4.8. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

Пусть прямая задана уравнением:

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}$$

И пусть задана плоскость

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Рассмотрим возможные случаи ориентации прямой и плоскости:

1

Прямая принадлежит плоскости.
Тогда направляющий вектор прямой

$$\vec{s} = (m, n, p)$$

ортогонален нормальному вектору плоскости

$$\vec{n} = (A, B, C)$$

И пусть точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$

принадлежит прямой.

Тогда выполняются следующие условия:

Поскольку вектора $\vec{s}$ и $\vec{n}$

в этом случае перпендикулярны, и их скалярное произведение этих векторов равно нулю:

$$(\vec{n}, \vec{s}) = Am + Bn + Cp = 0 \qquad 1$$

Поскольку точка M_0 будет принадлежать плоскости, то ее координаты удовлетворяют уравнению плоскости:

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \qquad 2$$

2

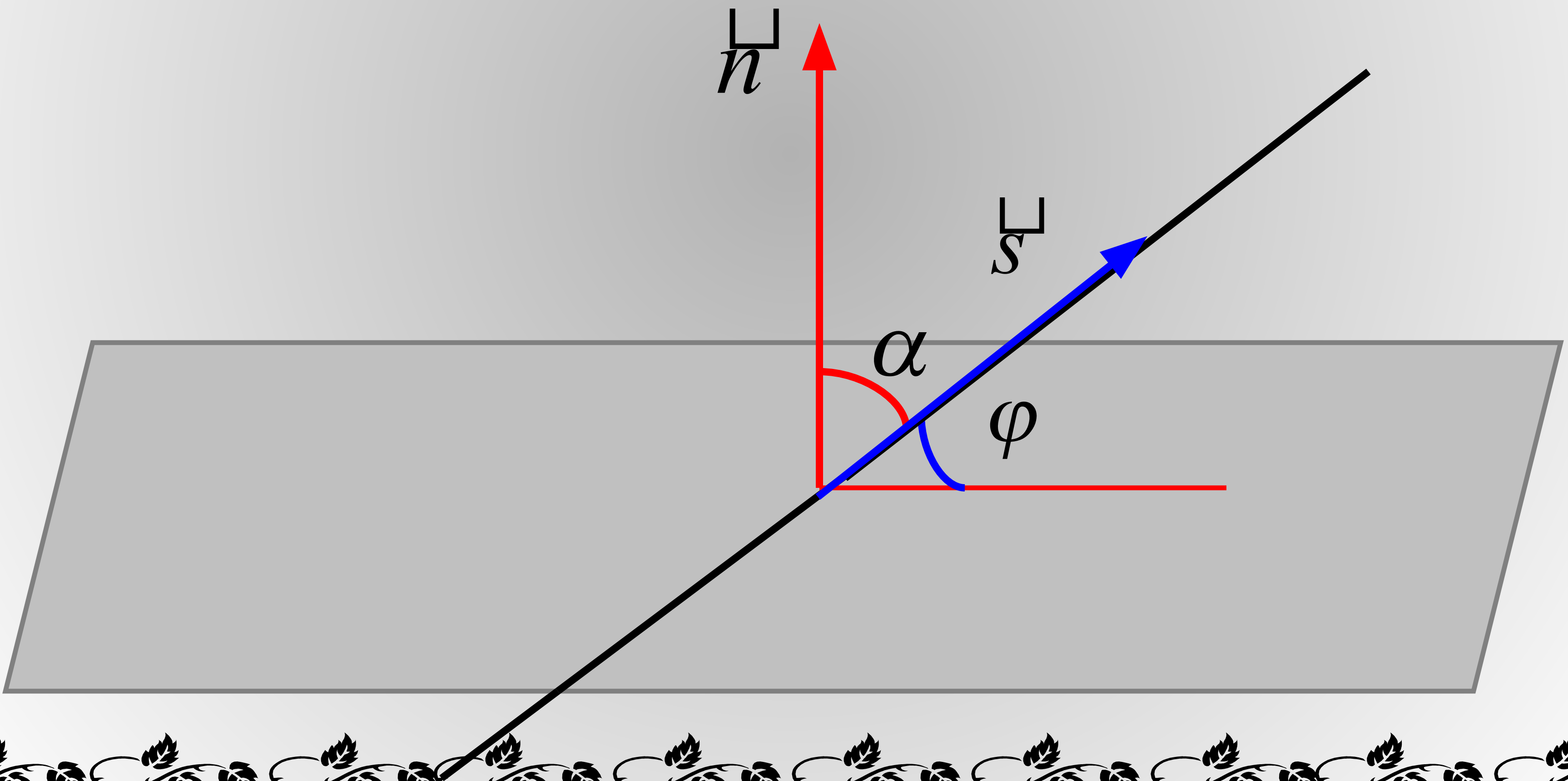
Прямая параллельна плоскости.
Тогда выполняется только условие (1).

3

Прямая пересекает плоскость в одной точке.
Тогда выполняется условие

$$(\vec{n},\vec{s}) = Am + Bn + Cp \neq 0$$

Углом между прямой и плоскостью называется меньший из двух углов между этой прямой и ее проекцией на плоскость.



Синус угла φ между прямой и плоскостью равен косинусу угла α между нормальным вектором плоскости и направляющим вектором прямой:

$$\sin\varphi = \cos\alpha$$

Найдем угол α, как угол между двумя векторами:

$$\cos\alpha = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

угол между прямой и плоскостью

Если прямая перпендикулярна плоскости, то направляющий вектор прямой параллелен нормальному вектору плоскости:

$$\vec{s} \parallel \vec{n}$$

$$\boxed{\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}}$$

условия перпендикулярности прямой и плоскости

Если прямая параллельна плоскости, то

$$\vec{s} \perp \vec{n}$$

$$Am + Bn + Cp = 0$$

условия параллельности прямой и плоскости