

Тема: "Решение задач с параметрами"



Саратов 2012г.

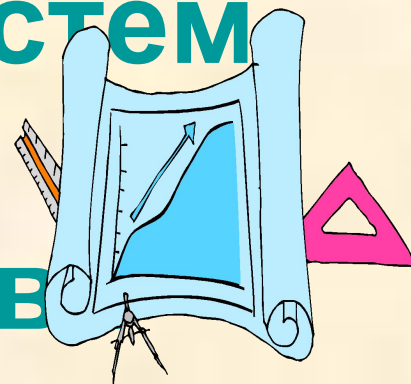
Учитель математики
высшей категории
Зарьянцева Виктория
Павловна

МОУ «СОШ № 84»

Аналитические приёмы

Параметр и количество
решений уравнений ,
неравенств и их систем

Параметр и свойства
уравнений, неравенств
и их систем.



Параметры при решении уравнений, содержащих ОТФ.

Пример : Решите уравнение $\sin x = 2 \arcsin a$

Решение.

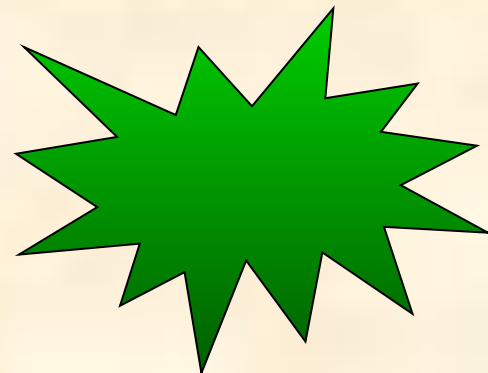
$$\sin(2 \arcsin a) = 2 \sin(\arcsin a) \cos(\arcsin a) = 2a\sqrt{1-a^2},$$

где $|a| \leq 1$

$$x = 2a\sqrt{1-a^2}, \quad \text{где } |2 \arcsin a| \leq \frac{\pi}{2}, |\arcsin a| \leq \frac{\pi}{4}, |a| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ при $a \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right] x = 2a\sqrt{1-a^2},$

$a \in \left(-\infty; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty\right)$ **решений нет.**



Параметр и свойства уравнений, неравенств и их систем

Найдите все значения a , при которых неравенство

$(x - 3a)(x - a - 3) < 0$ выполняется при всех x , таких, что $1 \leq x \leq 3$

Решение.

$$\begin{cases} 3a < 1, \\ 3 < a + 3, \\ a + 3 < 1, \\ 3 < 3a. \end{cases}$$

$$0 < a < \frac{1}{3}$$

Ответ. $0 < a < \frac{1}{3}$



Свойства функций в задачах с параметрами

1. Область значений функции
2. Экстремальные свойства функции
3. Монотонность
4. Чётность. Периодичность.
Обратимость.



Графические приёмы

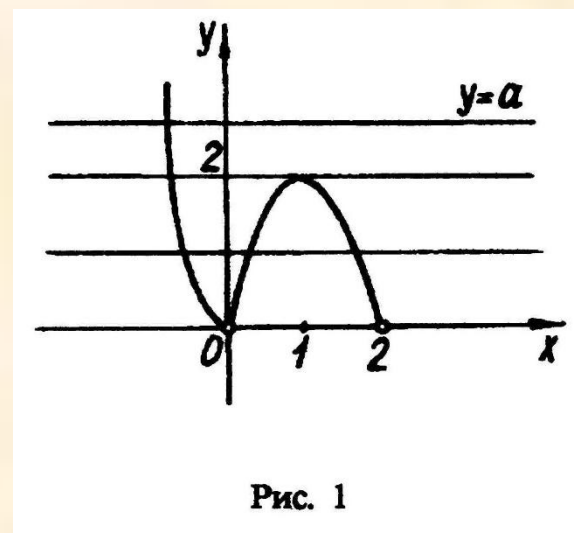
Параллельный перенос

Найти все значения параметра b , при которых уравнение имеет единственное решение.

$$\lg 2|x| + \lg(2-x) - \lg(\lg b) = 0$$

$$\begin{cases} 2|x|(2-x) = a, \\ x < 2, \\ x \neq 0; \end{cases}$$

$$\lg b > 2$$



Ответ: $b > 100$.

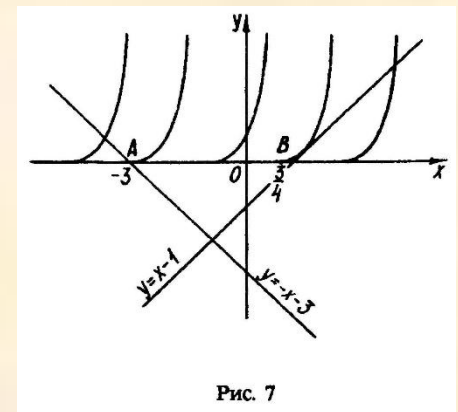
Найдите все значения параметра a , при которых система уравнений

$$\begin{cases} x = a + \sqrt{y}, \\ y^2 - x^2 - 2x + 4y + 3 = 0; \end{cases} \quad \text{имеет решение.}$$

Решение.

$$\begin{cases} y = x - 1, \\ y = (x - a)^2; \end{cases}$$
$$a = \frac{3}{4}$$

Ответ. $a \leq -3$ или $a \geq \frac{3}{4}$



Квадратичная функция

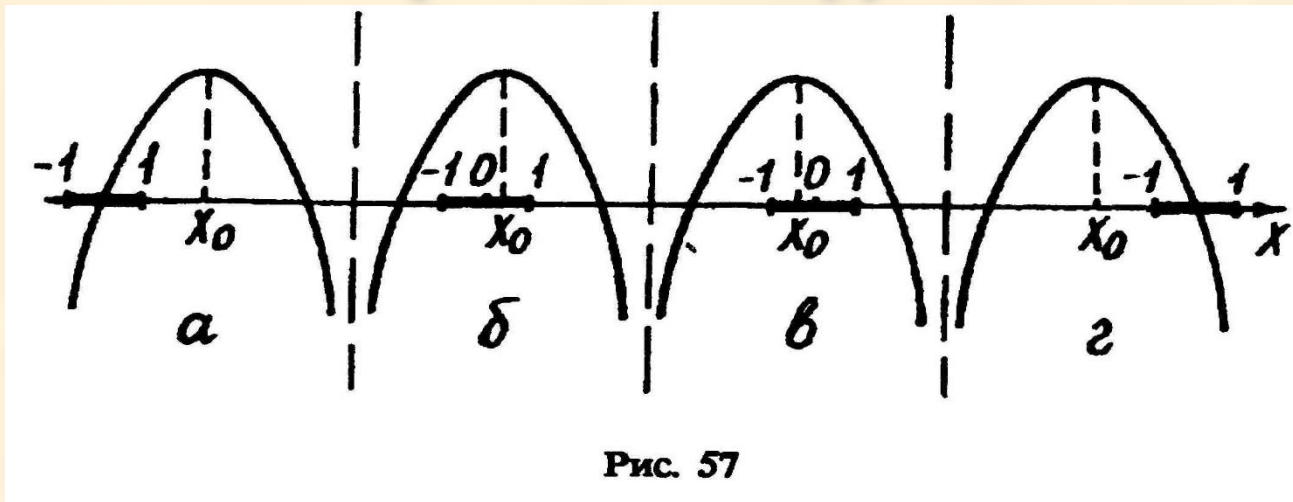


Рис. 57

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2 - ax - 3x^2$ на отрезке $[-1; 1]$

Ответ: Если $1 < -\frac{a}{6}$ то $\max_{[-1;1]} y = y(1) = -a - 1$, $\min_{[-1;1]} y = y(-1) = a - 1$

Если $0 < -\frac{a}{6}$, т.е. $-6 \leq a < 0$ то $\max_{[-1;1]} y = y(x_0) = 2 + \frac{a^2}{12}$, $\min_{[-1;1]} y = y(-1) = a - 1$

Если $-1 < -\frac{a}{6} \leq 0$, т.е. $0 \leq a < 6$, то $\max_{[-1;1]} y = y(x_0) = 2 + \frac{a^2}{12}$, $\min_{[-1;1]} y = y(1) = -a - 1$

Если $-\frac{a}{6} \leq -1$, т.е. $a \geq 6$, то $\max_{[-1;1]} y = y(-1) = a - 1$, $\min_{[-1;1]} y = y(1) = -a - 1$

Решения неравенств с параметром:

При каких значениях a
неравенство

$$ax^2 + 2(a+1)x + a + 4 > 0$$

выполняется при любых значениях x ?

Решение.

$$a = 0, \quad x > -2;$$

$$a \neq 0, \text{ тогда } \begin{cases} a > 0, \\ D < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + 2a + 1 - a^2 - 4a < 0 \\ a > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a > \frac{1}{2} \\ a > 0 \end{cases}$$

$$a > \frac{1}{2}. \quad \text{Ответ: } a > \frac{1}{2}.$$

Тесты ЕГЭ группы С:

Найдите все значения a , при которых каждое из уравнений

$$\sqrt{41 + 9 \cos x} - a \cos x = 0 \quad |x - a| + 7|x + 2| + 5x = 0$$

имеет хотя бы один корень.

Решение :

Посмотрим сначала когда первое уравнение имеет корни. С учетом области значений косинуса выражение под корнем всегда положительное.

Получаем: $\sqrt{49 + 9 \cos x} = a \cos x$

А вот здесь сейчас будет интересно. Казалось бы, все прекрасно, возводим в квадрат – и вперед,

по стандартной схеме исследуем корни квадратного уравнения. Но все не так просто.

Поскольку на

наличие корней будет влиять знак произведения, стоящего в правой части.

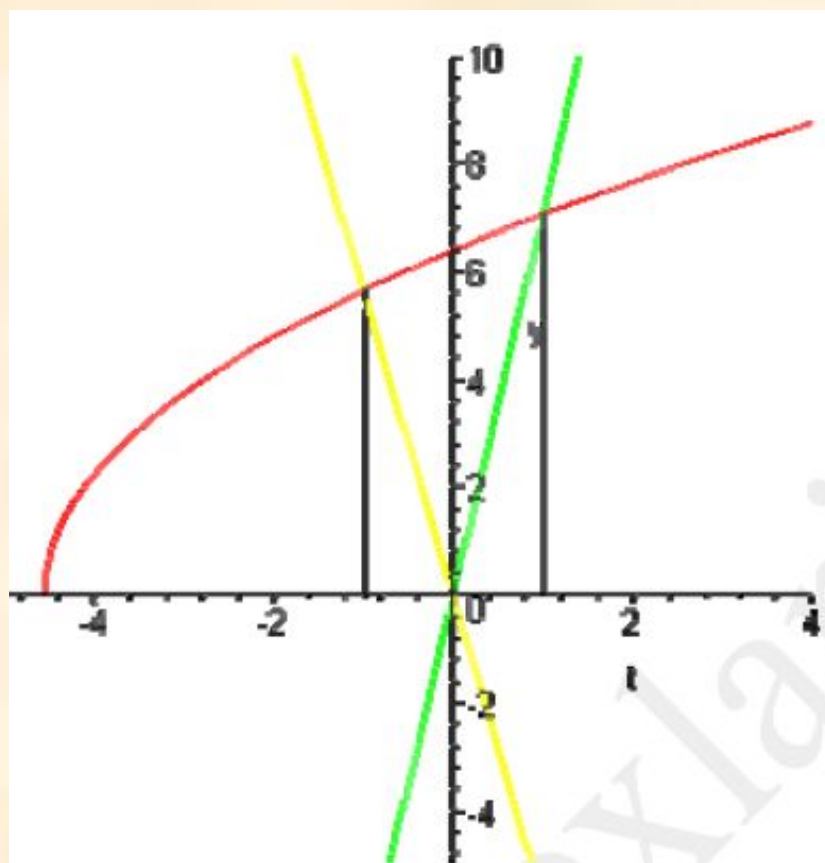
Можно очень легко выкрутиться из этой ситуации без рассмотрения большого числа случаев. Как всегда на помощь приходят графики.

Рассмотрим функции $f = \sqrt{41 + 9t}$ и $g = at$

Точка пересечения этих графиков должна попасть в отрезок $[-1; 1]$ поскольку $t = \cos x$

Точка пересечения для возрастающей прямой $f(1)=g(1)$, $a = 5\sqrt{2}$
для убывающей $f(-1)=g(-1)$, ; $a = -4\sqrt{2}$

Не составляет большого труда увидеть, что точка пересечения
будет в промежутке от -1 до 1, если $a \in (-\infty; -4\sqrt{2}] \cup [5\sqrt{2}; +\infty)$



Теперь займемся вторым уравнением. Здесь все проще.

$$|x - a| + 7|x + 2| + 5x = 0; \rightarrow -|x - a| = 7|x + 2| + 5x$$

Функция, стоящая в правой части достигает своего наименьшего значения -10 в точке $x = -2$. График функции в левой части представляет собой «перевернутый» график модуля, смещенный по оси абсцисс на величину a .

Для того чтобы уравнение имело корни, должно быть выполнено условие $-|-2 - a| \geq -10$

Получаем:

$$|-2 - a| \leq 10; \rightarrow -10 \leq -2 - a \leq 10; \rightarrow -8 \leq -a \leq 12; \rightarrow -12 \leq a \leq 8$$

Примечание. Второй случай можно разобрать и иначе, выполнив условие, что наименьшее значение функции $|x - a| + 7|x + 2| + 5x$ должно быть неположительным. Для этого надо раскрыть модули всеми возможными способами и составить систему неравенств.

С учетом условия, полученного для первого уравнения, пишем ответ: $a \in [-12; -4\sqrt{2}] \cup [5\sqrt{2}; 8]$

С учетом условия, полученного для первого уравнения, пишем ответ: $a \in [-12; -4\sqrt{2}] \cup [5\sqrt{2}; 8]$

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых множество решений неравенства

$$\frac{3^x - 6a + 3}{a - 2} + \frac{12}{(a - 2)(3^x - 3 + a)} \leq \frac{10a + 2}{3 - a - 3^x}$$

является отрезком длины меньше 1.

Сначала преобразования.

$$\frac{(3^x - 6a + 3)(3^x - 3 + a) + 12 + (10a + 2)(a - 2)}{(a - 2)(3^x - 3 + a)} \leq 0$$

$$\frac{9^x - 3 \cdot 3^x + a \cdot 3^x - 6a \cdot 3^x + 18a - 6a^2 + 3 \cdot 3^x - 9 + 3a + 12 + 10a^2 - 20a + 2a - 4}{(a - 2)(3^x - 3 + a)} \leq 0$$

$$\frac{9^x - 5a \cdot 3^x + 4a^2 + 3a - 1}{(a - 2)(3^x - 3 + a)} \leq 0$$

$$\frac{9^x - 5a \cdot 3^x + (a + 1)(4a - 1)}{(a - 2)(3^x - 3 + a)} \leq 0$$

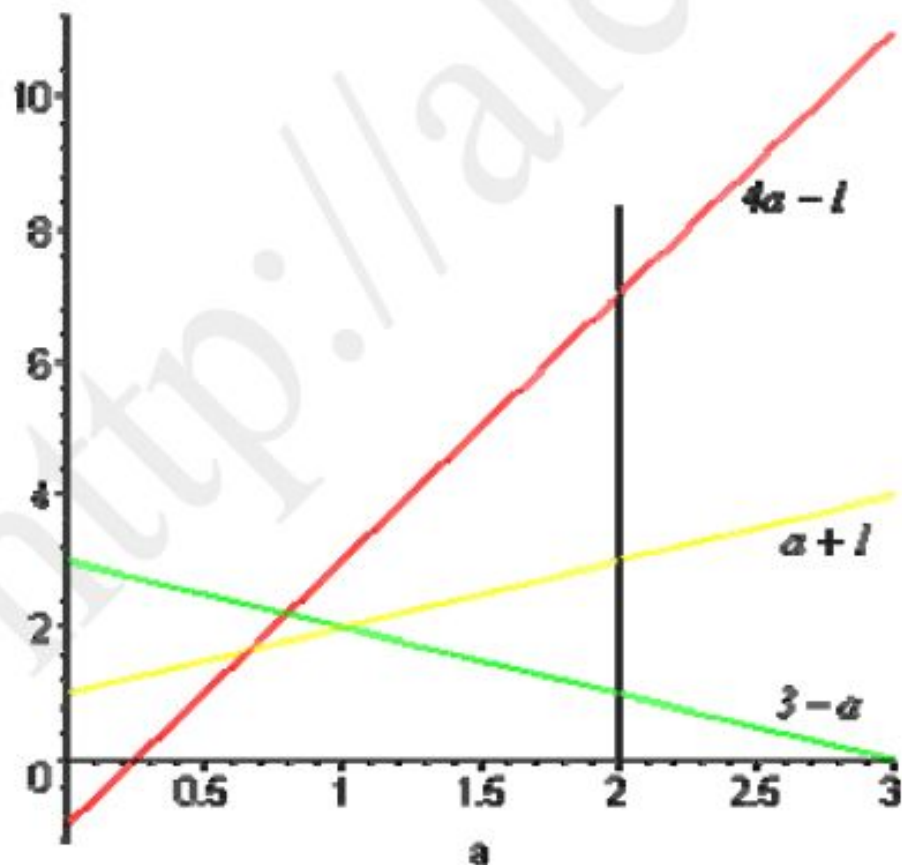
$$\frac{(3^x - a - 1)(3^x - 4a + 1)}{(a - 2)(3^x - 3 + a)} \leq 0$$

Обозначим $3^x = t > 0$

$$\frac{(t - (a + 1))(t - (4a - 1))}{(a - 2)(t - (3 - a))} \leq 0$$

А вот теперь самое интересное. Объяснение «по-простому». Первая мысль: если $a < 2$, то каково бы ни было взаимное расположение нулей числителя и знаменателя, чередование знаков в методе интервалов слева направо будет иметь вид «плюс-минус-плюс-минус». Т.е. будет неограниченный промежуток отрицательности. Естественно, являться отрезком меньше 1, как требует условие, он не может. Значит, в этом случае решений нет.

Теперь вторая мысль. Если $a > 2$, то попробуем расположить нули числителя и знаменателя на числовой прямой. Для этого применим графический способ.



Вот так можно легко и наглядно решить непростую в общем-то задачу. Осталось совсем немного. Получаем два отрицательных интервала. Отрезок должен быть длиной меньше 1, а вот что делать с неограниченным интервалом? Ответ простой – его не должно быть вообще.

Ведь $t > 0$, Значит, если $3 - a \leq 0$, то решение будет только то, которое удовлетворяет условию задачи. Получаем условие $a \geq 3$.

Теперь последнее. Пусть $3^{x_1} = t_1$; $3^{x_2} = t_2$; $\rightarrow x_1 = \log_3 t_1$; $x_2 = \log_3 t_2$;

$$x_2 - x_1 = \log_3 \frac{t_2}{t_1} < 1; \rightarrow \frac{t_2}{t_1} < 3$$

Для нашего решения получаем: $\frac{4a-1}{a+1} < 3 \rightarrow (a+1 > 0) \rightarrow 4a-1 < 3a+3$;

Итого: $a < 4$

Окончательно получаем ответ: $a \in [3; 4)$

Задача 3

Найдите все значения параметра a , при которых данное уравнение имеет три решения.

$$\left| (2x - a)^2 - |x| - 28 \right| + 2|x| = 16$$

Будем решать с использованием графических иллюстраций. Все эти графики легко прикинуть от руки и схематически.

$$\left| (2x - a)^2 - |x| - 28 \right| = 16 - 2|x|$$

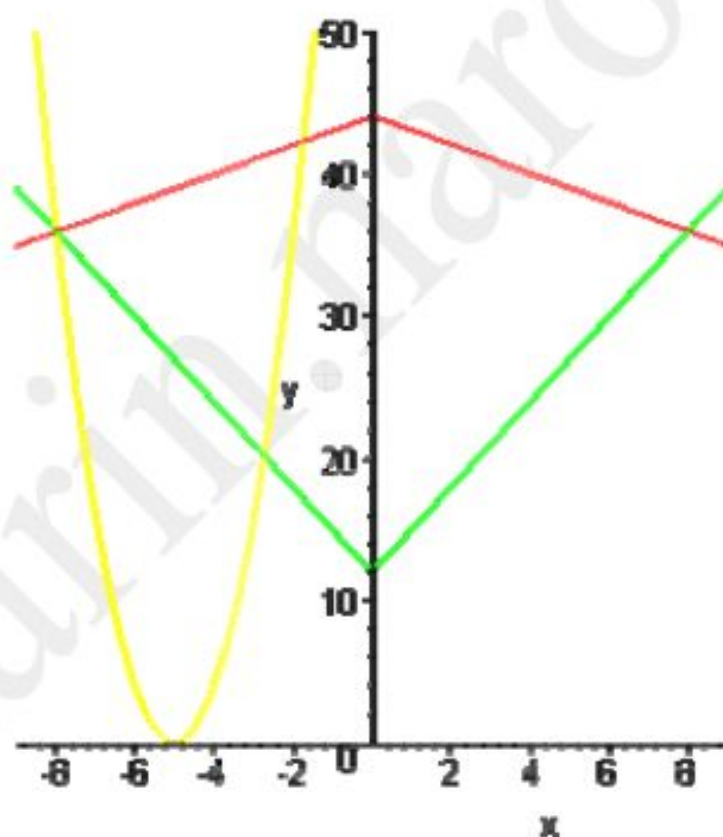
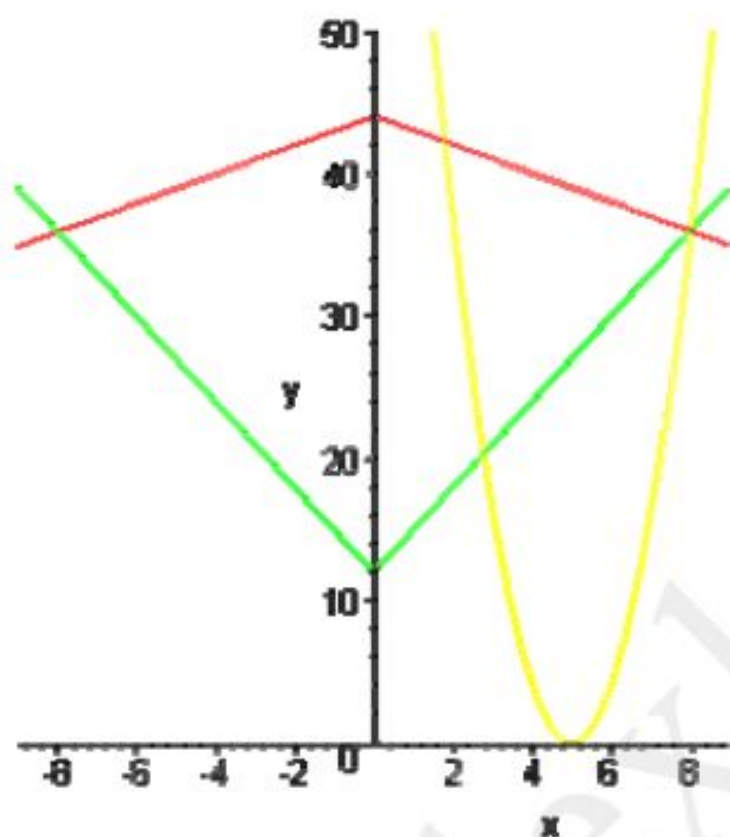
Решения вообще будут, если $16 - 2|x| \geq 0$; $\rightarrow |x| \leq 8 \rightarrow -8 \leq x \leq 8$.

Это важный факт, он будет использован позже.

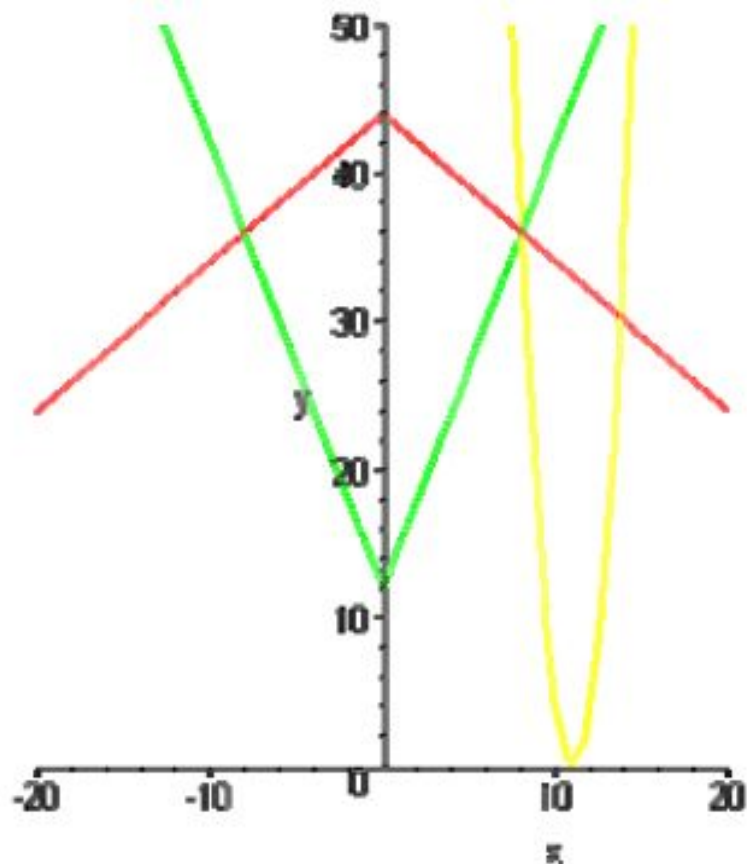
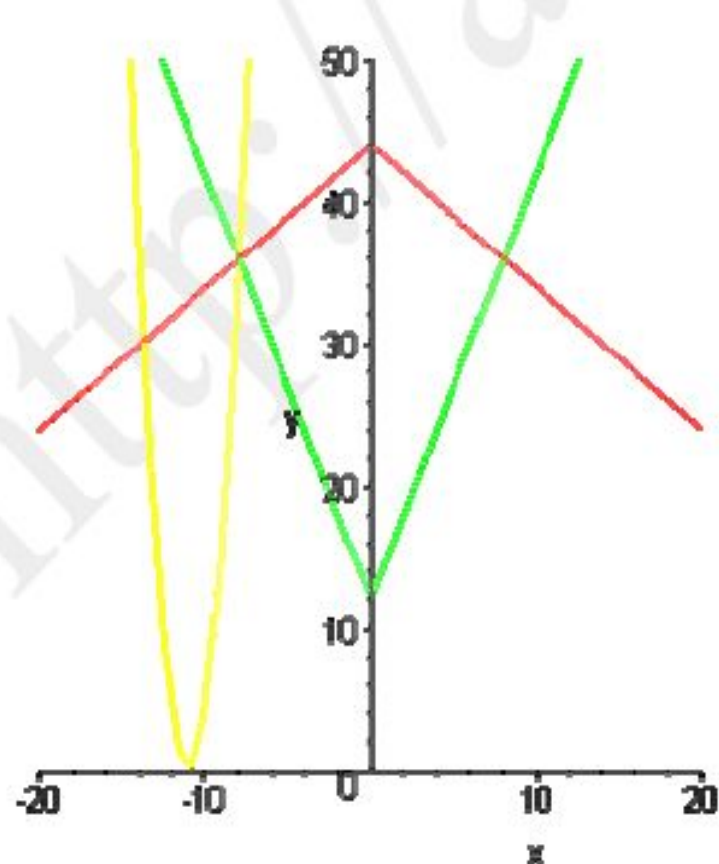
Теперь преобразуем наше уравнение.

$$\begin{cases} (2x - a)^2 - |x| - 28 = 16 - 2|x| \\ (2x - a)^2 - |x| - 28 = -16 + 2|x| \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (2x - a)^2 = 44 - |x| \\ (2x - a)^2 = 3|x| + 12 \end{cases}$$

Теперь построим графики трех функций $f_1 = (2x - a)^2$; $f_2 = 44 - |x|$; $f_3 = 3|x| + 12$;



Наличие трех решений показано на двух верхних графиках. Понятно, что при любом другом расположении параболы никак не получить трех точек пересечения. Конечно, возможны еще два случая, изображенные ниже:



Но в этих случаях два корня из трех не будут попадать в промежуток от -8 до 8 , о чем мы говорили выше.

Точку пересечения ломаных найти несложно

$$44 - |x| = 3|x| + 12 \rightarrow |x| = 8;$$

Находим a .

$$|(2x - a)^2 - 36| = 0 \rightarrow 2x - a = \pm 6; \rightarrow a = 22, -22, 10, -10$$

Описанным чуть выше двум случаям, которые удовлетворяют условию задачи, соответствуют значения $a = \pm 10$

Ответ: $a = \pm 10$

C2. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $\log_{\cos x - a}(\sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x + \sqrt{3} \sin x + \cos x + \sqrt{3} + 1) = 0$ не имеет корней.

Решение:

$$\text{C2. } \log_{\cos x - a} (\sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x + \cos x + \sqrt{3} \sin x + \sqrt{3} + 1) = 0$$

Уравнение не имеет корней, если

$$\begin{cases} \cos x - a < 0, \\ \cos x - a = 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \geq \cos x, \\ a = \cos x \neq -1. \end{cases}$$

По определению логарифма имеем:

$$\sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x + \cos x + \sqrt{3} \sin x + \sqrt{3} + 1 = 1.$$

Найдём $\cos x$.

$$2 \sin x \cos x - \sqrt{3} \cos^2 x + \sqrt{3} \sin^2 x + \sqrt{3} \sin x + \cos x + \sqrt{3} = 0,$$

$$\cos x(2 \sin x + 1) + \sqrt{3}(\sin^2 x + \sin x + 1 - \cos^2 x) = 0,$$

$$\cos x(2 \sin x + 1) + \sqrt{3}(2 \sin^2 x + \sin x) = 0,$$

$$\cos x(2 \sin x + 1) + \sqrt{3} \sin x(2 \sin x + 1) = 0,$$

$$(2 \sin x + 1)(\cos x + \sqrt{3} \sin x) = 0,$$

$$1. \ 2 \sin x + 1 = 0 \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{2}, \cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$2. \ \cos x + \sqrt{3} \sin x = 0 \Rightarrow \sqrt{3} \sin x = -\cos x, \operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Найдём значение a , решив систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} a \geq \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ a = \frac{\sqrt{3}}{2} - 1, \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ a = -\frac{\sqrt{3}}{2} - 1; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right\} \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{2}; +\infty \right), \right. \\ \left. \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right\} \cup \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}; +\infty \right); \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right\} \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{2}; +\infty \right).$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right\} \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{2}; +\infty \right).$$

С3. Найдите наименьшее значение меньшего из корней уравнения $x^2 + 9x + ax = 22 + a$, если множеством значений параметра a является промежуток $(-\infty; -7]$.

Решение:

$$\text{СЗ. } x^2 + 9x + ax = 22 + a \quad x^2 + 9x - 22 = a(1 - x).$$

1) $1 - x = 0 \quad x = 1$. при $x = 1 \Rightarrow 1 + 9 - 22 \neq 0$.
 $x = 1$ — не является корнем уравнения.

$$2) 1 - x \neq 0, \text{ тогда } \frac{x^2 + 9x - 22}{1 - x} = a.$$

Рассмотрим функцию $y = \frac{x^2 + 9x - 22}{1 - x}, x \neq 1$.

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{(2x + 9)(1 - x) + x^2 + 9x - 22}{(1 - x)^2} = \\ &= \frac{2x - 2x^2 + 9 - 9x + x^2 + 9x - 22}{(1 - x)^2} = \frac{-x^2 + 2x - 13}{(x - 1)^2} = \\ &= \frac{-(x^2 - 2x + 13)}{(x - 1)^2} \end{aligned}$$

на $D(y)$ $x^2 - 2x + 13 > 0$, значит, $y'(x) < 0$, таким образом, функция $y = \frac{x^2 + 9x - 22}{1 - x}$ убывает на промежутке $(-\infty; 1)$ и на промежутке $(1; +\infty)$ (см. рис. 119).

При $a = -7$ уравнение $\frac{x^2 + 9x - 22}{1 - x} = -7$ имеет 2 корня:
 $x = -5$ и $x = 3$.

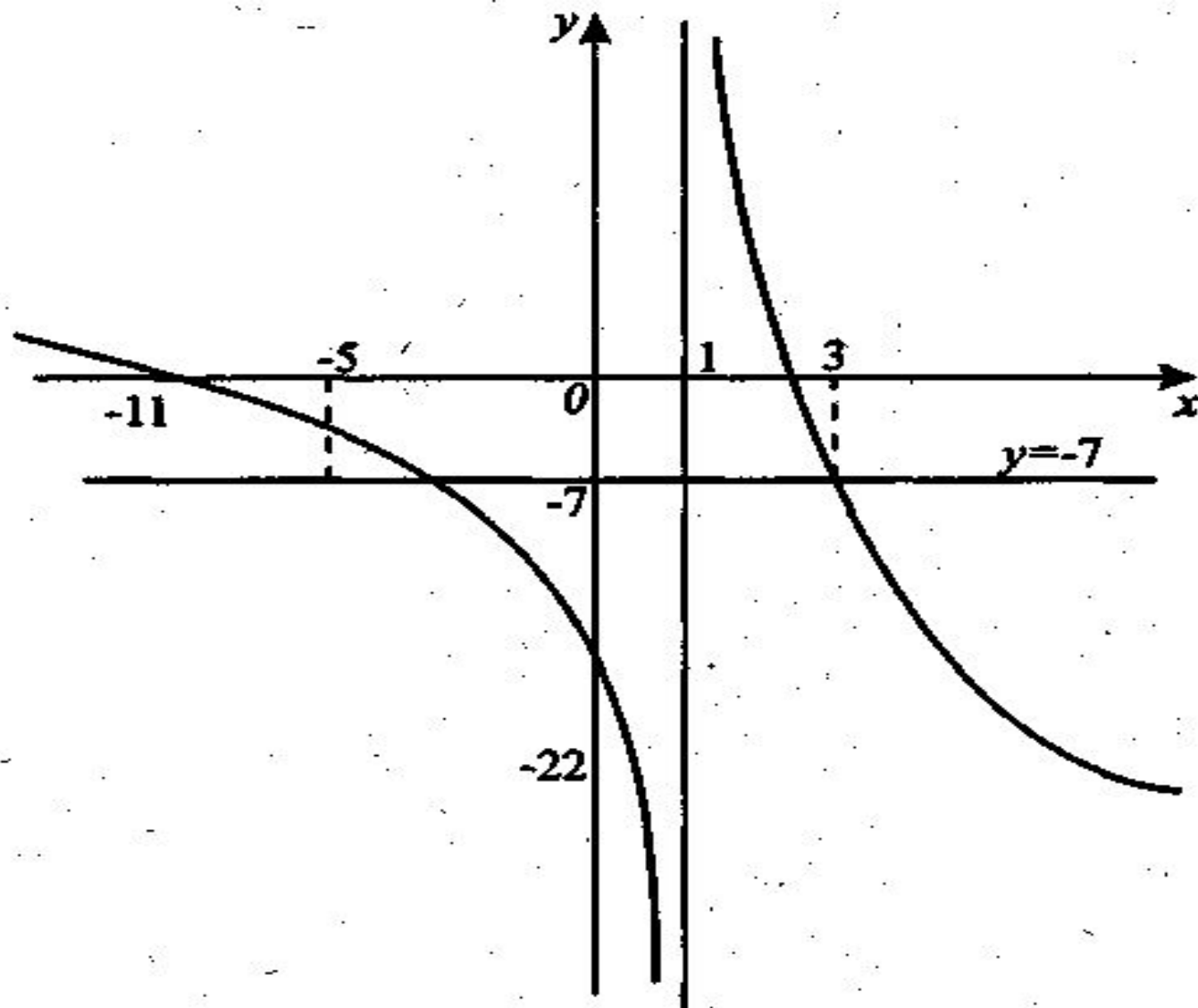


Рис. 119.

При $a < -7$ меньший корень больше -5 , но меньше 1 , следовательно, наименьшее значение меньшего из корней равно -5 .

Ответ: -5 .

С4. В основании правильной четырехугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ расположен квадрат $ABCD$. Точка M является центром грани $AA_1 B_1 B$, а на ребре AD выбрана точка N так, что $\frac{AN}{ND} = p$. При каких значениях параметра p площадь треугольника NCC_1 равна двум площадям сечения пирамиды $MNB B_1$ плоскостью, проходящей через середины ребер $B_1 M$, NB , NB_1 ?

Решение:

С4. 1. Пусть $O \in B_1 M$, $E \in NB$, $Q \in NB_1$ (см. рис. 120). По условию точки O , E , Q — середины соответствующих ребер, значит, OQ и EQ — средние линии граней $MB_1 N$ и BNB_1 . Следовательно, сечением пирамиды $MNB B_1$ плоскостью OEQ является параллелограмм $OQEF$, тогда $S_{NCC_1} = 2S_{OQEF}$.

2. Обозначим через a сторону квадрата $ABCD$, через h — высоту призмы, тогда $AD = a$, $CC_1 = h$.

$$\frac{AN}{ND} = p, \quad p > 0, \text{ откуда } AN = \frac{ap}{p+1}, \quad ND = \frac{a}{p+1}.$$

$$\begin{aligned} \text{В } \triangle NDC: NC &= \sqrt{DC^2 + ND^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{p+1}\right)^2} = \\ &= \frac{a\sqrt{p^2 + 2p + 2}}{p+1}, \quad S_{NCC_1} = \frac{1}{2} NC \cdot CC_1 = \frac{ah\sqrt{p^2 + 2p + 2}}{p+1}. \end{aligned}$$

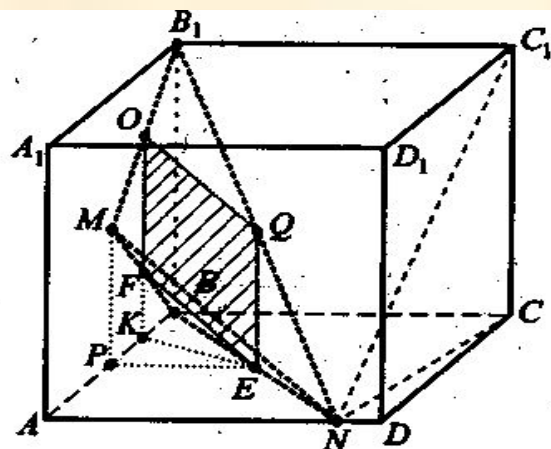


Рис. 120.

3. В четырёхугольнике AA_1B_1B проведём $MP \parallel BB_1$ и продолжим отрезок OF до пересечения с AB , тогда $MP \perp AB$,

$$OK \perp AB, AM = \frac{1}{2}AB_1 = \frac{\sqrt{a^2 + h^2}}{2}, PK = \frac{1}{2}PB = \frac{a}{4}.$$

4. В $\triangle ABN$: EP — средняя линия, $EP = \frac{1}{2}AN = \frac{ap}{2(p+1)}$.

В $\triangle KPE$:

$$KE = \sqrt{KP^2 + PE^2} = \sqrt{\frac{a^2}{16} + \left(\frac{ap}{2(p+1)}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5p^2 + 2p + 1}}{4(p+1)}.$$

$BB_1 \perp ABC$, $OK \parallel BB_1 \Rightarrow OK \perp ABC$, $OK \perp KE$, значит, KE — высота параллелограмма $OQEF$.

$$S_{OQEF} = QE \cdot KE = \frac{ah\sqrt{5p^2 + 2p + 1}}{4(p+1)},$$

$$2S_{OQEF} = \frac{ah\sqrt{5p^2 + 2p + 1}}{2(p+1)}$$

$$\text{Имеем, } \frac{ah\sqrt{p^2 + 2p + 2}}{p+1} = \frac{ah\sqrt{5p^2 + 2p + 1}}{2(p+1)},$$

$$4p^2 + 8p + 8 = 5p^2 + 2p + 1, p^2 - 6p - 7 = 0,$$

$$p_1 = 7, p_2 = -1. \text{ — не удовлетворяет условию } p > 0.$$

Ответ: 7.

C5. Найдите все значения параметра a , при которых система уравнений

$$\begin{cases} 2 \cdot 1000^x + 16 - a^2 - 2a = (2a + 9)(y - 1)^2 - 2ay, \\ (x^2 + 1)\lg(y - 1) = x^3 + x \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения

Решение:

$$\text{C5. } \begin{cases} 2 \cdot 1000^x + 16 - a^2 - 2a = (2a + 9)(y - 1)^2 - 2ay, \\ (x^2 + 1)\lg(y - 1) = x^3 + x. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы выразим y через x .

$$\lg(y - 1) = \frac{x(x^2 + 1)}{x^2 + 1}, \quad y - 1 = 10^x, \quad y = 10^x + 1.$$

Подставим $y = 10^x + 1$ в первое уравнение системы

$$2 \cdot 10^{3x} + 16 - a^2 - 2a = (2a + 9) \cdot 10^{2x} - 2a(10^x + 1).$$

$$a^2 + 2a - 16 - 2 \cdot 10^{3x} + 2a \cdot 10^{2x} + 9 \cdot 10^{2x} - 2a \cdot 10^x - 2a = 0.$$

$$a^2 - 2(10^x - 10^{2x})a - (2 \cdot 10^{3x} - 9 \cdot 10^{2x} + 16) = 0.$$

$$a_{1,2} = (10^x - 10^{2x}) \pm \sqrt{10^{2x} - 2 \cdot 10^{3x} + 10^{4x} + 2 \cdot 10^{3x} - 9 \cdot 10^{2x} + 16}.$$

$$a_{1,2} = (10^x - 10^{2x}) \pm (10^{2x} - 4), \quad 10^{2x} - 4 \neq 0, \quad 10^x \neq 2.$$

$$a_1 = 10^x - 4, \quad a_2 = -2 \cdot 10^{2x} + 10^x + 4.$$

$$1. \quad 10^x = a + 4, \quad a + 4 > 0, \quad a > -4.$$

Так как $10^x \neq 2$, то $a \neq -2$.

Система имеет одно решение при $a > -4$, $a \neq -2$

$$2. \quad a = -2 \cdot 10^{2x} + 10^x + 4 \quad (1)$$

По условию система имеет ровно два различных решения. Найдём, при каких значениях a уравнение (1) имеет единственный корень. Рассмотрим функцию $y = -2 \cdot 10^{2x} + 10^x + 4$, $10^x = t$, $t > 0$.

$$y = -2t^2 + t + 4, \quad t_0 = -\frac{1}{2 \cdot (-2)} = \frac{1}{4}, \quad y\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + 4 = \frac{33}{8}$$

(см. рис. 121).

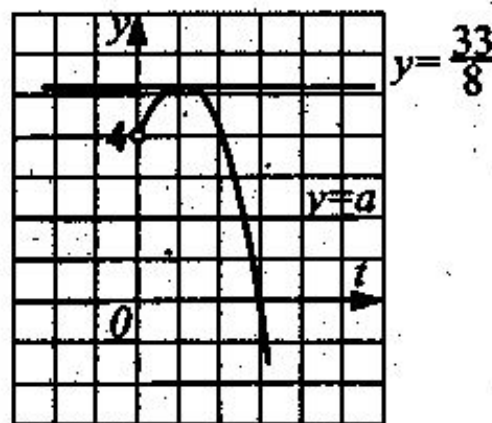


Рис. 121.

Уравнение (1) имеет единственный корень при $a = \frac{33}{8}$ и при $a \leq 4$.

Итак, исходная система имеет ровно два решения, если $a \in (-4; -2) \cup (-2; 4] \cup \left\{\frac{33}{8}\right\}$.

Ответ: $a \in (-4; -2) \cup (-2; 4] \cup \left\{\frac{33}{8}\right\}$.

Спасибо за внимание

