

Задания типа C5



8. Найти все значения a , при каждом из которых уравнение $1 = |x - 3| - |2x + a|$ имеет единственное решение.

Решение:

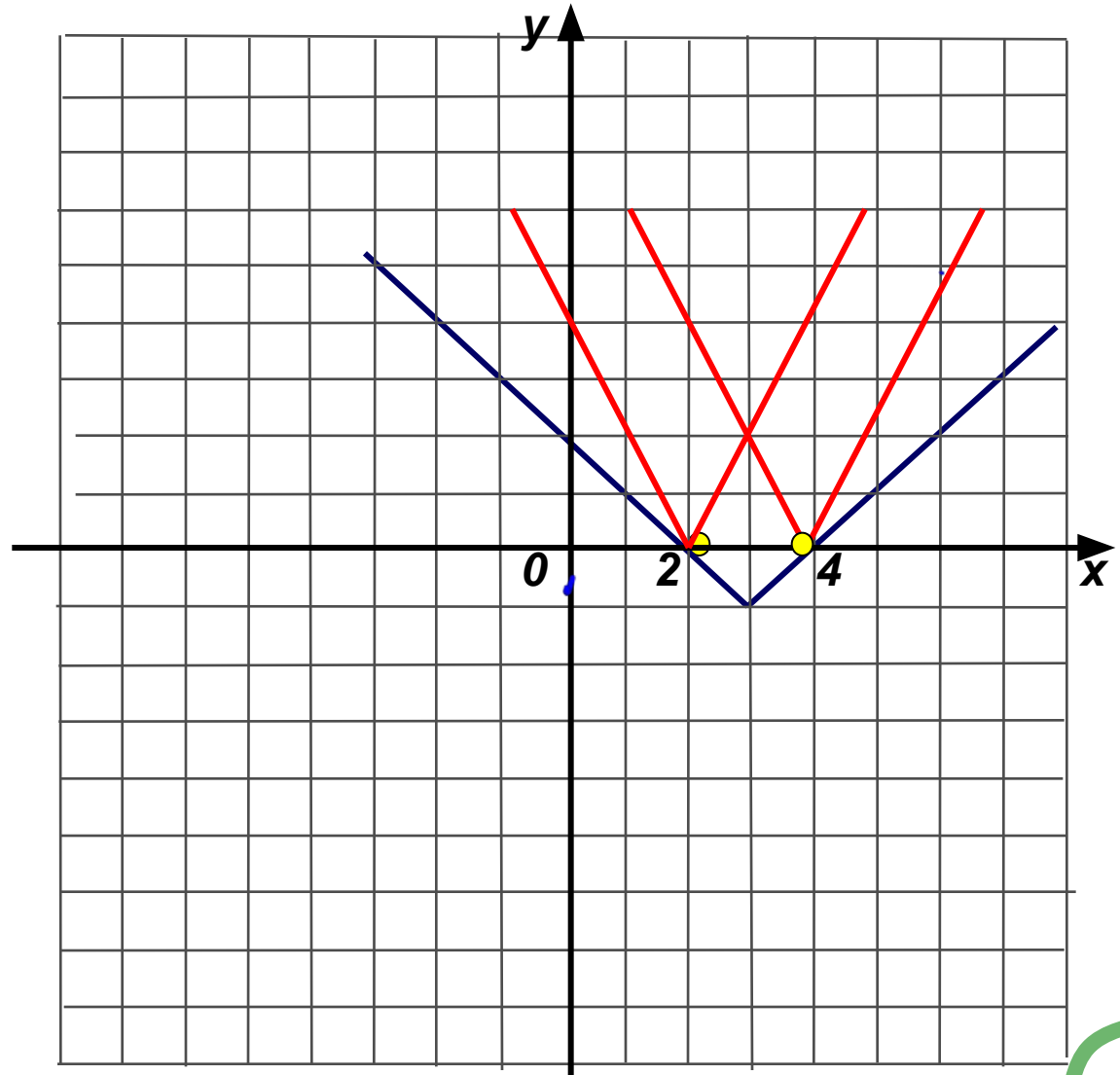
Перепишем уравнение:

$$|2x + a| = |x - 3| - 1.$$

Построим графики функций:

$$y = |x - 3| - 1 \text{ и}$$

$$y = |2x + a|.$$



Очевидно, что данное уравнение будет иметь единственное решение, если вершина движущегося «уголка» попадет в точку с координатами **(2; 0)** или **(4; 0)**. Следовательно, координаты этих точек удовлетворяют уравнению **$y = |2x + a|$** . Значит,

$$0 = |4 + a| \quad \text{или} \quad 0 = |8 + a|$$

$$a = -4$$

$$a = -8.$$

Ответ: **- 8 или - 4.**



ПАМЯТКА

Пользоваться определением

$$|x| =$$

$$\begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0 \\ -x, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

модуля

А так

$$|x| < a$$

$$-a < x < a$$

$$|x| > a$$

$$x < -a \text{ и } x > a$$

же

Знать и строить: уравнение, линию, алгоритм

построения:

$$y = kx + b -$$

пряма

надо иметь, хотя бы, 2 точки

$$y = ax^2 + c -$$

я

парабол

*направление ветвления с

квадратная,

* $x_0 = -b/2a$ - абсцисса вершины - ось

$$x^2 + y^2 = R^2 -$$

симметрия полный

квадрат Центр (0;0), R -

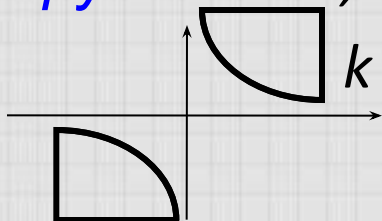
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 - \text{окружность, Центр } (a; b), R -$$

радиус

$$y = \frac{k}{x} -$$

гипербола

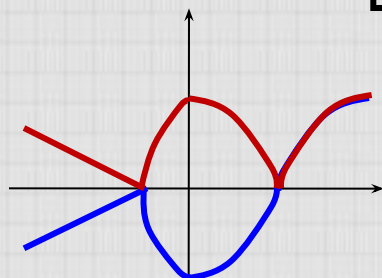
радиус



$$y = f(x)$$

графи

к



$$y = |f(x)|$$

графи

к

линии выше

точки оси

линии ниже

OX в верхнюю но

полуплоскость

оставляе

м симметрич

Преобразование графика
ия

Контрольный
вопрос

$$y = |kf(m_x + c) + b|$$

$$y = |kf(m(x + a)) + b|$$

Как построить график

$$1. y = f(x)$$

исходная
по
точкам

$$2. y = f(mx)$$

$m = 1/3$
растянуть в 3
раза
вдоль оси OX

$$3. y = f(m(x + a))$$

$a = -2$
сдвинуть на 2
вправо

$$4. y = kf(m(x + a))$$

$k = 2$
растянуть в 2
раза
вдоль оси OY

$$5. y = kf(m(x + a)) + b$$

$b = -2$
сдвинуть на 2
вниз

$$6. y = kf(m(|x| + a)) + b$$

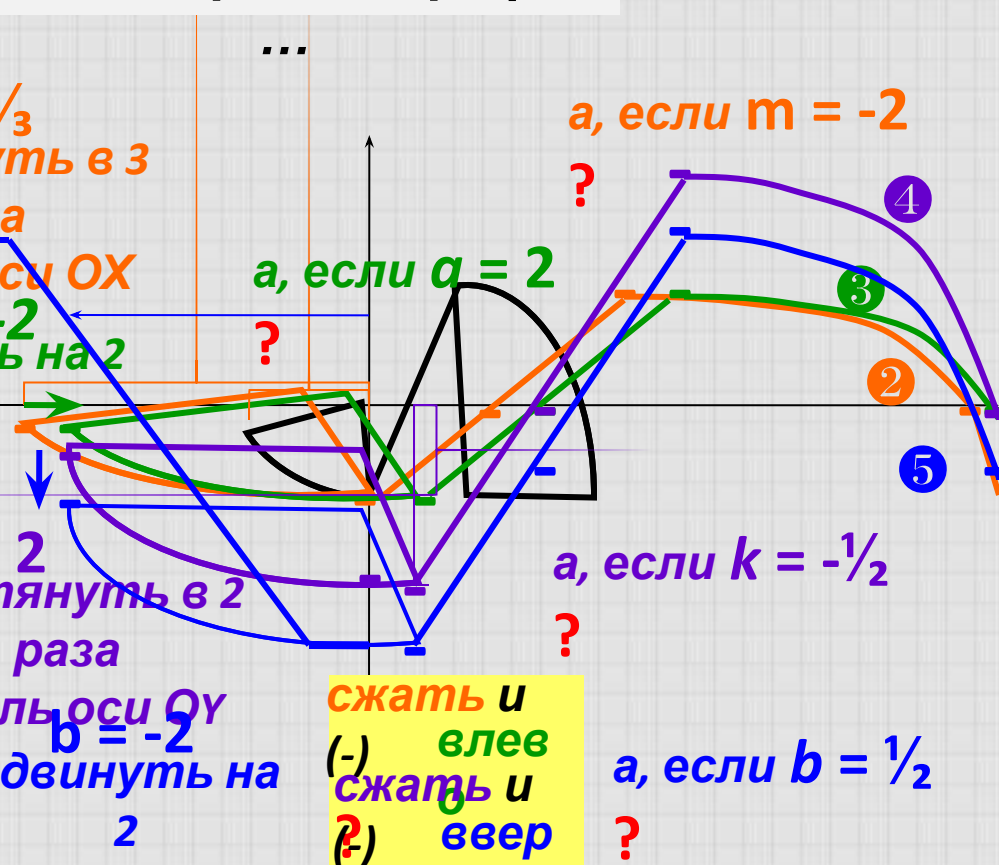
линия при $x \geq 0$

симметричная

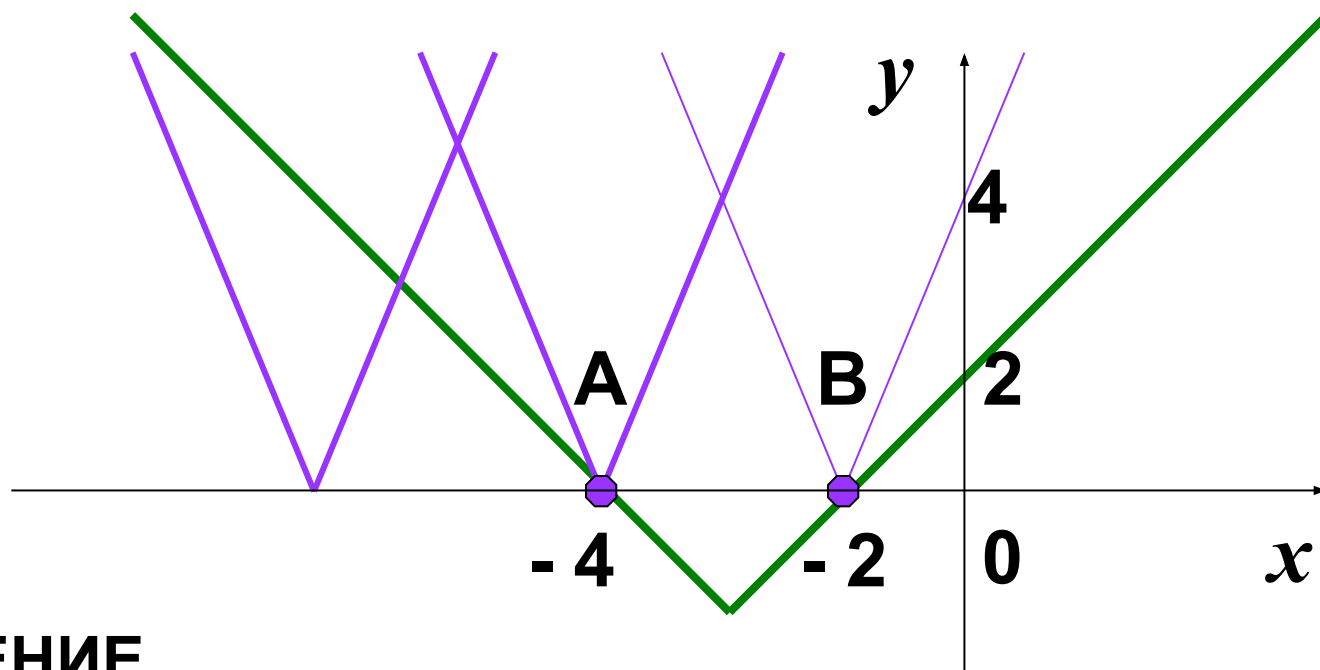
ей

при $x \leq 0$

относительно оси
OY



9 Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $|2x - a| = |x + 3| - 1$ имеет единственное решение.



РЕШЕНИЕ.

Правая часть этого уравнения задает неподвижный «уголок», левая – «уголок», вершина которого движается по оси абсцисс.

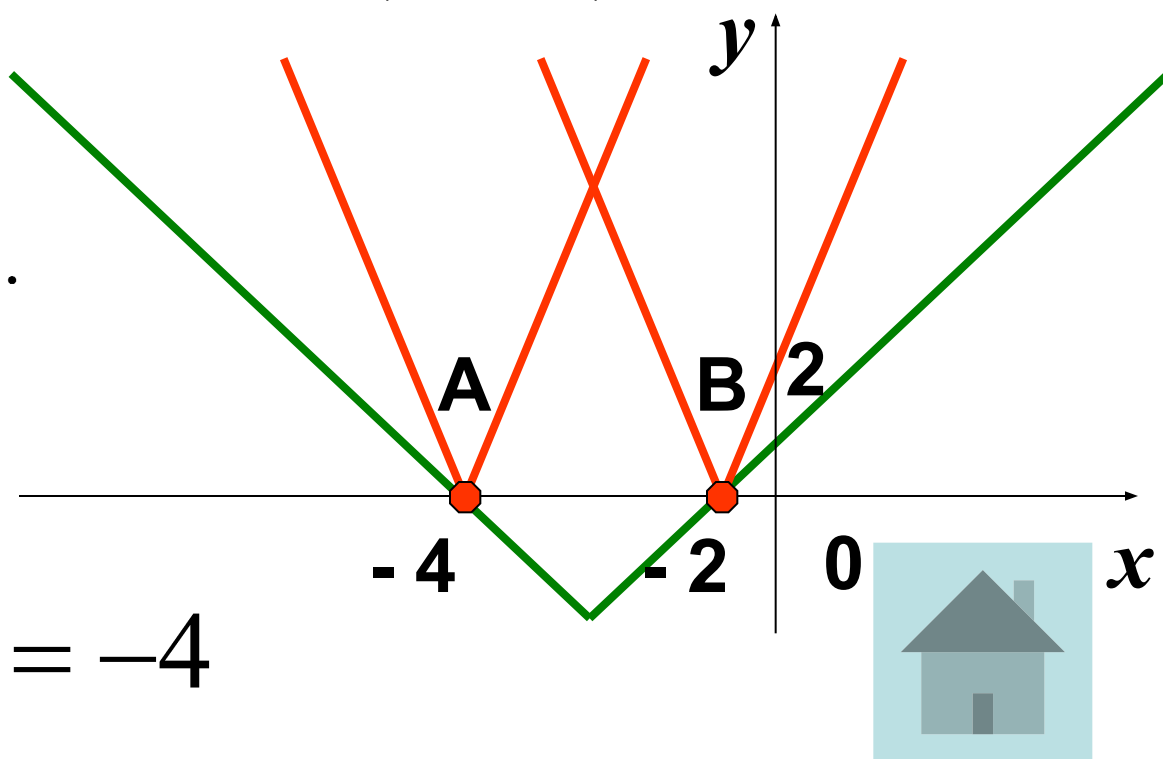


Очевидно, что данное уравнение будет иметь единственное решение, если вершина движущегося «уголка» попадет в точку А, или точку В. Имеем,

$$|x + 3| - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -4, \quad x = -2,$$

тогда $A(-4; 0)$, $B(-2; 0)$ и координаты этих точек удовлетворяют уравнению $y = |2x - a|$.

$$\begin{cases} |-8 - a| = 0 \\ |-4 - a| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -8 \\ a = -4 \end{cases}.$$



Ответ: $a = -8, \quad a = -4$

Задача 2. Найдите все значения a , при каждом из которых функция $f(x) = x^2 - 2|x - a^2| - 8x$ имеет более двух точек экстремума.

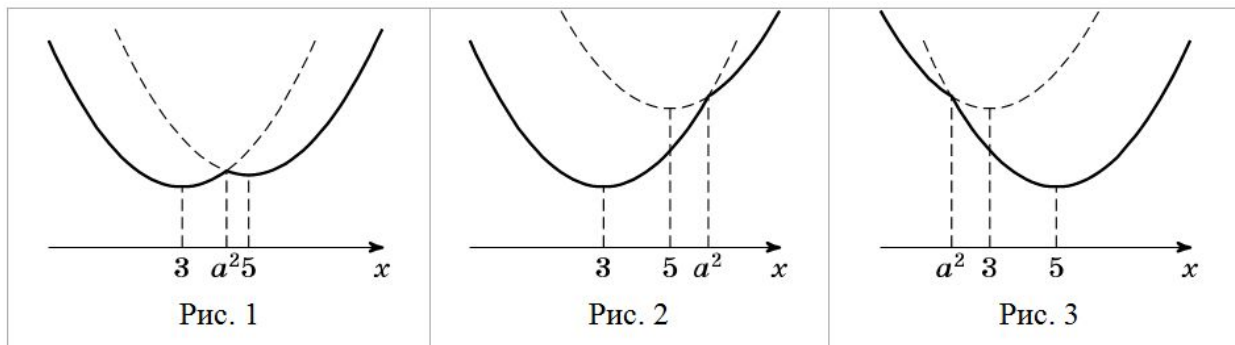
Решение.

1. Функция f имеет вид:

а) при $x \geq a^2 : f(x) = x^2 - 10x + 2a^2$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x=5$;

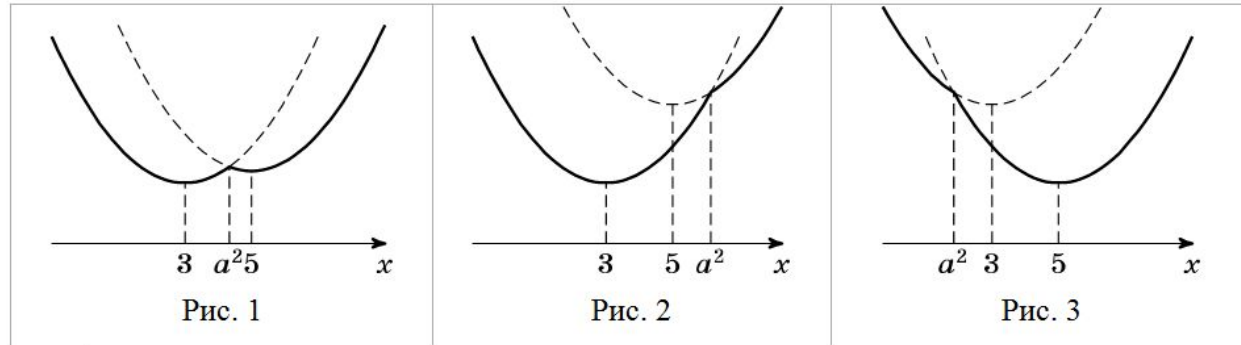
б) при $x \leq a^2 : f(x) = x^2 - 6x - 2a^2$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x=3$.

Все возможные виды графика функции $f(x)$ показаны на рисунках:



Задача 2. Найдите все значения a , при каждом из которых функция

$f(x) = x^2 - 2|x - a^2| - 8x$ имеет более двух точек экстремума.



2) График обеих квадратичных функций проходят через точку $(a^2; f(a^2))$.

3) Функция $y = f(x)$ имеет более двух точек экстремума, а именно – три, в единственном случае (рис. 1):

$$3 < a^2 < 5 \Leftrightarrow \sqrt{3} < |a| < \sqrt{5}.$$

Ответ: $-\sqrt{5} < a < -\sqrt{3}; \quad \sqrt{3} < a < \sqrt{5}.$



С5. Найдите все положительные значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (|x| - 9)^2 + (y - 5)^2 = 9, \\ (x + 3)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

По определению модуля:

$$|x| - 9 = \begin{cases} x - 9, & \text{если } x \geq 0 \\ -x - 9, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

Замети x^2 $(-x)^2 = (-1 \cdot x)^2 = \underline{(-1)^2} \cdot x^2 = x^2$

М:

$$\underline{(-x - 9)^2} = \underline{(-(x + 9))^2} = \underline{(-1)^2} \cdot (x + 9)^2 = \underline{(x + 9)^2}$$

$$(x - 9)^2 + (y - 5)^2 = 9$$

$$(x + 9)^2 + (y - 5)^2 = 9$$

$$x \geq 0$$

$$x < 0$$

0
центр

График уравнения - совокупность двух окружностей.

(9; 5)

$a = 3$

(-9; 5)

ы

Второе уравнение

$$(|x| - 9)^2 + (y - 5)^2 = 9$$

СИСТЕМЫ

$$(x + 9)^2 + (y - 5)^2 = 9$$

$$(x - 9)^2 + (y - 5)^2 = 9$$

Центр (-9;
первый
ответ:

$$BC^2 = 61$$

$$R = \sqrt{61} - 3$$

$$AC = 13$$

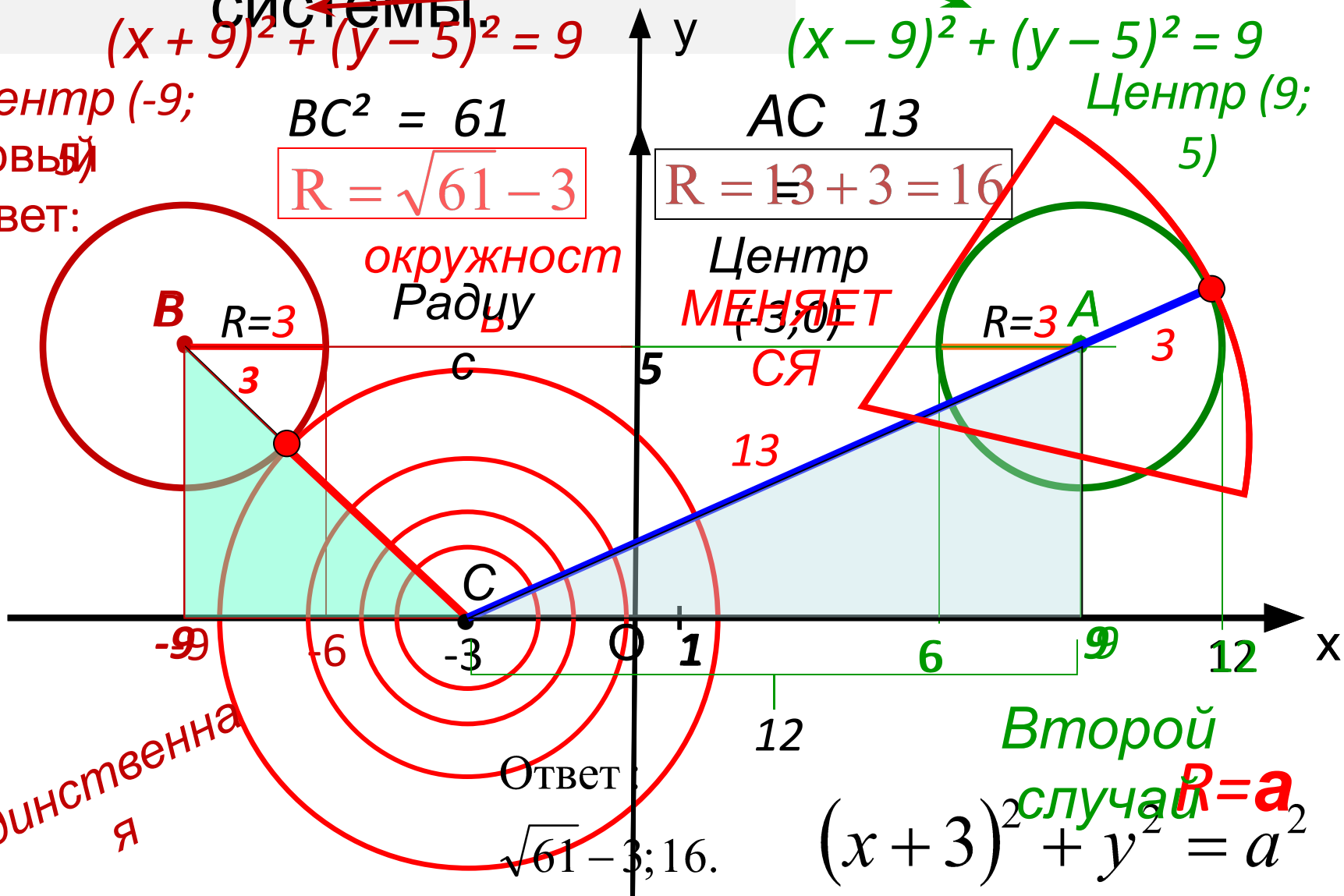
$$R = 13 + 3 = 16$$

Центр (9;
5)

Центр
МЕНЯЕТ
СЯ

R=3

3



Корни

и - абсциссы
пересечения

точек

ия

$$f(x) = \frac{2}{x+1}$$

гипербола
на $[0, +\infty)$

$$g(x) = a|x-5|$$

$$y =$$

$$y = |x-5|$$

величина «УГОЛКА»

зависит от

а

$$\text{при } x = \rightarrow a = \frac{2}{5} \quad 3$$

2

левый
«УГОЛКА»

КОРНЯ

Определим точку

Должны выполняться

условия:

$$f(x) = g(x)$$

$$f'(x) = g'(x)$$

$$\frac{2}{x+1} = a(5-x) -$$

$$\frac{2}{(x+1)^2} = -a$$

левый
луч

$$\frac{2}{x+1} = \frac{2(5-x)}{(x+1)^2} \quad | \cdot \frac{x+1}{2} \quad 1 = \frac{5-x}{x+1}$$

x = 2 в точке

$$a = \frac{2}{9} \text{ (2 корня)}$$

Отве
т:лучи
«УГОЛКА»

$$a \in \left(\frac{2}{5}; \frac{2}{9}\right]$$

ЕГЭ. 07.06.12.

ЗАДАЧИ ИЗ КОНТРОЛЬНО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ И ДЕМОНСТРАЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ

Пример 1. Найдите сумму целых значений параметра a ,
при которых уравнение $(a - x^2 - 19)(3 - |x - 4|) = 0$ имеет
три корня.

Исходное уравнение равносильно совокупности уравнений:

$$\begin{cases} a = x^2 - 2x - 19 \\ a = |x - 4| + 3, \end{cases}$$

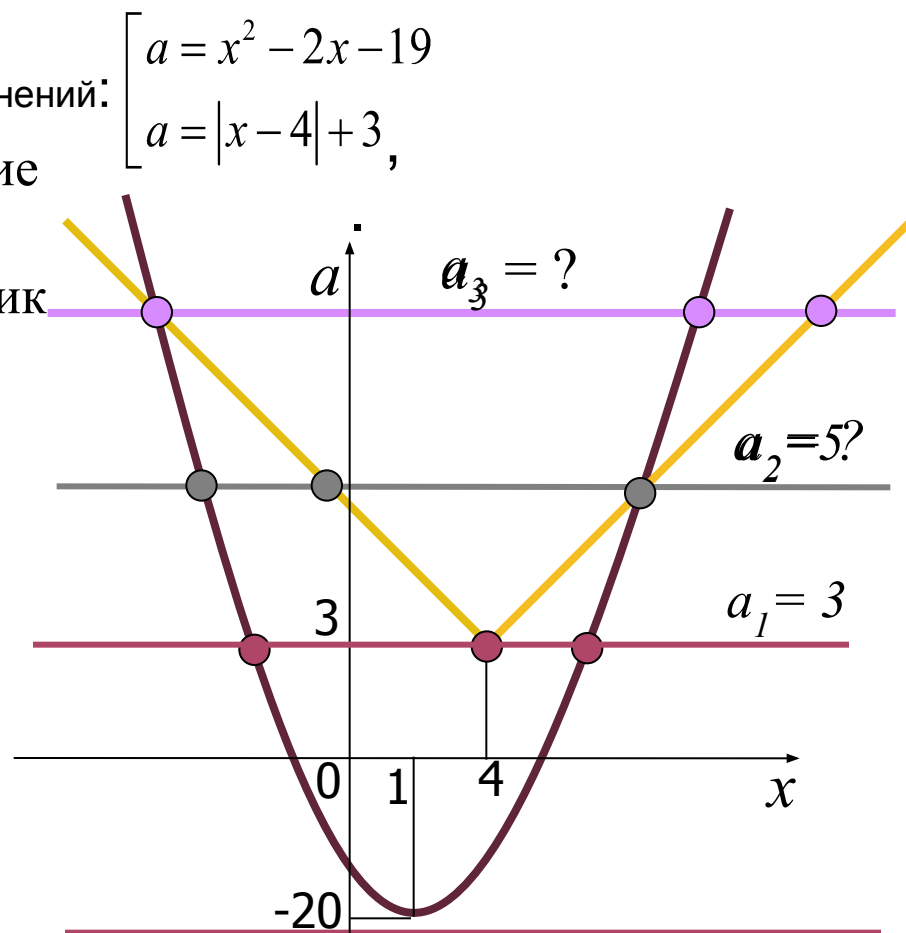
График этой совокупности — объединение
«уголка» и параболы.

Подвижная прямая $a = a_0$ пересекает график
совокупности в трёх точках, если $a = a_1$,
 $a = a_2$, $a = a_3$.

1) $a = a_1 \Rightarrow a = 3$.

2) При $x > 4$ $x^2 - 2x - 19 = x - 4 + 3$,
 $x^2 - 3x - 18 = 0$, $x_1 = -3$, $x_2 = 6$. Число -3
не удовлетворяет условию $x > 4$.
 $a(6) = 6 - 4 + 3 = 5 \Rightarrow a_2 = 5$.

3) При $x < 4$ $x^2 - 2x - 19 = -(-4) + 3$,
 $x^2 - x - 26 = 0$, $x_{1,2} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow a_3 \notin \mathbb{Z}$.



Ответ: 8.

ЗАДАЧИ ИЗ КОНТРОЛЬНО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ И ДЕМОНСТРАЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ ЕГЭ ПО

МАТЕМАТИКЕ

Пример 1. Найдите сумму целых значений параметра a ,
при которых уравнение $(a - x^2 - 19)(a - 3 - |x - 4|) = 0$ имеет

три корня.

Исходное уравнение равносильно совокупности уравнений:

$$\begin{cases} a = x^2 - 2x - 19 \\ a = |x - 4| + 3, \end{cases}$$

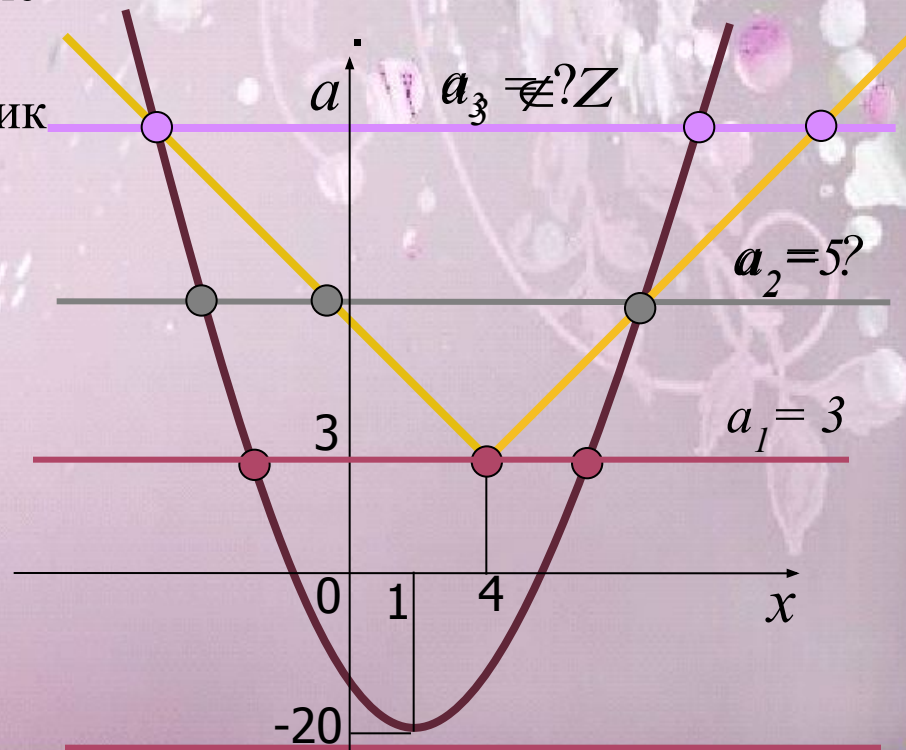
График этой совокупности — объединение «уголка» и параболы.

Подвижная прямая $a = a_0$ пересекает график совокупности в трёх точках, если $a = a_1$,
 $a = a_2$, $a = a_3$.

1) $a = a_1 \Rightarrow a = 3$.

2) При $x > 4$ $x^2 - 2x - 19 = x - 4 + 3$,
 $x^2 - 3x - 18 = 0$, $x_1 = -3$, $x_2 = 6$. Число -3
не удовлетворяет условию $x > 4$.
 $a(6) = 6 - 4 + 3 = 5 \Rightarrow a_2 = 5$.

3) При $x < 4$ $x^2 - 2x - 19 = -(-4) + 3$,
 $x^2 - x - 26 = 0$, $x_{1,2} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow a_3 \notin \mathbb{Z}$.



Ответ: 8.

10. Найдите все значения p , при каждом из которых найдётся q такое, что система имеет единственное решение:

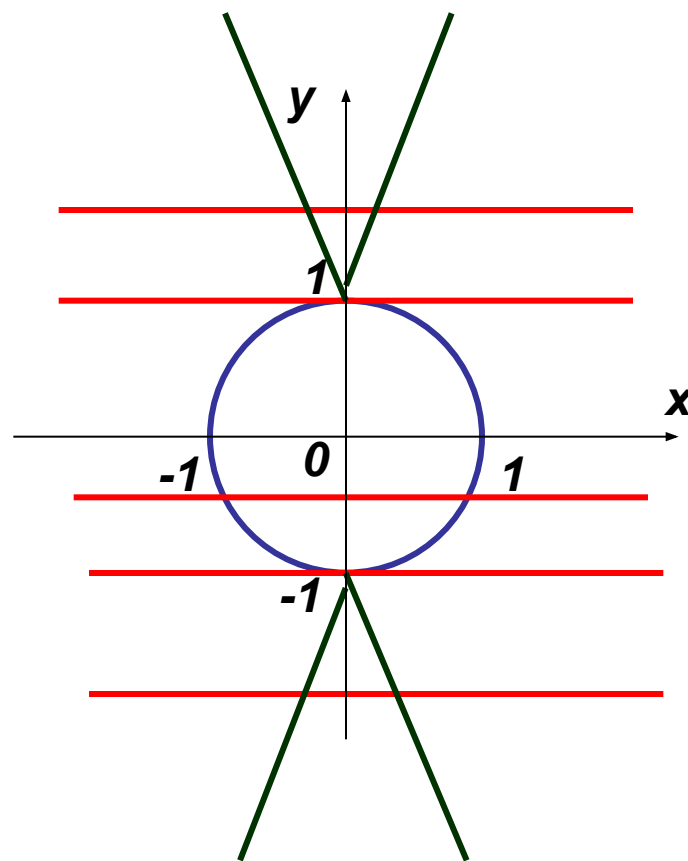
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y = q|x| + p \end{cases}$$

Решение:

Графиком функции $x^2 + y^2 = 1$ является окружность с центром $(0; 0)$ и $R = 1$.

- 1) $q = 0$, $y = p$; $p = 1$ или $p = -1$.
- 2) $q > 0$, $y = q|x| + p$; $p = 1$.
- 3) $q < 0$, $y = q|x| + p$; $p = -1$.

Ответ: $p = 1$ или $p = -1$.



C5. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 4|y - 3| = 12 - 3|x|, \\ y^2 - a^2 = 3(2y - 3) - x^2. \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

Решение. Преобразуем данную систему:

$$\begin{cases} 3|x| + 4|y - 3| = 12, \\ y^2 - 6y + 9 + x^2 = a^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3|x| + 4|y - 3| = 12, \\ (y - 3)^2 + x^2 = a^2. \end{cases}$$

Пусть $t = y - 3$, тогда система примет вид:

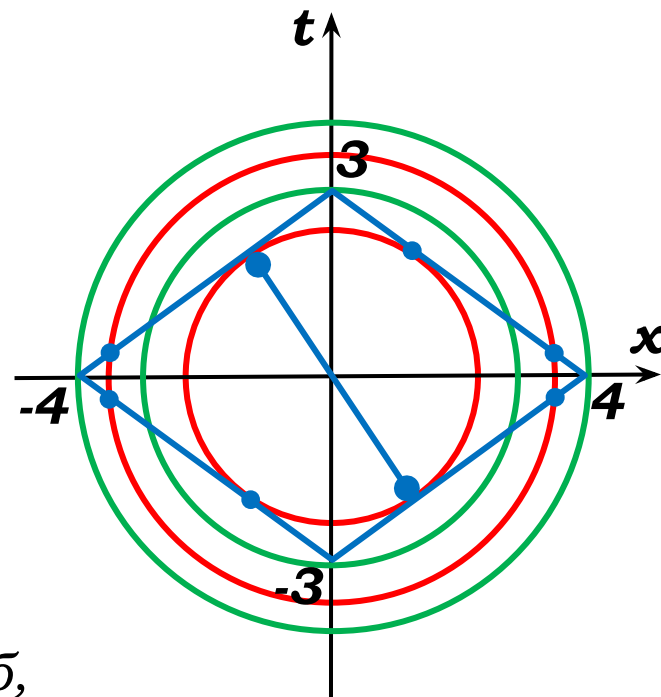
$$\begin{cases} 3|x| + 4|t| = 12, & (1) \\ t^2 + x^2 = a^2. & (2) \end{cases}$$

Заметим, что количество решений полученной системы совпадает с количеством решений исходной системы.

Построим графики уравнений (1) и (2) в системе координат Oxt .

C5.

График первого уравнения – ромб, диагонали которого, равные 8 и 6, лежат на осях Ox и Ot , а графиком второго уравнения является окружность с центром в начале координат и радиусом $r = |a|$.
Графики уравнений системы имеют ровно четыре общих точки, и, следовательно, система имеет ровно 4 решения, тогда и только тогда, когда окружность либо вписана в ромб, либо ее радиус удовлетворяет условию $3 < r < 4$.



В первом случае радиус окружности является высотой прямоугольного треугольника с катетами 3 и 4, откуда

$$r = |a| = \frac{3 \cdot 4}{5} = 2,4; \quad a = \pm 2,4.$$

В втором случае получаем $3 < |a| < 4$, откуда $-4 < a < -3$; $3 < a < 4$.

Ответ: $a = \pm 2,4$; $-4 < a < -3$; $3 < a < 4$.