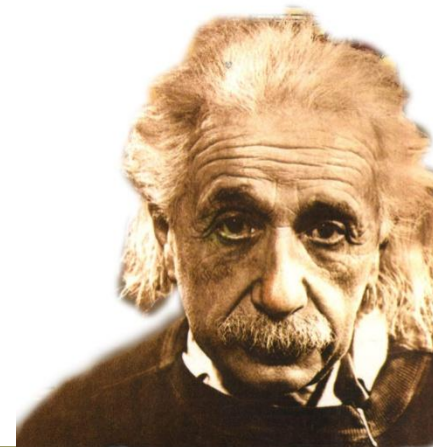


Примеры оформления задания II части ЕГЭ по математике

Задания с параметрами

ЗНАНИЕ И ТОЛЬКО ЗНАНИЕ
ДЕЛАЕТ ЧЕЛОВЕКА
ПОНАСТОЯЩЕМУ СИЛЬНЫМ И
СВОБОДНЫМ...



**При каких значениях параметра a уравнение
 $5 - \cos x = a(1 + \operatorname{tg}^2 x)$ имеет хотя бы один
 корень?**

Решение.

Запишем данное уравнение в виде: $5 \cos^2 x - 3 \cos^3 x = a$, $\cos^2 x \neq 0$.

Пусть $\cos x = t$, $t \in [-1; 0) \cup (0; 1]$, тогда $a(t) = -3t^3 + 5t^2$.

Исследуем функцию $a(t)$ с помощью производной:

$$a'(t) = -9t^2 + 10t; \quad a'(t) = 0 \Leftrightarrow t(-9t + 10) = 0 \Leftrightarrow t = 0, \quad t = \frac{10}{9}$$

заметим, что и $t = 0$ $t = \frac{10}{9} \notin [-1; 0) \cup (0; 1]$.

Значения функции на концах: $a(-1) = 8$, $a(1) = 2$, $a(0) = 0 \Rightarrow$

**график исходной функции располагается в полосе
 $t \in [-1; 0) \cup (0; 1]$ исходное уравнение имеет хотя бы
 одно решение при $a \in (0; 8]$**

С помощью компьютерной программы Advanced Grapher
 можно легко построить график функции и проверить
 правильность полученного ответа. **Ответ:** $a \in (0; 8]$

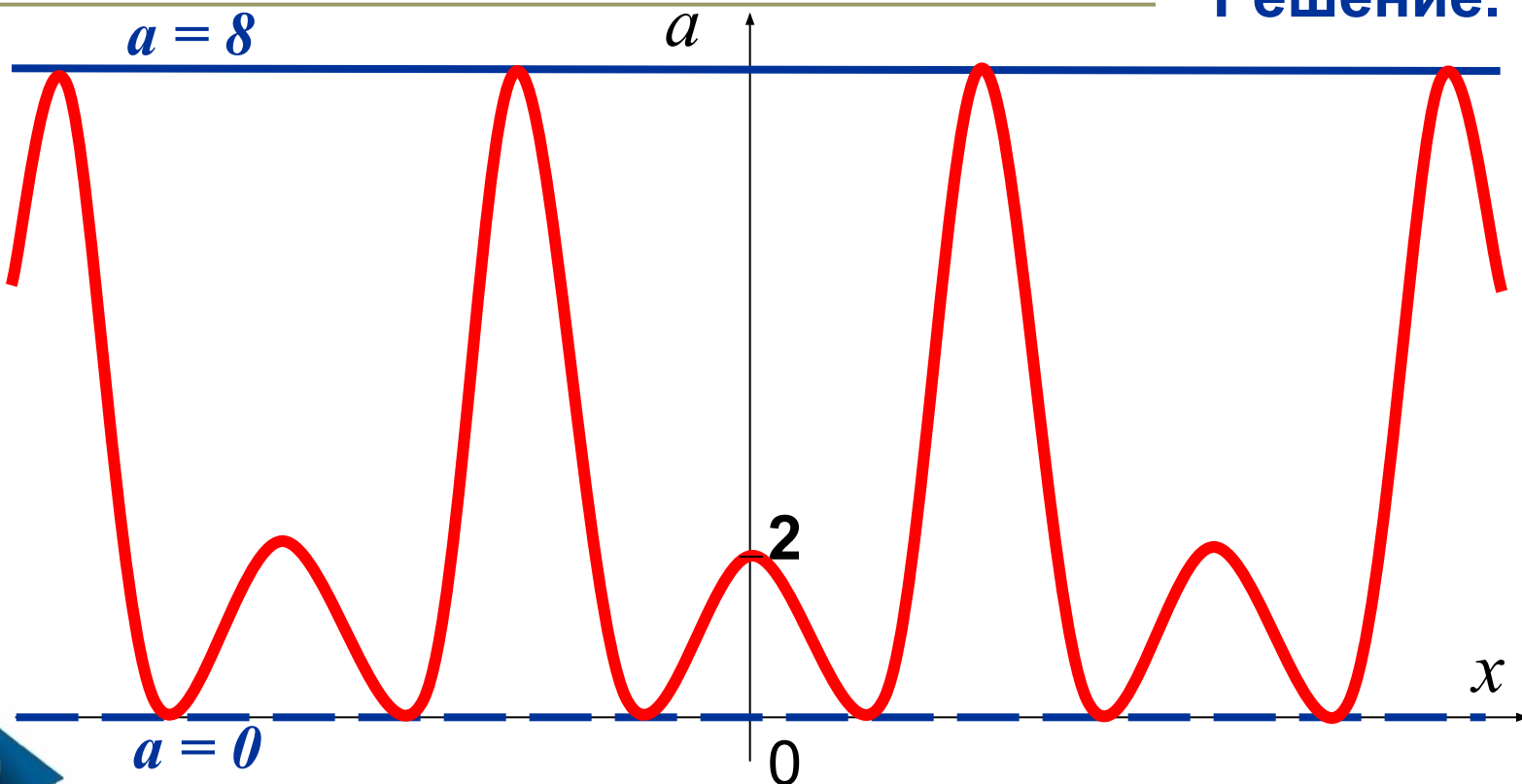
Почему?

Почему?



При каких значениях параметра a уравнение
 $5 - \cos x = a(1 + \operatorname{tg}^2 x)$ имеет бы один
 корень?

Решение.



$$a(x) = 5 \cos^2 x - 3 \cos^3 x, \cos^2 x \neq 0$$

С помощью компьютерной программы Advanced Grapher можно легко построить график функции и проверить правильность полученного ответа. **Ответ:** $a \in (0; 8]$



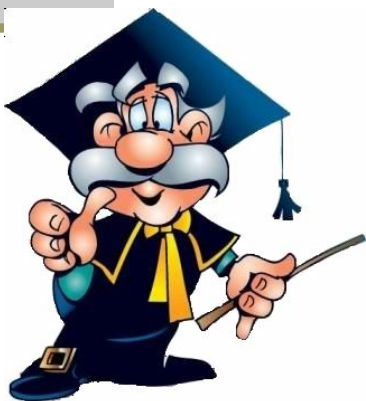
Решите задачи, по предложенной схеме

Пример 1. При каких значениях параметра a уравнение $8 \sin^3 x = a - 7 \cos 2x$ не имеет корней?

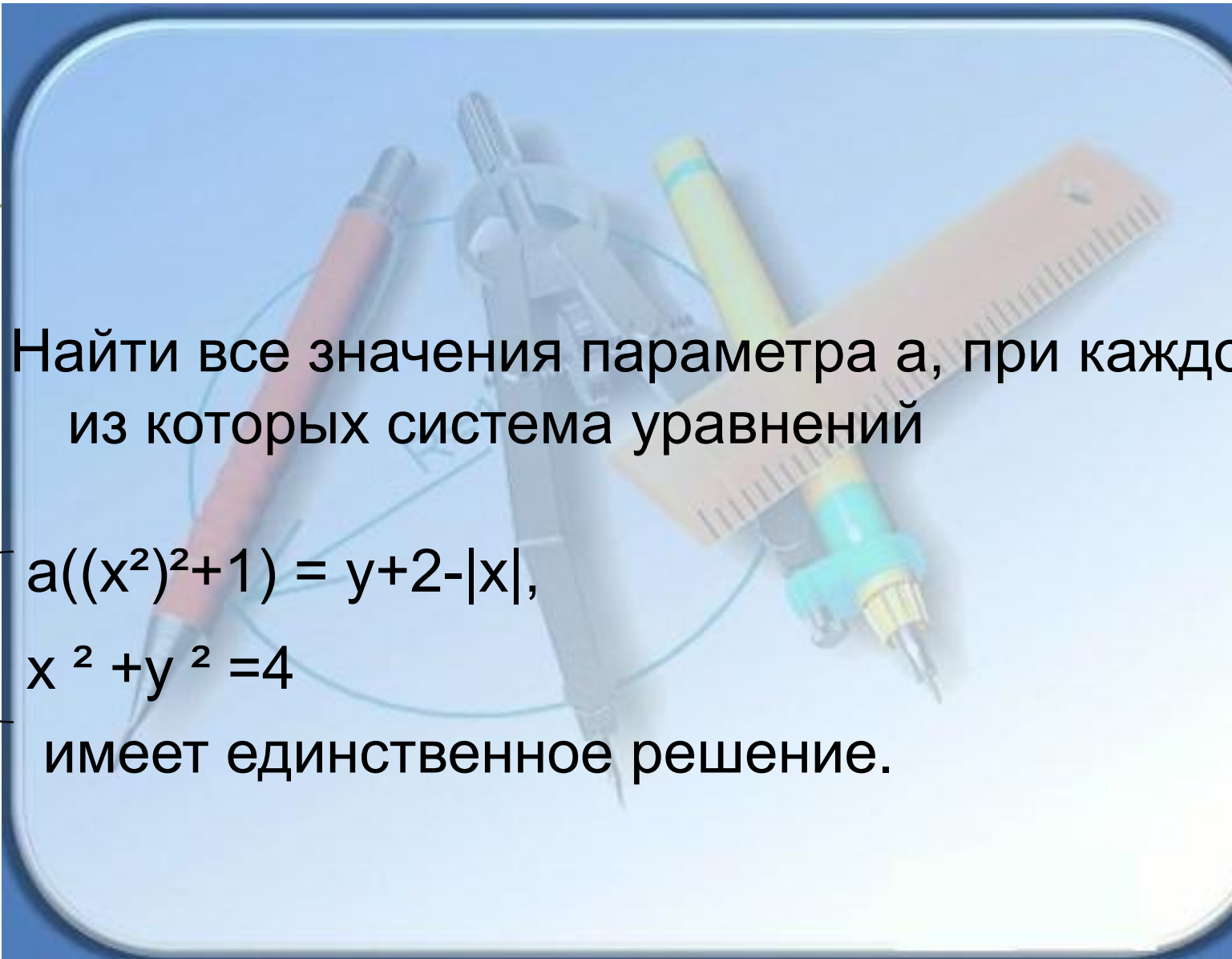
Ответ:

Пример 2. При каких значениях параметра a уравнение $6 - \sin x \operatorname{tg} a \left(1 + \frac{2}{\sin x} \right)$ имеет хотя бы один корень?

Ответ:



С помощью компьютерной программы Advanced Grapher можно легко построить график функции и проверить правильность полученного ответа.



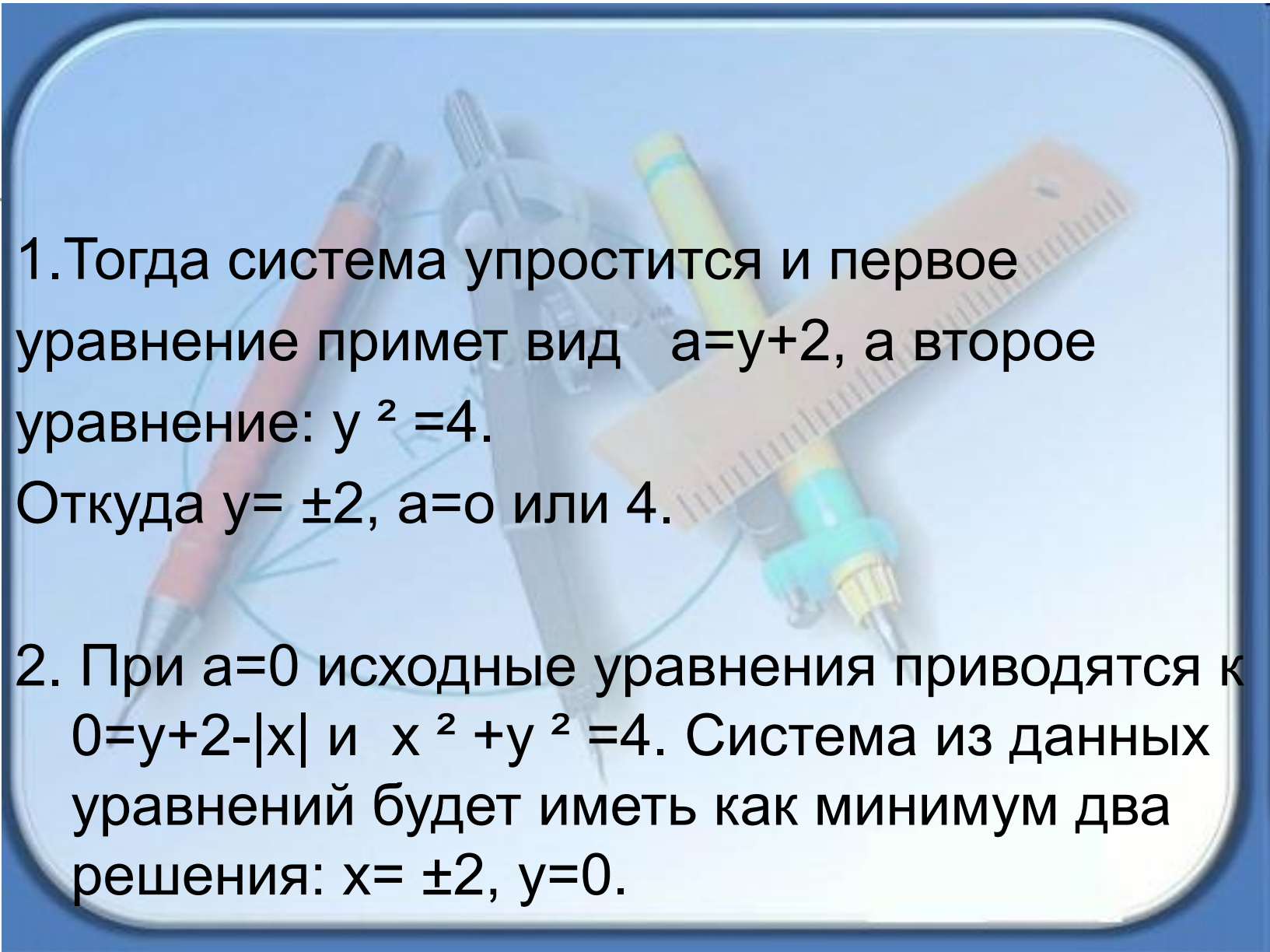
Найти все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} a((x^2)^2 + 1) = y + 2 - |x|, \\ x^2 + y^2 = 4 \end{array} \right.$$

имеет единственное решение.

Решение:

- Если пара чисел (x, y) является решением системы, то учитывая четность степени переменной x и присутствие знака модуля сделаем вывод, что пара $(-x, y)$ тоже является решением системы. По условию задачи система должна иметь одно решение, значит, $x = -x = 0$. Получаем пару $(0, y)$.



1. Тогда система упростится и первое уравнение примет вид $a=y+2$, а второе уравнение: $y^2=4$.

Откуда $y=\pm 2$, $a=0$ или 4 .

2. При $a=0$ исходные уравнения приводятся к $0=y+2-|x|$ и $x^2+y^2=4$. Система из данных уравнений будет иметь как минимум два решения: $x=\pm 2$, $y=0$.

- 3. При $a=4$ система принимает вид

$$\begin{array}{lll} 4((x^2)^2+1) = y+2-|x|, & y=4x + |x|+2 & x=0 \\ x^2 + y^2 = 4 & y^2 = 4 - x^2 & y=2 \end{array}$$

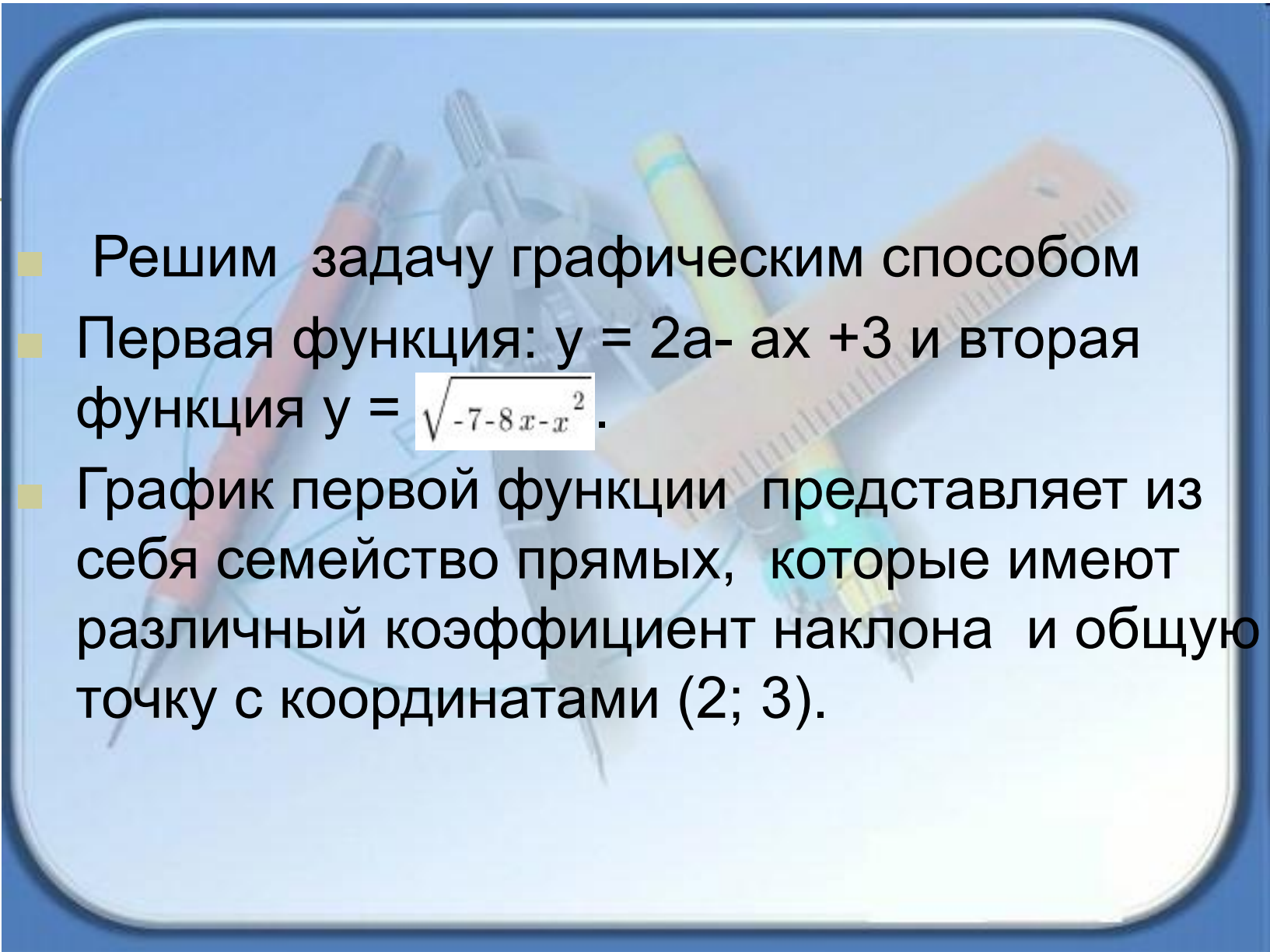
Таким образом, при $a=4$ исходная система имеет одно единственное решение.

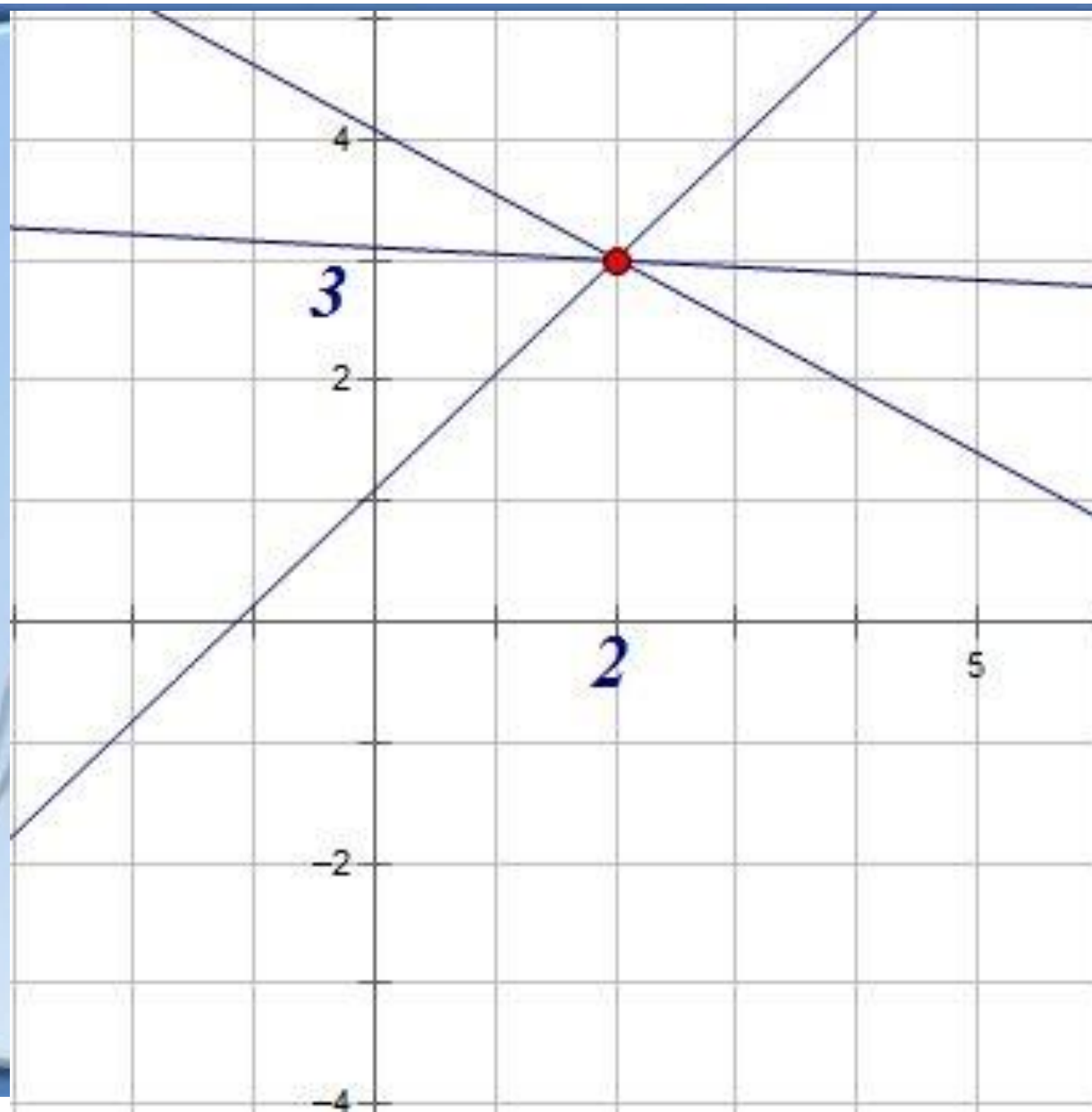
Ответ: 4.

**Найдите значения параметра
а, при каждом из которых
уравнение**

$$ax + \sqrt{-7 - 8x - x^2} = 2a + 3$$

имеет единственное решение.

- 
- Решим задачу графическим способом
 - Первая функция: $y = 2a - ax + 3$ и вторая функция $y = \sqrt{-7 - 8x - x^2}$.
 - График первой функции представляет из себя семейство прямых, которые имеют различный коэффициент наклона и общую точку с координатами (2; 3).

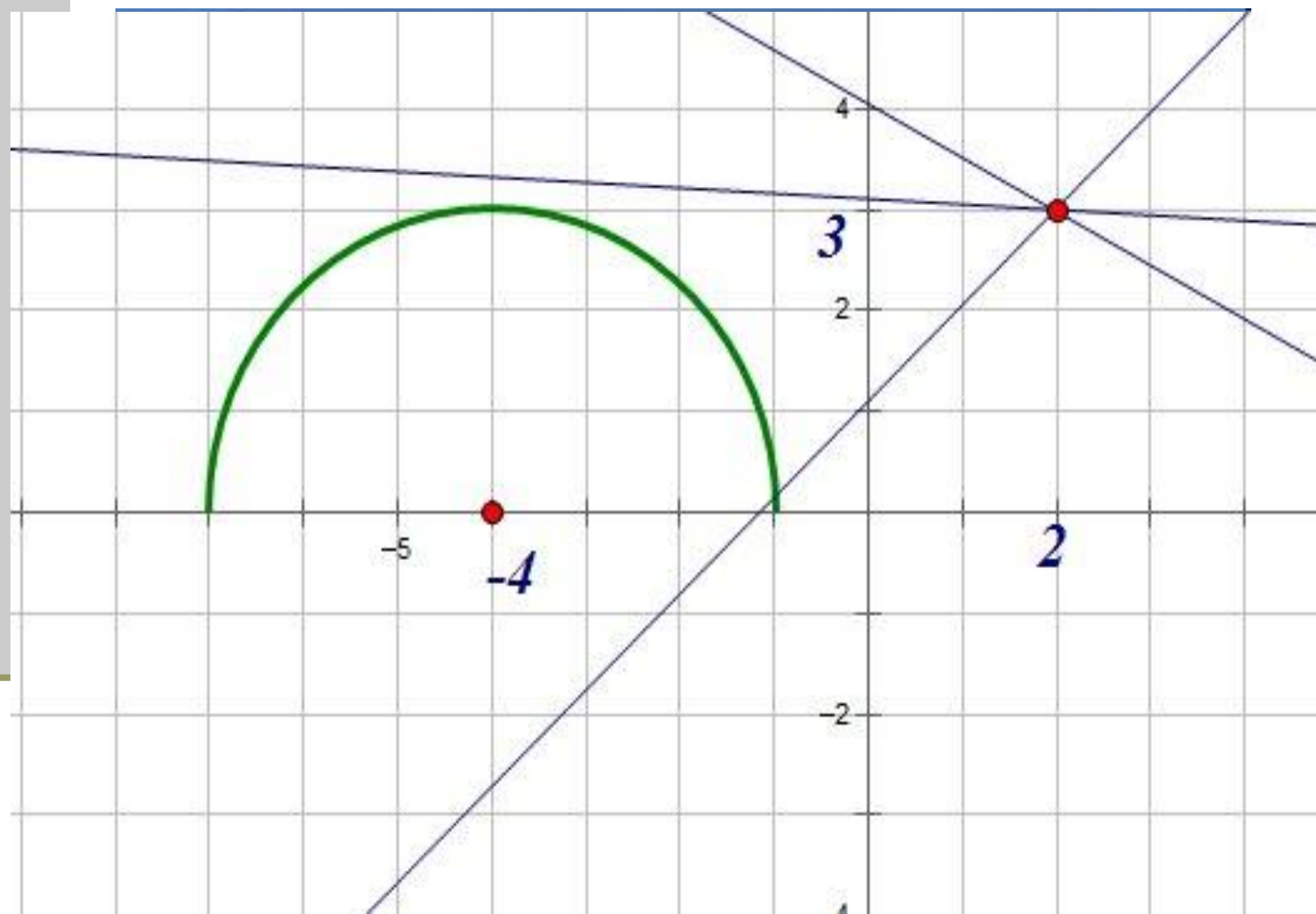


■ Вторая функция: $y = \sqrt{-7 - 8x - x^2}$

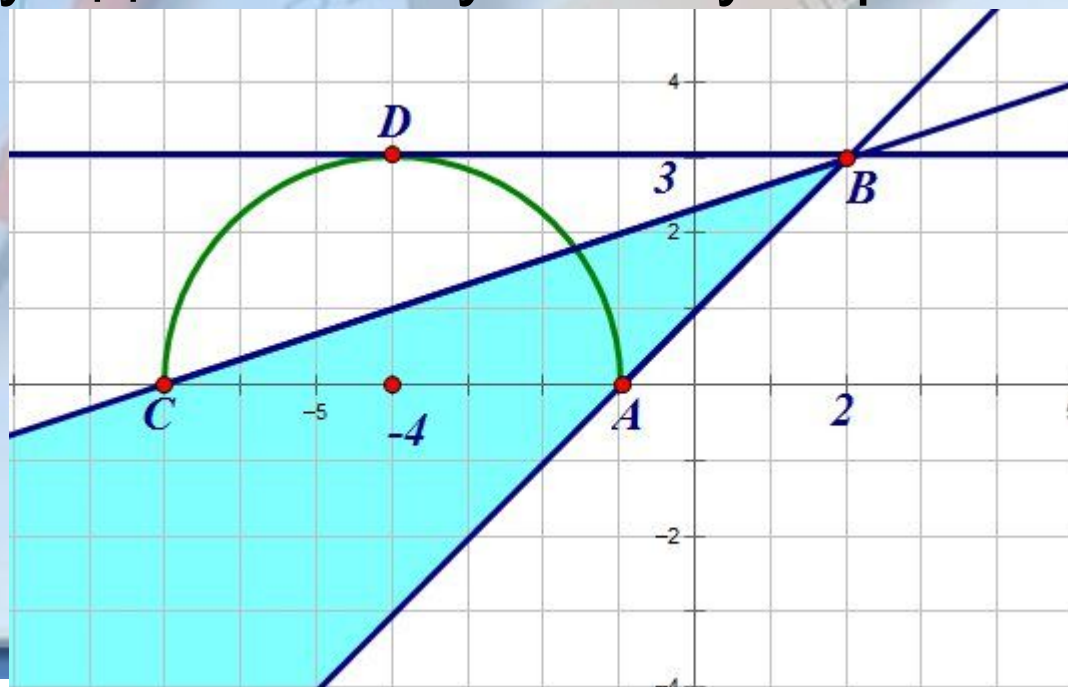
Преобразуем выражение под корнем – выделим полный квадрат:

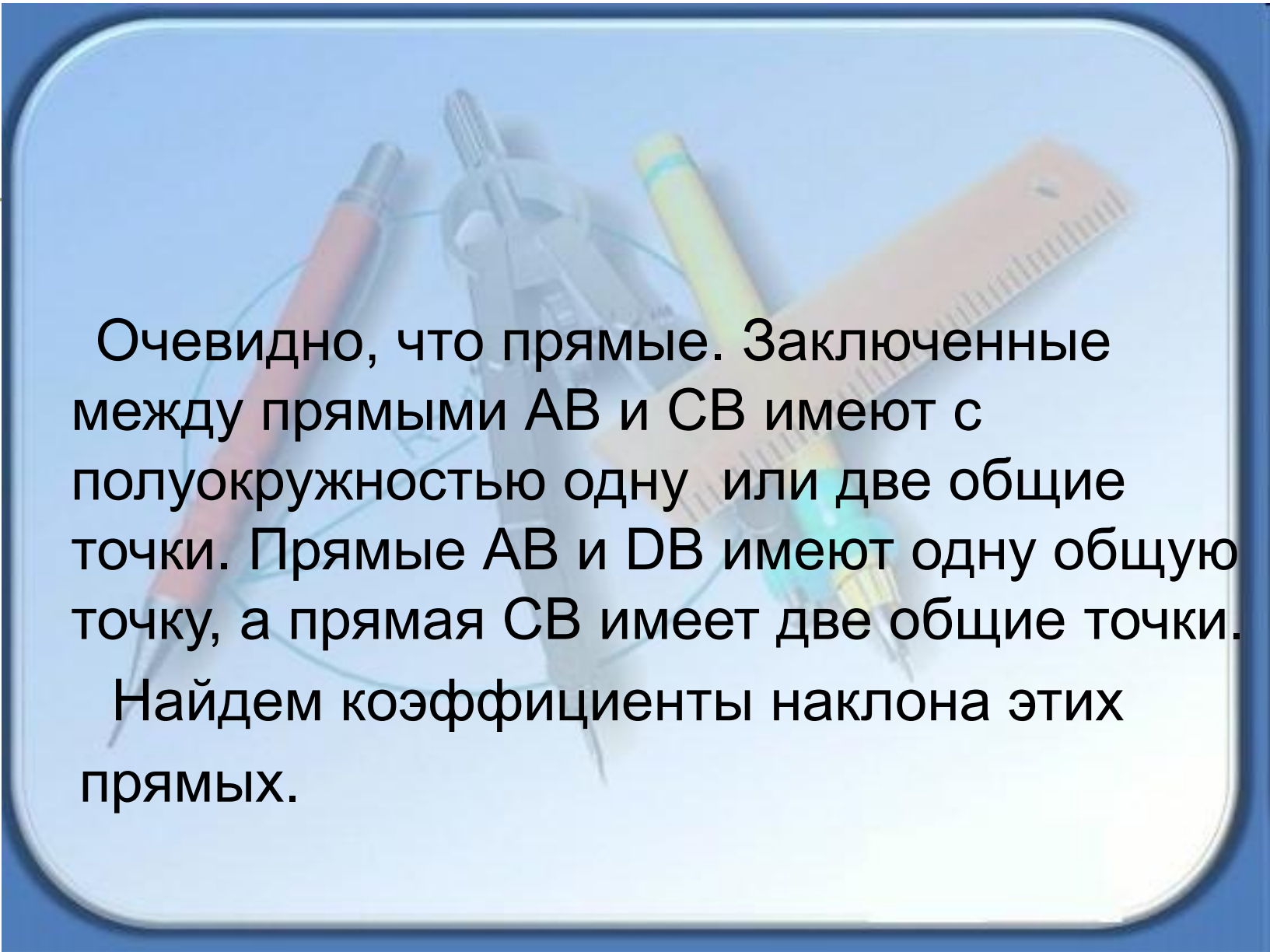
$$\sqrt{-7 - 8x - x^2} = \sqrt{-7 - (8x + x^2)} = \sqrt{-7 - (16 + 8x + x^2 - 16)} = \sqrt{-7 + 16 - (x + 4)^2} = \sqrt{9 - (x + 4)^2}$$

График функции $y = \sqrt{9 - (x + 4)^2}$ представляет из себя полуокружность с центром в точке $(-4; 0)$ и радиусом 3.



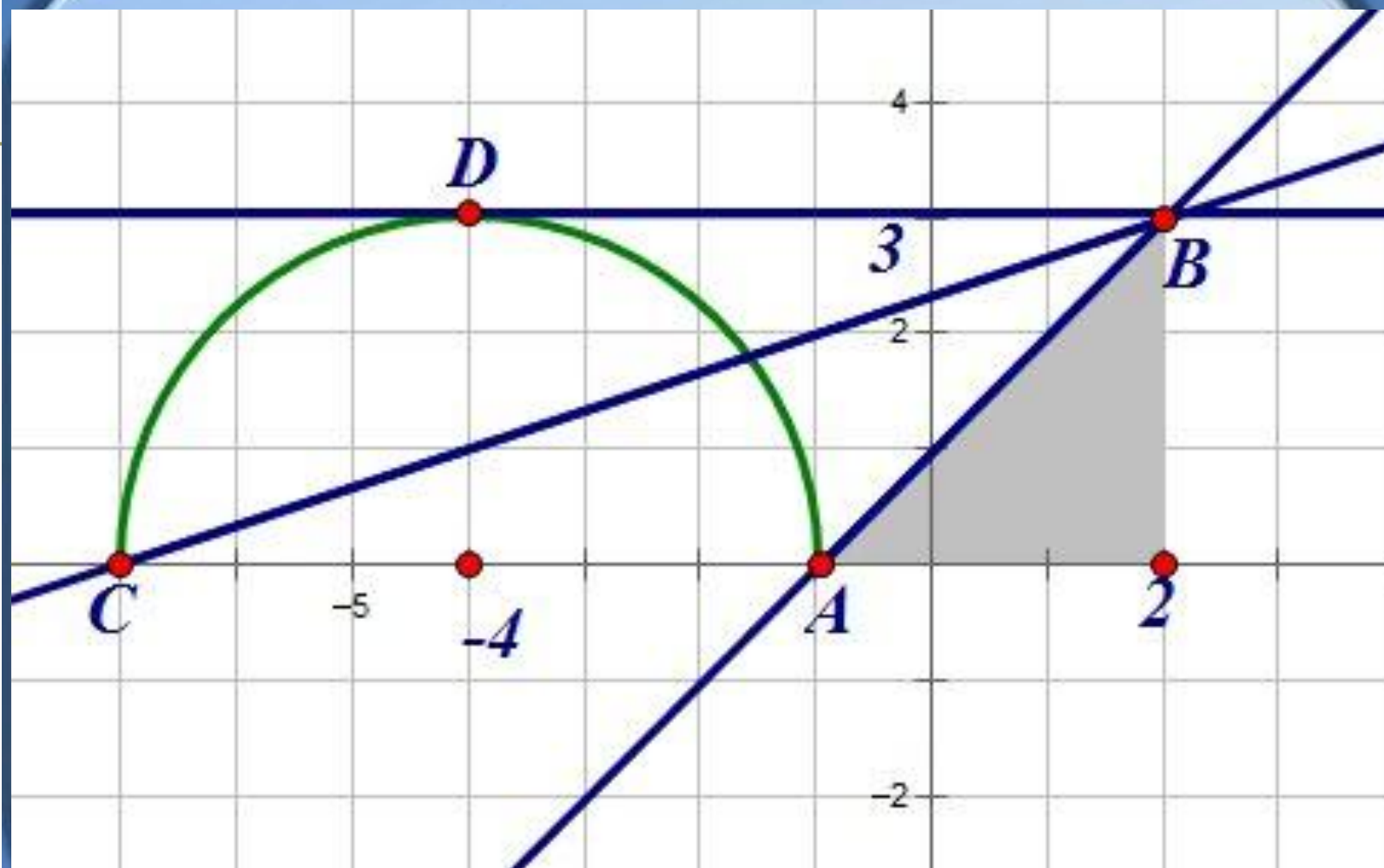
■ Определим, при каком коэффициенте наклона прямая имеет с полуокружностью одну единственную точку пересечения

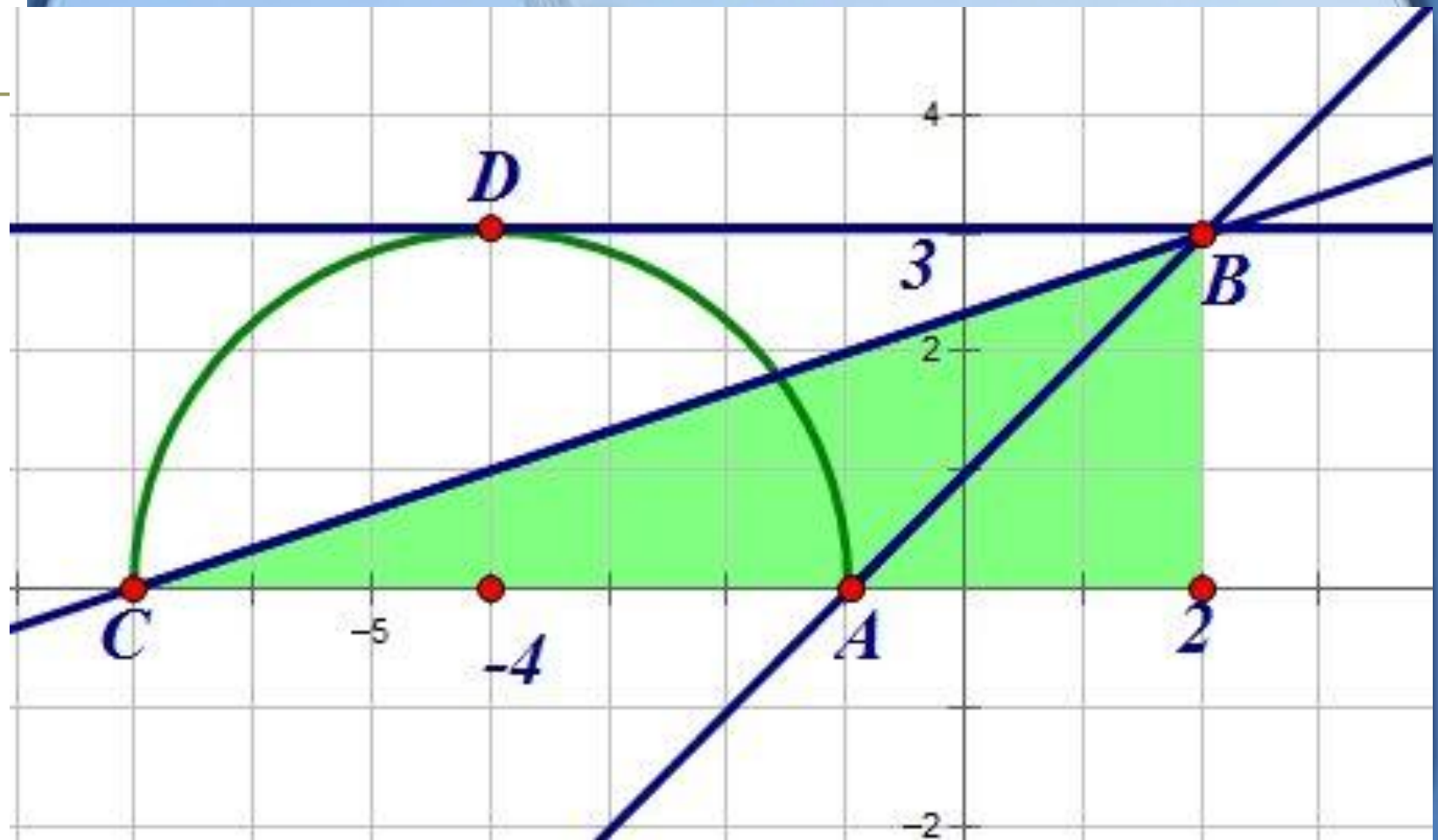


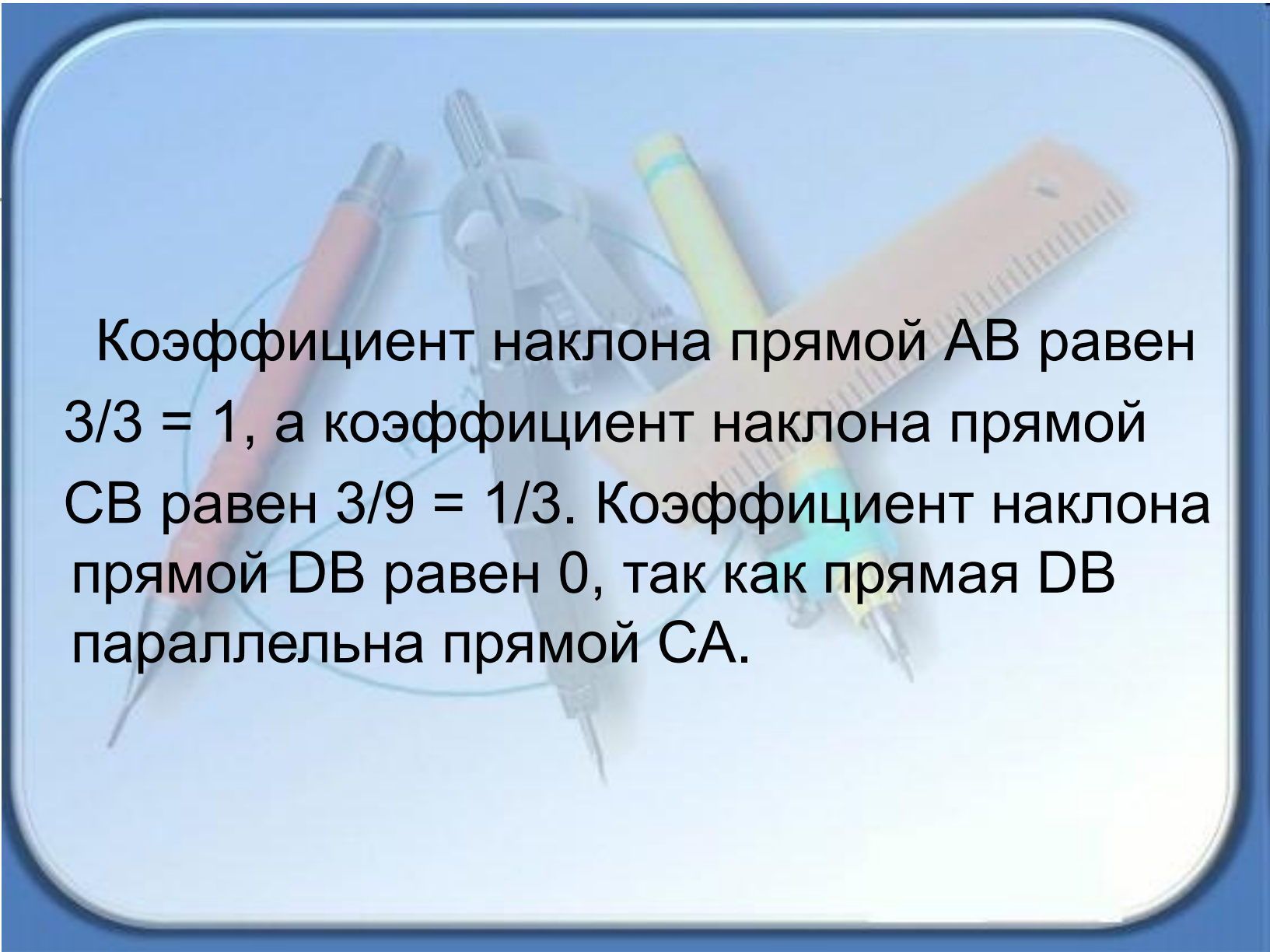


Очевидно, что прямые. Заключенные между прямыми АВ и СВ имеют с полуокружностью одну или две общие точки. Прямые АВ и DB имеют одну общую точку, а прямая СВ имеет две общие точки.

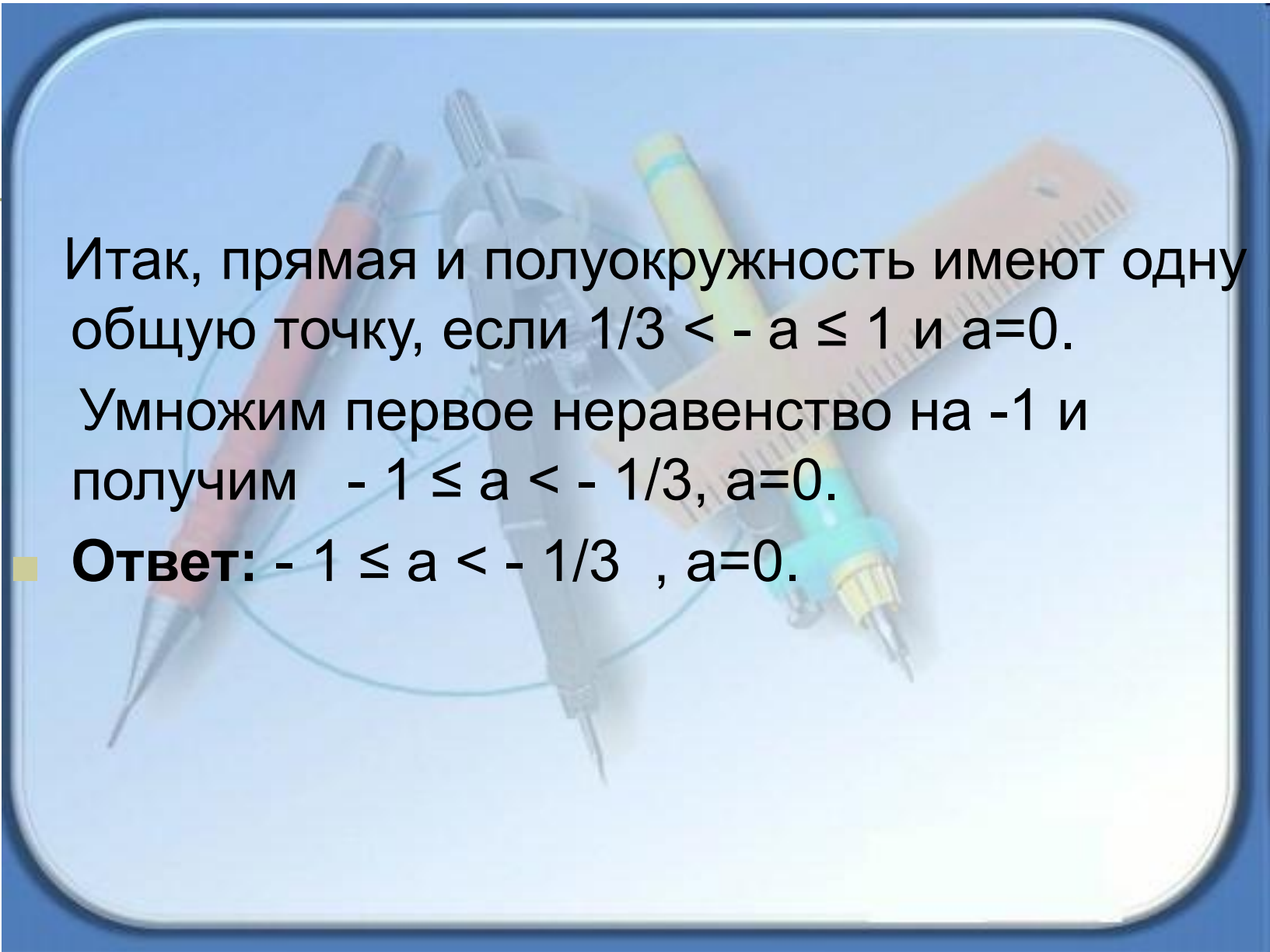
Найдем коэффициенты наклона этих прямых.





A collection of geometric drawing tools including a red pencil, a compass, a yellow highlighter, and a ruler, arranged on a light blue background. A faint geometric diagram with points A, B, C, D, V and lines is visible in the background.

Коэффициент наклона прямой АВ равен $3/3 = 1$, а коэффициент наклона прямой СВ равен $3/9 = 1/3$. Коэффициент наклона прямой DV равен 0, так как прямая DV параллельна прямой СА.



Итак, прямая и полуокружность имеют одну общую точку, если $1/3 < -a \leq 1$ и $a \neq 0$.

Умножим первое неравенство на -1 и получим $-1 \leq a < -1/3$, $a \neq 0$.

■ **Ответ:** $-1 \leq a < -1/3$, $a \neq 0$.

Ф.Честерфилд

