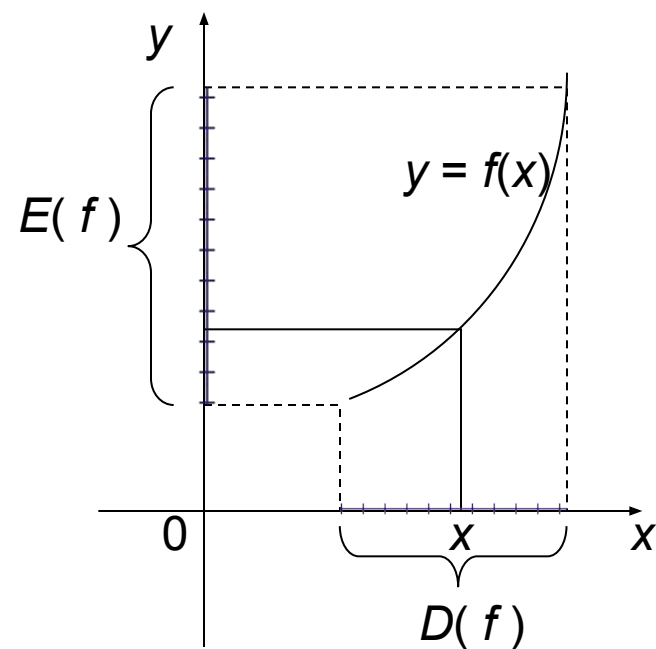


Взаимно обратные функции



Если каждому значению x из некоторого множества действительных чисел поставлено в соответствие по определённому правилу f число y , то, говорят, что на этом множестве определена функция.

Прямая Задача.

$$y = f(x), x - !$$

Найти значение **y** при заданном значении **x**.

Дано: $y = 2x + 3$

Найти: $y(5)$

Решение:

$$y(5) = 2 \cdot 5 + 3 = 13$$

Ответ: $y(5) = 13$

Обратная Задача.

$$y = f(x), y - !$$

Найти значение **x** при заданном значении **y**.

Дано: $y = 2x + 3, y(x) = 42$

Найти: x

Решение:

$$42 = 2x + 3$$

$$2x = 39$$

$$x = 19,5$$

Ответ: $y(19,5) = 42$

Дано: $v(t) = v_0 - gt$

Найти: **$t - ?$**

Решение:

$$v_0 - gt = v$$

$$gt = v_0 - v$$

$$t = \frac{v_0 - v}{g} \quad , \text{ т.е. } \quad t(v) = \frac{v_0 - v}{g}$$

Обратимая функция

Обратная функция к **$v(t)$**

Если функция $y = f(x)$ принимает каждое своё значение y только при одном значении x , то эту функцию называют обратимой.

$$y = 2x + 2$$

$$y = 2 + \frac{1}{x}$$

$$y = x^3$$

The diagram illustrates the non-invertibility of the function $y = x^2$. It shows the equation $y = x^2$ at the top, with two arrows pointing downwards to the equations $x_1 = \sqrt{y}$ and $x_2 = -\sqrt{y}$. This indicates that for a single value of y , there are two possible values of x , which is why $y = x^2$ is not invertible over its entire domain.

$$y = x^2$$
$$x_1 = \sqrt{y} \quad x_2 = -\sqrt{y}$$

Пусть $y = f(x)$ – обратимая функция. Тогда каждому y из множества значений функции соответствует одно определённое число x из области её определения, такое, что $f(x) = y$. Это соответствие определяет функцию x от y , которую обозначим $x = g(y)$. Поменяем местами x и y : $y = g(x)$.

Функцию $y = g(x)$ называют **обратной** к функции $y = f(x)$.

Дано: $y = \frac{1}{x-2}$

Найти функцию, обратную данной $y = f^{-1}(x)$.

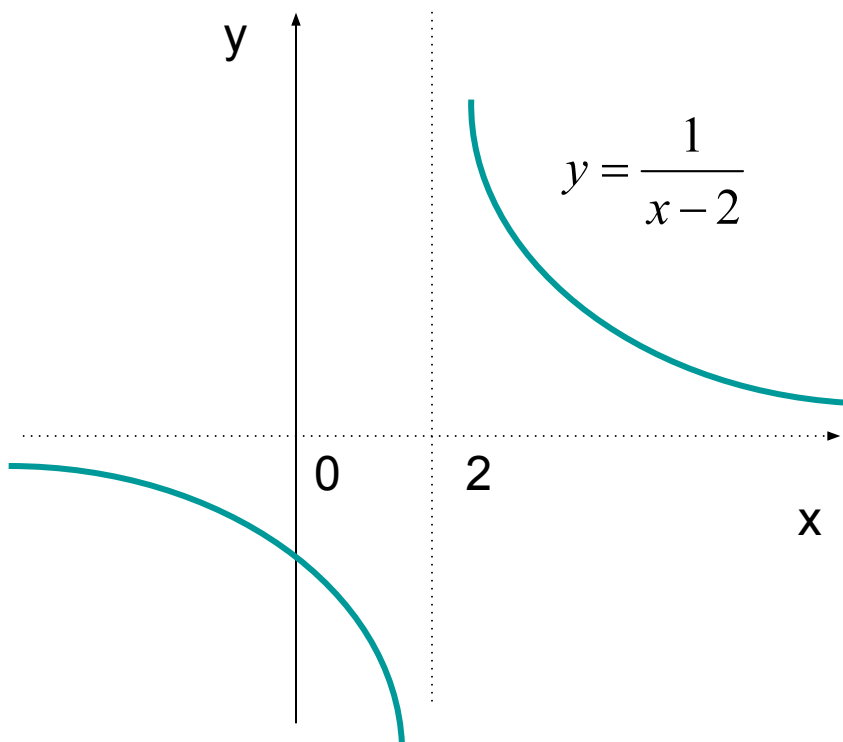
Решение:

$$\frac{1}{x-2} = y$$

$$x-2 = \frac{1}{y}$$

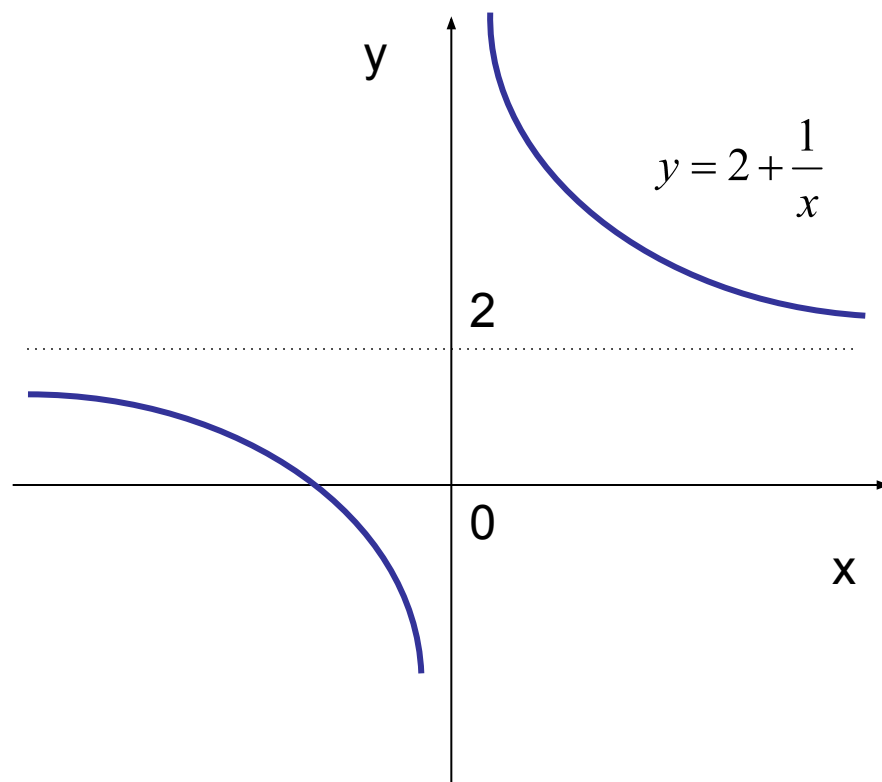
$$x = 2 + \frac{1}{y} \quad \Longrightarrow \quad y = 2 + \frac{1}{x}$$

Ответ: $f^{-1}(x) = 2 + \frac{1}{x}$



1. $D(y) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$

2. $E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$



1. $D(y) = (-\infty; 0) \cup$

$(0; +\infty)$
2. $E(y) = (-\infty; 2) \cup$
 $(2; +\infty)$

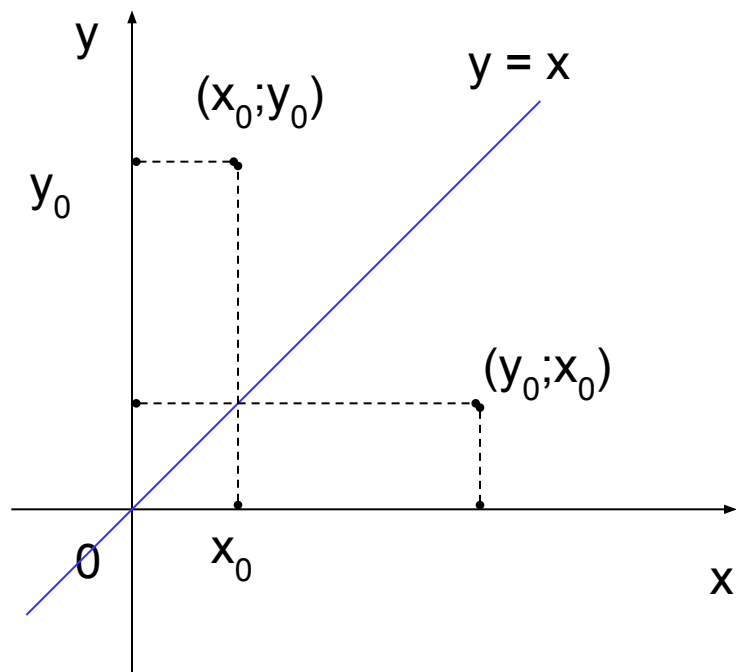
Свойства обратных функций.

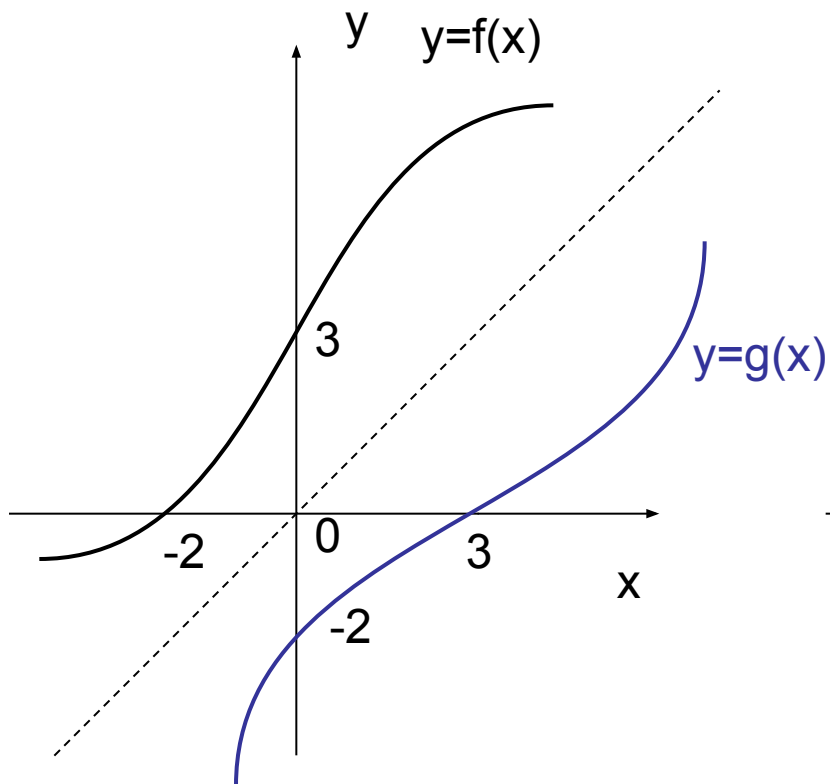
1. Область определения обратной функции f^{-1} совпадает с множеством значений исходной f , а множество значений обратной функции f^{-1} совпадает с областью определения исходной функции f :

$$D(f^{-1}) = E(f), E(f^{-1}) = D(f).$$

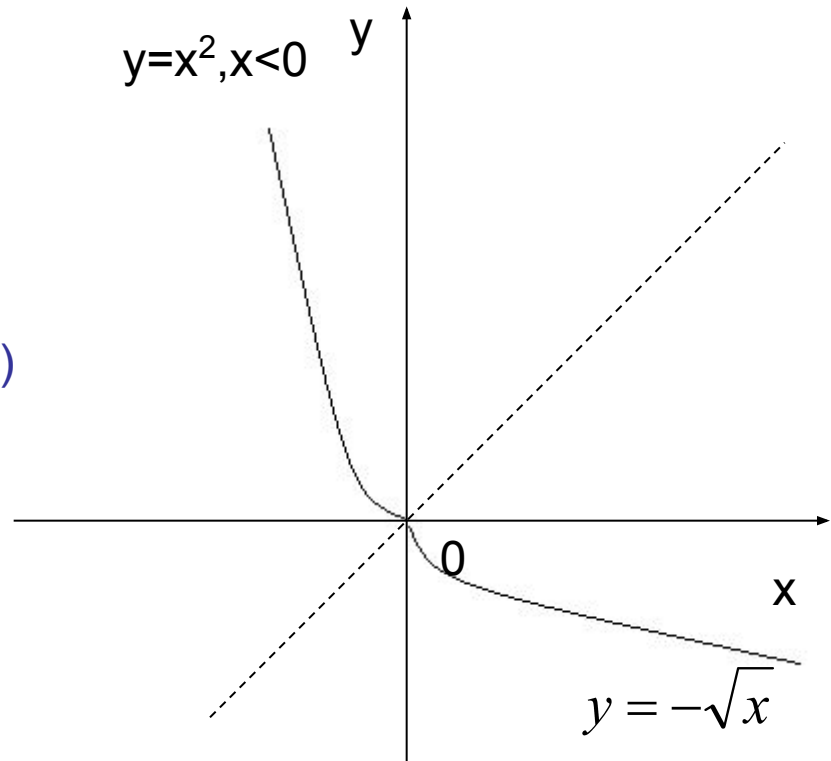
2. Монотонная функция является обратимой:
если функция f возрастает, то обратная к ней функция f^{-1} также возрастает;
если функция f убывает, то обратная к ней функция f^{-1} также убывает.

3. Если функция имеет обратную, то график обратной функции симметричен графику данной функции относительно прямой $y = x$.



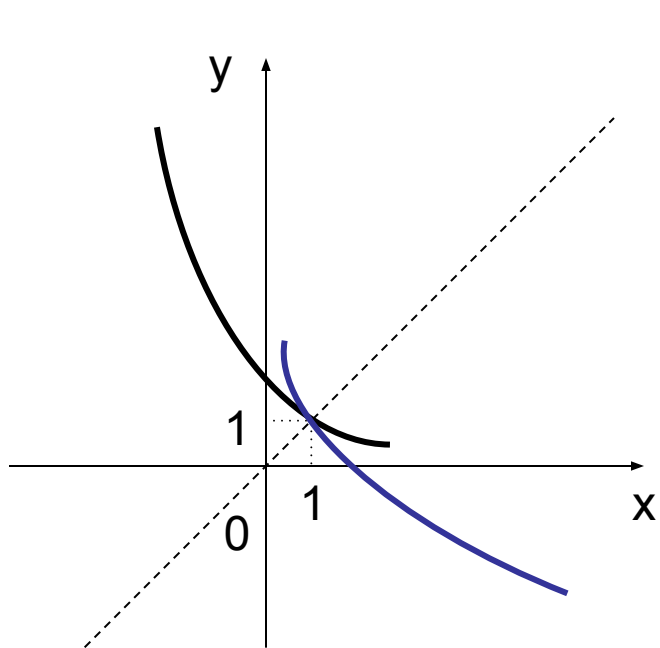


- | | |
|----------------------|----------------------|
| 1. $D(f)=\mathbb{R}$ | 1. $D(g)=\mathbb{R}$ |
| 2. $E(f)=\mathbb{R}$ | 2. $E(g)=\mathbb{R}$ |
| 3. возрастающая | 3. возрастающая |



- | | |
|------------------------|------------------------|
| 1. $D(y)=(-\infty; 0]$ | 1. $D(y)=[0; +\infty)$ |
| 2. $E(y)=[0; +\infty)$ | 2. $E(y)=(-\infty; 0]$ |
| 3. убывающая | 3. убывающая |

Построить график функции, обратной данной.



Дано: $y = x^3$

Построить функцию,
обратную к данной.

Решение: $x^3 = y$

$$x = \sqrt[3]{y} \Rightarrow y = \sqrt[3]{x}$$

