

Ряды Фурье

Лекции 15, 16

Определение ортогональной системы функций

Тригонометрическая система функций $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$ называется ортогональной на отрезке $[-\pi, \pi]$ и на всяком отрезке длины 2π тоже в том смысле, что интеграл по этому отрезку от произведения любых двух различных функций этой системы равен нулю, а от одинаковых $-\pi$.

Примеры

Рассмотрим несколько примеров таких интегралов.

$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0$ в силу нечетности подынтегральной функции.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin mx dx = \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(k-m)x - \cos(k+m)x) dx = 0$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2nx) dx = \pi$$

Определение ряда Фурье

Тригонометрический ряд

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

коэффициенты которого вычислены по формулам Фурье, т. е.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx,$$

называется рядом Фурье периодической с периодом 2π функции.

Определение кусочно-монотонной функции

Функция $f(x)$ называется кусочно-монотонной на отрезке $[a,b]$, если этот отрезок можно разбить конечным числом точек на интервалы, в каждом из которых функция монотонна.

Примеры кусочно-монотонных функций: 1) $y = x^2, x \in [-1,1]$, 2) $\sin x$, 3) $\cos x$.

Достаточный признак сходимости ряда Фурье

Если периодическая с периодом 2π функция
1) кусочно-монотонна, 2) непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$ или имеет на нем конечное число точек разрыва 1-го рода, то ряд Фурье этой функции сходится во всех точках этого отрезка. Сумма полученного ряда $S(x)$ равна значению функции $f(x)$ в точках непрерывности функции, а в точках ее разрыва сумма ряда равна полусумме левостороннего и правостороннего пределов функции, т.е., если $x = c$ — точка разрыва, то

$$S(x) \Big|_{x=c} = \frac{f(c-0) + f(c+0)}{2}.$$

Разложение в ряды Фурье четных функций

Если $f(x)$ – четная функция, то функции $f(x)\sin nx$ являются нечетными, а функции $f(x)\cos nx$ – четными при любых $n=1,2,\dots$. Тогда в силу свойства определенного интеграла :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0 \quad , \text{ если } f(x) \text{ – нечетна, и}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 2 \int_0^{\pi} f(x)dx, \text{ если } f(x) \text{ – четна}$$

Продолжение

получим $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx$

$$b_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = 0$$

Тогда имеем: $S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$,

где

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

для четной функции.

Ряд Фурье нечетной функции

Если функция $f(x)$ является нечетной и периодической с периодом 2π , то ее ряд Фурье имеет вид:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \quad ,$$

где коэффициенты

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

Ряд Фурье периодической с периодом $2l$ функции

Если функция $f(x)$ имеет период $2l$, где l — любое число, большее нуля, то ее ряд Фурье можно получить из ряда Фурье периодической с периодом 2π функции, положив $x = \frac{lt}{\pi}$. Тогда функция $f(x) = f(\frac{lt}{\pi}) = \varphi(t)$ имеет период 2π . В самом деле:

$$f\left(\frac{l(t \pm 2\pi)}{\pi}\right) = f\left(\frac{lt}{\pi} \pm 2l\right) = f\left(\frac{lt}{\pi}\right) = \varphi(t)$$

Продолжение

Разложим в ряд Функцию $\varphi(t)$, а затем вернемся к старой переменной. Имеем

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad , \text{ где}$$

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx \quad ,$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad ,$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

Ряд Фурье четной функции

Аналогично тому, как получается ряд Фурье периодической с периодом 2π функции, можно получить ряд функции с периодом $2l$. Тогда имеем следующие формулы: $S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}$, где

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx, a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx$$

Ряд Фурье нечетной функции

Если функция является нечетной, то ее ряд Фурье является рядом по синусам и его можно записать в следующем виде:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \text{ где}$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

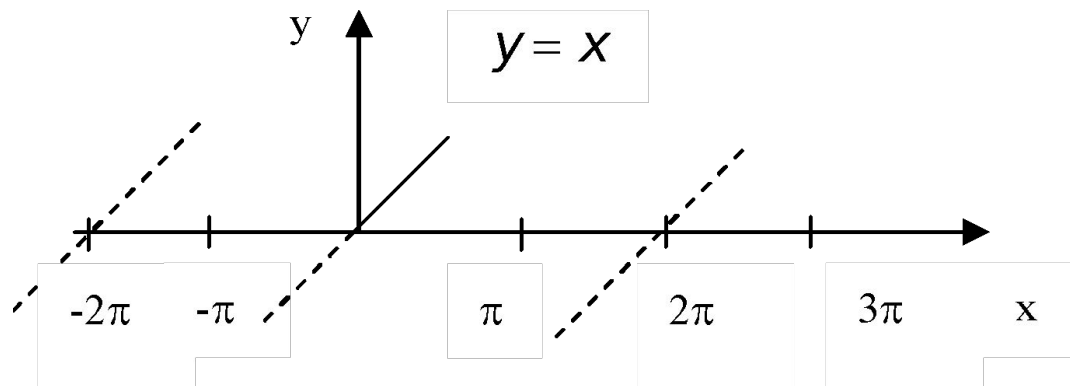
Разложение в ряд Фурье непериодических функций

Если функция не является периодической, то эту функцию доопределяют до периодической. Затем получившуюся периодическую функцию раскладывают в ряд Фурье, который будет сходиться к функции $f(x)$ на промежутке, где задана эта функция, если, конечно, она удовлетворяет условиям достаточного признака сходимости ряда Фурье. При этом доопределить функцию до периодической можно различными способами. В частности, ее можно доопределить как четную или как нечетную.

Как это можно сделать, рассмотрим на конкретном примере.

Пример разложения функции в ряд Фурье

1). Разложить функцию $y=x$ в ряд Фурье а) по синусам и б) по косинусам. Доопределим функцию до периодической нечетным образом.



Решение

$$\text{Тогда } S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \text{ где } b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx$$

Вычислим интеграл по частям:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx = \left[\begin{array}{l} u = x, du = dx \\ dv = \sin nx dx, v = -\frac{\cos nx}{n} \end{array} \right] = \\ &= \frac{2}{\pi} \left(-x \frac{\cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nx dx \right) = \\ &= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\pi}{n} \cos n\pi + \frac{1}{n^2} \sin nx \Big|_0^{\pi} \right) = -\frac{2}{n} \cos n\pi \end{aligned}$$

Продолжение

Таким образом, $b_n = -\frac{2}{n} \cos n\pi$, а

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{n} \cos n\pi \cdot \sin nx, \text{ где } x \in (0, \pi) \text{ или}$$

л
и

$$S(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}$$

Продолжение

Доопределим теперь $f(x)$ до периодической функции четным образом. Тогда $S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$.

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi} \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{2} = \pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \left[\begin{array}{l} u = x, du = dx \\ \cos nx dx = dv, v = \frac{\sin nx}{n} \end{array} \right] =$$

Продолжение

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{x \sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin nx dx \right) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{n^2} \cos nx \Big|_0^{\pi} = \\ &= \frac{2}{\pi n^2} (\cos n\pi - \cos 0) = \frac{2}{\pi n^2} (\cos n\pi - 1) = \frac{2}{\pi n^2} ((-1)^n - 1) \end{aligned}$$

При четном n выражение в скобках равно нулю и, значит, $a_n = 0$, а при — нечетном, т.е. при $n = 2m+1$

$a_{2m+1} = \frac{-4}{\pi(2m+1)^2}$. Тогда $S(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos(2m+1)x}{(2m+1)^2}$
Мы получили разложение функции в ряд Фурье на промежутке $(0, \pi)$.