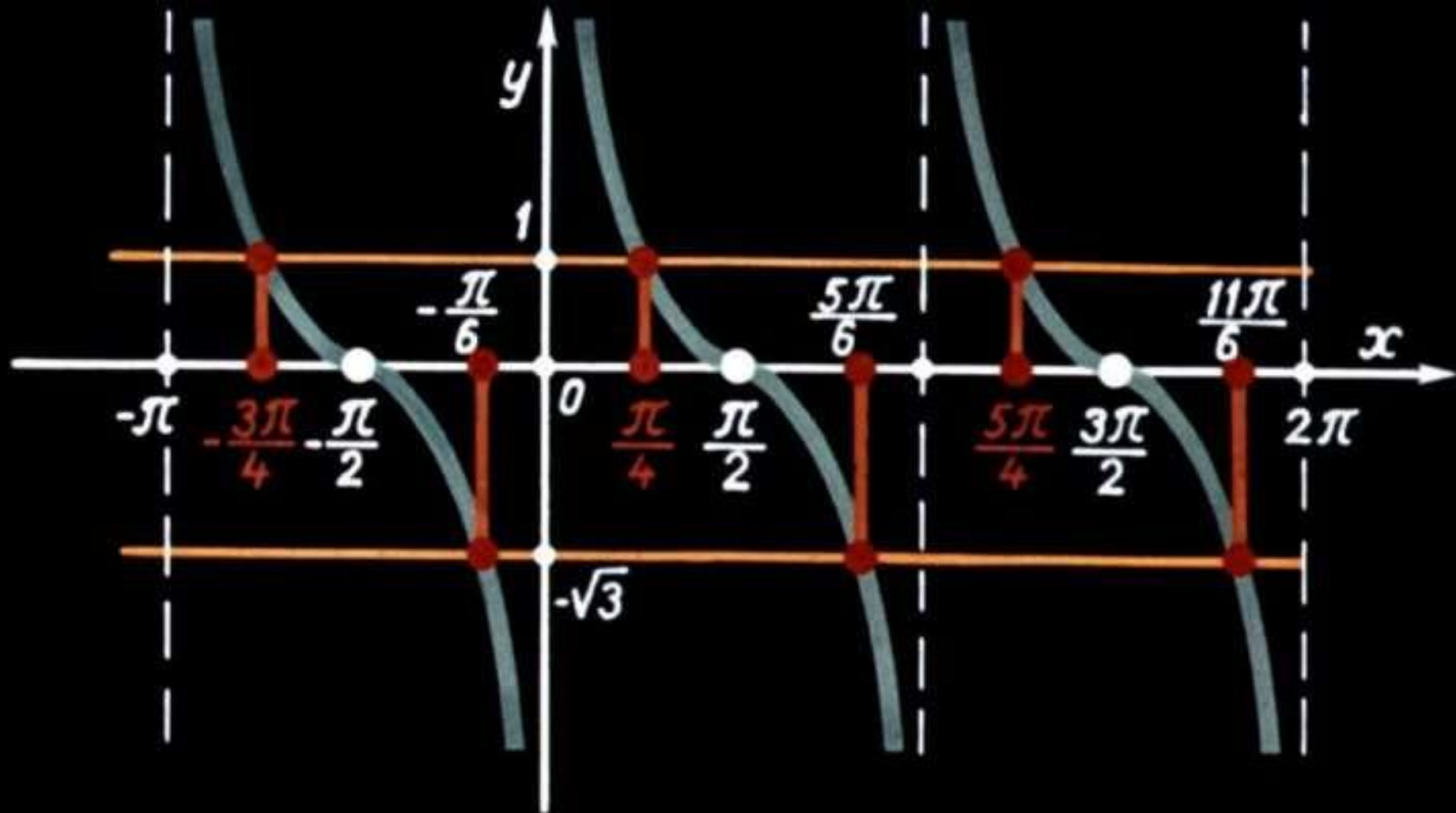
Для построения графика функции $y = \operatorname{ctg} x$ поступим так же, как и при построении графика $y = \operatorname{tg} x$. Так как $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$, то функция $\operatorname{ctg} x$ не определена при $x = k\pi$. В промежутке $(0, \pi)$ функция убывает, кроме того, она нечётная и периодическая (с наименьшим положительным периодом π).



Укажите значения x , при которых функция $y = \operatorname{ctg} x$ обращается в нуль. В каких промежутках она положительна, в каких отрицательна?



Расположите в порядке возрастания числа:
 $\text{ctg}(-\frac{3\pi}{4})$, $\text{ctg}(-\frac{\pi}{2})$, $\text{ctg}(-\frac{\pi}{6})$, $\text{ctg}\frac{\pi}{6}$, $\text{ctg}\frac{3\pi}{4}$, $\text{ctg}\frac{4\pi}{3}$, $\text{ctg}\frac{5\pi}{3}$.



Назовите множество решений уравнения, неравенства или системы неравенств для промежутка $(-\pi; 2\pi)$; а) $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$; б) $\operatorname{ctg} x = 1$; в) $\operatorname{ctg} x > 1$; г) $\operatorname{ctg} x < -\sqrt{3}$; д) $-\sqrt{3} < \operatorname{ctg} x < 0$; е) $0 < \operatorname{ctg} x < 1$.