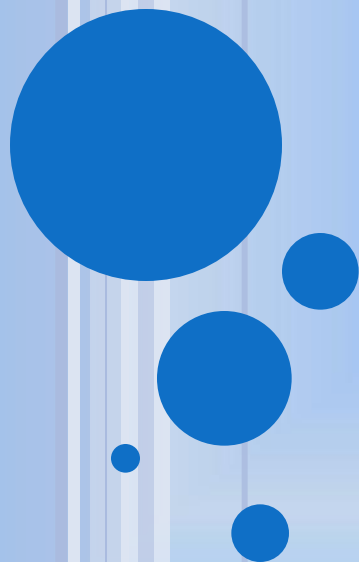


ЗАДАЧИ НА ДЕЛИМОСТЬ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

(по материалам ЕГЭ)

Кретьова Д.Н. МОУ «Лицей №47» г.Саратов



Задача 1.

Найдите все натуральные числа, которые делятся на 42 и имеют ровно 42 различных натуральных делителя (включая единицу и само число).

Для решения используем формулу нахождения числа (количества) делителей какого-либо числа :

$$y = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1) \dots (\alpha_k + 1),$$

где y - количество делителей

- показатель степени в разложении на простые

множители-

$$\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_k$$



- 1) Разложим число 42 на простые множители:

$$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$$

- 2) Пусть A - некоторое число. Раз 42 — делитель числа A , то число A делится на 2, 3 и 7, значит разложение числа A на множители можно записать в виде:

$$A = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 7^{\alpha_3} \cdot Q, \text{ где } Q - \text{некоторое число}$$

- 3) Применим формулу нахождения количества делителей какого-либо числа:

где $y = 42$

$$y = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1) \dots (\alpha_k + 1),$$

- Получим:

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1) \dots (\alpha_k + 1) = 42$$



- 4) Заменим 42 на его разложение на простые множители:

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1) \dots (\alpha_k + 1) = 2 \cdot 3 \cdot 7,$$

- 5) Т.к. 42 раскладывается на 3 простых множителя, значит $k = 3$

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1) = 2 \cdot 3 \cdot 7$$

- 5) Т.к. левая и правая части состоят из произведения одинакового числа простых множителей, тогда сами множители равны с точностью до порядка.



- 6) Найдем показатели степеней в разложении числа A :

$$1) \begin{cases} \alpha_1 + 1 = 2, \\ \alpha_2 + 1 = 3 \\ \alpha_3 + 1 = 7 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} \alpha_1 + 1 = 3, \\ \alpha_2 + 1 = 7 \\ \alpha_3 + 1 = 2 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \alpha_1 + 1 = 2, \\ \alpha_2 + 1 = 7 \\ \alpha_3 + 1 = 3 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} \alpha_1 + 1 = 7, \\ \alpha_2 + 1 = 2 \\ \alpha_3 + 1 = 3 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \alpha_1 + 1 = 3, \\ \alpha_2 + 1 = 2 \\ \alpha_3 + 1 = 7 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} \alpha_1 + 1 = 7, \\ \alpha_2 + 1 = 3 \\ \alpha_3 + 1 = 2 \end{cases}$$



□ 7) Решив системы, получим, что

$$A_1 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7^6 = 2117682$$

$$A_2 = 2 \cdot 3^6 \cdot 7^2 = 71442$$

$$A_3 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7^6 = 1411788$$

$$A_4 = 2^2 \cdot 3^6 \cdot 7 = 20412$$

$$A_5 = 2^6 \cdot 3 \cdot 7^2 = 9408$$

$$A_6 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 7 = 4032$$



ЗАДАЧА 2.

- ▣ НАЙДУТСЯ ЛИ ХОТЯ БЫ ТРИ ДЕСЯТИЗНАЧНЫХ ЧИСЛА, ДЕЛЯЩИЕСЯ НА 11, В ЗАПИСИ КАЖДОГО ИЗ КОТОРЫХ ИСПОЛЬЗОВАНЫ ВСЕ ЦИФРЫ ОТ 0 ДО 9?**



□ РЕШЕНИЕ

- Число делится на 11 тогда и только тогда, когда разность между суммами его цифр, стоящих на нечётных и на чётных местах, делится на 11.



- 1) Запишем все цифры подряд: 9876543210. В написанном числе указанная разность сумм равна 5.
 $9+7+3+1=25$, $8+6+4+2+0=20$, $25-20=5$
- 2) Меняя местами, например, 5 и 8, мы одну сумму увеличиваем на 3, а другую уменьшаем на 3. Значит, разность между суммами его цифр, стоящих на нечётных и на чётных местах, становится равной 11. Меняя местами, например, 4 и 1, или 3 и 6, получаем требуемые примеры.

Ответ: Да.



ЗАДАЧА 3.

- ▣ НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА
УДОВЛЕТВОРЯЮТ УСЛОВИЮ
 $AB=CD$. МОЖЕТ ЛИ ЧИСЛО
 $A+B+C+D$ БЫТЬ ПРОСТЫМ?**



- Решение.
- Выразим переменную a через остальные

переменные из равенства $ab = cd$ $a = \frac{cd}{b}$

Подставим этот результат в выражение $a + b + c + d$:

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= \frac{cd}{b} + b + c + d = \frac{cd + b^2 + bc + bd}{b} = \frac{c(b + d) + b(b + d)}{b} = \\ &= \frac{(b + c)(b + d)}{b}. \end{aligned}$$



- Заметим, что последняя дробь является целым числом (т.к. исходно мы преобразовали целое число $a+b+c+d$). Следовательно, числитель должен нацело делиться на знаменатель, или, иначе говоря, данную дробь можно сократить так, чтобы в знаменателе осталась единица. При сокращении этой дроби, часть делителей числа b (имеются в виду делители, присутствующие в каноническом представлении числа b) сократится с первой скобкой, оставшаяся часть — со второй. Предположим, что после сокращения от первой скобки осталось натуральное число m от второй натуральное число n .



В этом случае можно утверждать, что $m, n > 1$

$$(m \geq \frac{b+c}{b} > \frac{b}{b} = 1, \text{ аналогично } - \text{ с } n).$$

Следовательно, число $a+b+c+d=mn$, где $m, n > 1$.

Значит, это число не простое.

Ответ: это число не может быть простым.



ЗАДАЧА 4.

- ▣ НАЙДИТЕ ВСЕ ПАРЫ
НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ,
НАИМЕНЬШЕЕ ОБЩЕЕ КРАТНОЕ
КОТОРЫХ РАВНО 78, А
НАИБОЛЬШИЙ ОБЩИЙ
ДЕЛИТЕЛЬ РАВЕН 13.**



- Решение.
- 1. Пусть a и b натуральные числа, тогда по свойству $\text{НОК}(a,b) \cdot \text{НОД}(a,b) = a \cdot b$ имеем $13 \cdot 78 = a \cdot b$.
- 2. Разложим левую часть равенства на простые множители $13 \cdot 13 \cdot 2 \cdot 3 = a \cdot b$
- 3. Подбором находим искомые пары чисел $a = 13 \cdot 3 = 39$ $b = 13 \cdot 2 = 26$ или $a = 13 \cdot 3 \cdot 2 = 78$ $b = 13$
- Ответ: 39 и 26, 78 и 13.



ЗАДАЧА 5.

- НАЙДИТЕ ВСЕ НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА, ПОСЛЕДНЯЯ ДЕСЯТИЧНАЯ ЦИФРА КОТОРЫХ 0 И КОТОРЫЕ ИМЕЮТ РОВНО 15 РАЗЛИЧНЫХ НАТУРАЛЬНЫХ ДЕЛИТЕЛЕЙ (ВКЛЮЧАЯ ЕДИНИЦУ И САМО ЧИСЛО).**



□ Решение

- 1. Пусть p натуральное число, удовлетворяющие условию задачи. Если натуральное число p имеет 15 различных делителей и кол-во делителей определяется по формуле $p=(m+1)(n+1)$, где m, n кратности простых делителей.



- 2. По условию задачи должны быть по меньшей мере 2 простых делителя – 2 и 5.
- 3. $15=(m+1)(n+1)$; $m=2$, $n=4$ (единственное решение без привязки к конкретным множителям).
- Существуют 2 числа

и

$$N = 2^2 \cdot 5^4 = 2500$$

$$N = 2^4 \cdot 5^2 = 400.$$

Ответ: 2500; 400



ЗАДАЧА 6.

- ▣ НАЙДИТЕ ВСЕ ПАРЫ
НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ,
РАЗНОСТЬ КВАДРАТОВ КОТОРЫХ
РАВНА 55.**



□ Решение

Пусть m и n натуральные числа и $m^2 - n^2 = 55$
тогда $(m-n)(m+n) = 5 \cdot 11$ или $(m-n)(m+n) = 55 \cdot 1$.

Рассмотрим системы:

$$1) \quad \begin{cases} m - n = 5 \\ m + n = 11 \end{cases} \quad 3) \quad \begin{cases} m - n = 1 \\ m + n = 55 \end{cases}$$

$$2) \quad \begin{cases} m - n = 11 \\ m + n = 5 \end{cases} \quad 4) \quad \begin{cases} m - n = 55 \\ m + n = 1 \end{cases}$$

2 из 4 систем не имеют решения в натуральных числах, следовательно $m=8$, $n=3$ и $m=28$, $n=27$.

Ответ: $m=8$, $n=3$ и $m=28$, $n=27$.

