

# ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЁРДОГО ТЕЛА

Шевцова Эвелина Николаевна  
учитель физики  
МКОУ «Аннинская СОШ с УИОП»



2013

# Введение

---

- Вращательным движением твёрдого тела или системы тел называется такое движение, при котором все точки движутся по окружностям, центры которых лежат на одной прямой, называемой осью вращения, а плоскости окружностей перпендикулярны оси вращения.
- Ось вращения может располагаться внутри тела и за его пределами и в зависимости от выбора системы отсчёта может быть как подвижной, так и неподвижной.
- Теорема вращения Эйлера утверждает, что любое вращение трёхмерного пространства имеет ось.



# Оглавление

---

---

▪ <u>Кинематика вращательного движения</u> .....	4
▪ <u>Динамика вращательного движения</u> .....	13
▪ <u>Основное уравнение динамики вращательного движения</u> .....	14
▪ <u>Динамика произвольного движения</u> .....	26
▪ <u>Законы сохранения</u> .....	30
▪ <u>Закон сохранения момента импульса</u> .....	31
▪ <u>Кинетическая энергия вращающегося тела</u> .....	52
▪ <u>Закон сохранения энергии</u> .....	57
▪ <u>Заключение</u> .....	61

«Для составления физических представлений следует освоиться с существованием физических аналогий. Под физической аналогией я понимаю то частное сходство между законами двух каких-нибудь областей науки, благодаря которому одна из них является иллюстрацией для другой»

Максвелл

# КИНЕМАТИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЁРДОГО ТЕЛА

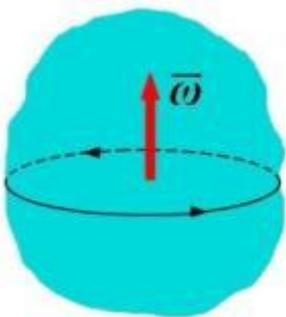


# Направление векторов

---

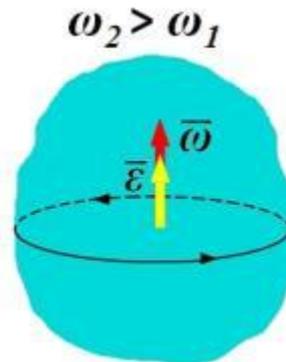
## Направление угловой скорости

- Определяется правилом правого винта: если винт вращать в направлении вращения тела, то направление поступательного движения винта совпадёт с направлением угловой скорости.



## Направление углового ускорения

- При ускоренном вращении векторы угловой скорости и углового ускорения совпадают по направлению. При замедленном вращении вектор углового ускорения направлен противоположно вектору угловой скорости.

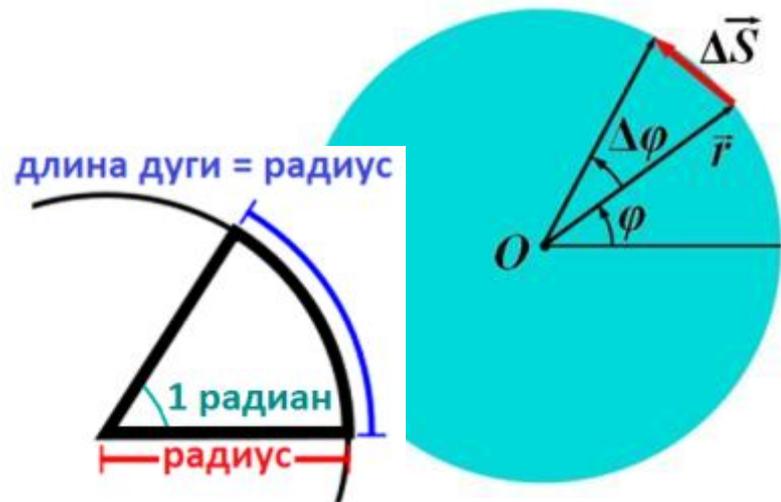


# Аналогия движений

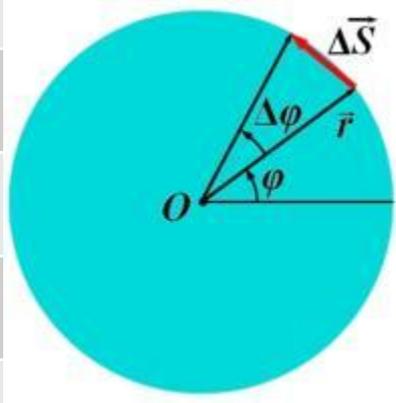
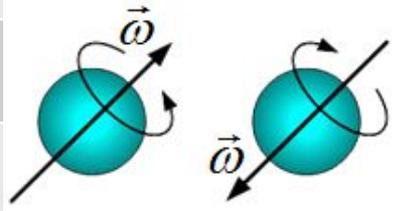
Поступательное движение		Вращательное движение	
Перемещение		Угловое перемещение	
Скорость	$\Delta s^{\perp}, [\Delta s] = \text{м}$	Угловая скорость	$\Delta \varphi, [\Delta \varphi] = \text{рад}$
Ускорение	$v^{\perp} = \frac{\Delta s^{\perp}}{\Delta t}, [v] = \frac{\text{м}}{\text{с}}$ $a^{\perp} = \frac{\Delta v^{\perp}}{\Delta t}, [a] = \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$	Угловое ускорение	$\omega = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}, [\omega] = \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ $\varepsilon = \frac{\Delta \omega^{\perp}}{\Delta t}, [\varepsilon] = \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$

**Прямая задача кинематики:** по заданному как функция времени углу поворота  $\varphi = f(t)$  найти угловую скорость и ускорение.

**Обратная задача:** по заданному как функция времени угловому ускорению  $\varepsilon = f(t)$  и начальным условиям  $\omega_0$  и  $\varphi_0$  найти кинематический закон вращения.

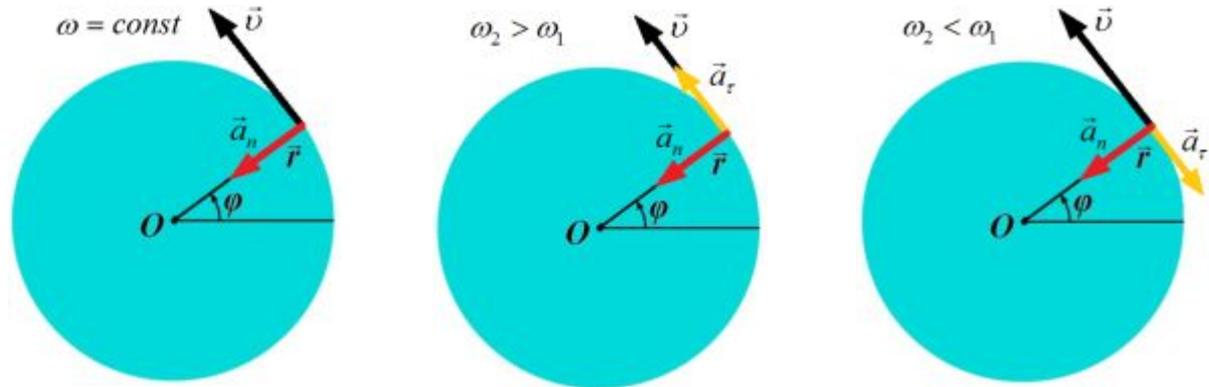


# Аналогия движений

Характеристики движения	Движение материальной точки по окружности	Вращательное движение твёрдого тела
Период	$T = \frac{t}{N}$	
Частота	$\nu = \frac{N}{t} = \frac{1}{T}$	
Угловая скорость	$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$	
Угловое ускорение	$\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T^2} = 2\pi\nu^2$	
Перемещение	$\Delta s = r\Delta\varphi$	
Линейная скорость	$v = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{r\Delta\varphi}{\Delta t} = r\omega$	
Нормальное ускорение	$a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$	
Тангенциальное ускорение	$a_\tau = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{r\Delta\omega}{\Delta t} = r\varepsilon$	
Полное ускорение	$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$	

# Направление векторов скорости и ускорения

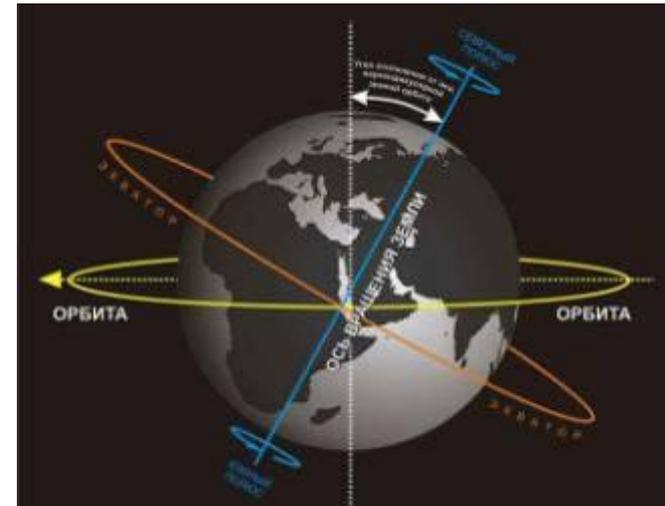
Пример:  
движение против  
часовой стрелки



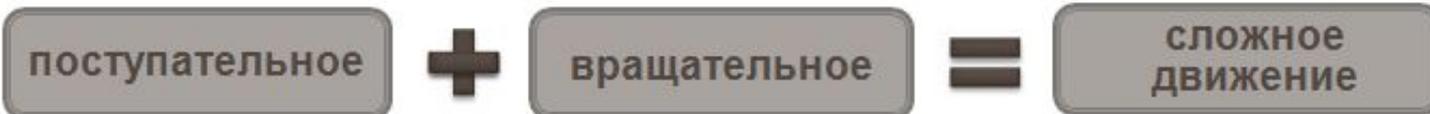
Нормальное ускорение	По радиусу к центру окружности		
Угловая скорость	$\omega = \text{const}$	$\omega_2 > \omega_1$	$\omega_2 < \omega_1$
	Направление: перпендикулярно плоскости рисунка, из-за плоскости		
Линейная скорость	$v = \text{const}$	$v_2 > v_1$	$v_2 < v_1$
	По касательной в направлении движения		
Тангенциальное ускорение	нет	$\Downarrow \Uparrow \Downarrow$ $\vec{a}_\tau \uparrow \uparrow v$	$\Downarrow \Uparrow \Downarrow$ $\vec{a}_\tau \uparrow \downarrow v$
Угловое ускорение	нет	$\Downarrow \Uparrow \Downarrow$ $\varepsilon \uparrow \uparrow \omega$	$\Downarrow \Uparrow \Downarrow$ $\varepsilon \uparrow \downarrow \omega$

# Формулы кинематики вращательного движения

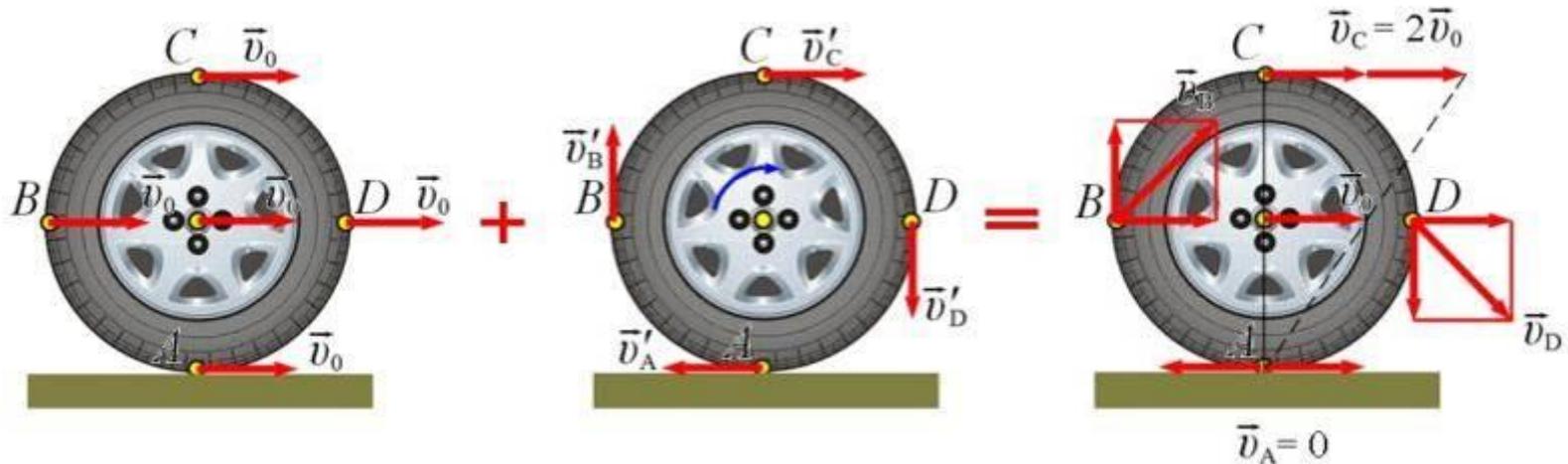
Поступательное	Вращательное
Равномерное	
$a = 0$	$\varepsilon = 0$
$v = \text{const}$	$\omega = \text{const}$
$s = vt$	$\varphi = \omega t$
Равнопеременное	
$a = \frac{v - v_0}{t} = \text{const}$	$\varepsilon = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \text{const}$
$v = v_0 + a_\tau t$	$\omega = \omega_0 + \varepsilon t$
$s = v_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2}$	$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$
$v^2 - v_0^2 = 2a_\tau s$	$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\varepsilon \varphi$
Неравномерное	
$s = f(t)$	$\varphi = f(t)$
$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = s'(t)$	$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \varphi'(t)$
$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = v'(t)$	$\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \omega'(t)$



# Произвольные движения твёрдого тела



**Пример:** плоскопараллельное движение колеса без проскальзывания по горизонтальной поверхности. Качение колеса можно представить как сумму двух движений: поступательного движения со скоростью центра масс тела и вращения относительно оси, проходящей через центр масс.



# Вопросы для обсуждения

---

Методом последовательной съёмки запечатлена кинематика движения Дворцового моста в Санкт-Петербурге. Выдержка 6 секунд. Какую информацию о движении моста можно извлечь из фотографии? Проанализируйте кинематику его движения.



# Читайте дополнительно

---



- Кикоин А.К. Формулы кинематики для вращательного движения. «Квант», 1983, № 11.
- Фистуль М. Кинематика плоскопараллельного движения. «Квант», 1990, № 9
- Черноуцан А.И. Когда вокруг всё вертится... «Квант», 1992, № 9.
- Чивилёв В., Движение по окружности: равномерное и неравномерное. «Квант», 1994, №6.
- Чивилёв В.И. Кинематика вращательного движения. «Квант», 1986, № 11.

«Я ценю умение строить аналогии, которые, если они смелы и разумны, выводят нас за пределы того, что пожелала нам открыть природа, позволяя предвидеть факты ещё до того, как мы их увидим».

Ж. Л. Даламбер

# ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЁРДОГО ТЕЛА





# ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

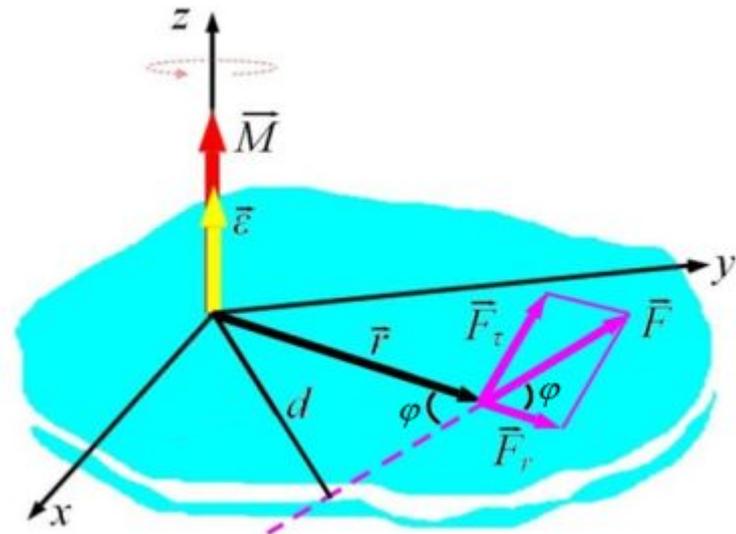


# Динамика вращательного движения

---

- **Динамика поступательного движения** материальной точки оперирует такими понятиями, как сила, масса, импульс.
- Ускорение поступательно движущегося тела зависит от действующей на тело силы (суммы действующих сил) и массы тела (второй закон Ньютона):
- **Основная задача динамики вращательного движения:** Установить связь углового ускорения вращательного движения тела с силовыми характеристиками его взаимодействия с другими телами и собственными свойствами вращающегося тела.

$$\vec{a} = \frac{\sum \vec{F}}{m}$$

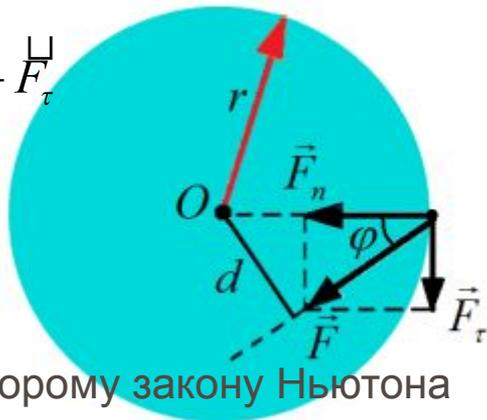


# Основное уравнение динамики вращательного движения

---

Для произвольной точки  
тела массой  $m$

$$\vec{F} = \vec{F}_n + \vec{F}_\tau$$



- По второму закону Ньютона

$$F_n = ma_n, \quad F_\tau = ma_\tau = m\varepsilon r$$

- Из геометрических соображений

$$F_\tau = F \sin \varphi = F \frac{d}{r}, \quad \Rightarrow$$

$$mr^2 \varepsilon = Fd = M$$

Для тела как совокупности  
частиц малых масс

- С учётом векторного характера  $(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_n r_n^2) \varepsilon = \sum \vec{M}_i + \sum \vec{M}_e$
- Скалярная физическая величина, характеризующая распределение массы относительно оси вращения, называется моментом инерции тела:

- $I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_n r_n^2 = \sum m_i r_i^2$   
Сумма моментов внутренних сил  $M_i$  равна нулю, следовательно

$$I \varepsilon = \sum \vec{M}_e = \vec{M}$$

# Экспериментальное изучение закономерностей вращательного движения

---

1. Устройство и принцип действия прибора
2. Исследование зависимости углового ускорения вращения диска от момента действующей силы:
  - от величины действующей силы  $F$  при неизменном значении плеча силы относительно данной оси вращения  $d$  ( $d = \text{const}$ );
  - от плеча силы относительно данной оси вращения при постоянной действующей силе ( $F = \text{const}$ );
  - от суммы моментов всех действующих на тело сил относительно данной оси вращения.
3. Исследование зависимости углового ускорения от свойств вращающегося тела:
  - от массы вращающегося тела при неизменном моменте сил;
  - от распределения массы относительно оси вращения при неизменном моменте сил.
4. Результаты опытов:

$$\epsilon = \frac{\sum M}{I}$$



# Результаты выполненных экспериментов

Поступательное движение	Вращательное движение
Масса $m$ , $[m] = \text{кг}$	Момент инерции $I = kmr^2$ , $[I] = \text{кг} \cdot \text{м}^2$
Сила $\vec{F}$ , $[F] = \text{Н}$	Момент силы $M = Fd$ ; $\vec{M}$ , $[M] = \text{Н} \cdot \text{м}$
Основное уравнение динамики $\vec{a} = \frac{\sum \vec{F}}{m}$	Основное уравнение динамики $\vec{\varepsilon} = \frac{\sum \vec{M}}{I}$
Ускорение поступательно движущегося тела прямо пропорционально сумме всех действующих на него сил и обратно пропорционально массе тела.	Угловое ускорение вращающегося тела прямо пропорционально сумме моментов всех действующих на него сил относительно оси вращения тела и обратно пропорционально моменту инерции тела относительно этой оси вращения.

- Принципиальная разница:** масса является инвариантом и не зависит от того, как тело движется. Момент инерции изменяется при изменении положения оси вращения или её направления в пространстве.

# Вычисление момента инерции тела произвольной формы

## Виртуальный эксперимент с моделью «Момент инерции»

- Цель эксперимента: убедиться в зависимости момента инерции системы тел от положения шаров на спице и положения оси вращения, которая может проходить как через центр спицы, так и через её концы.

The diagram shows four spheres on a horizontal rod. A vertical axis of rotation is indicated by a yellow line. Distances from this axis to the centers of the spheres are labeled  $r_1, r_2, r_3, r_4$ . The total length of the rod is labeled  $L$ .

Control panel values:

- $r_1 = -50,0$  см
- $r_2 = -17,0$  см
- $r_3 = 17,0$  см
- $r_4 = 50,0$  см

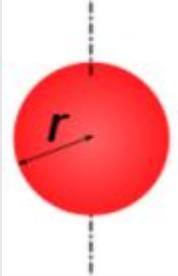
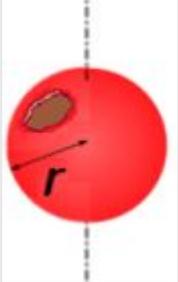
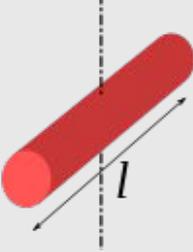
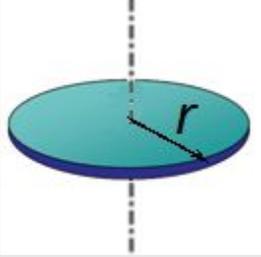
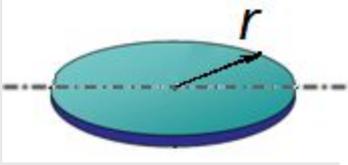
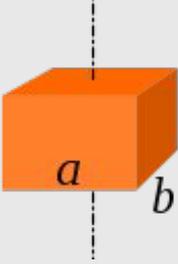
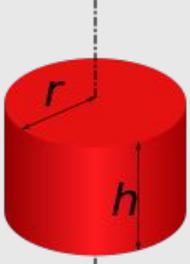
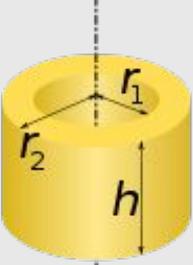
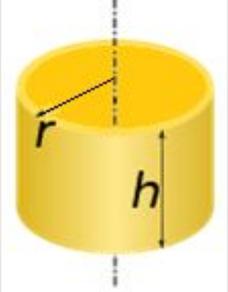
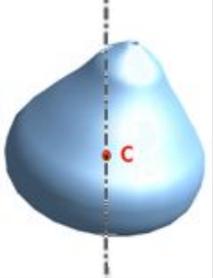
Axis position options:

- Ось слева
- Ось в центре
- Ось справа

Formulas and values:

$$I = M(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2) + 4I_0$$
$$I = 0,567 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$$
$$I_0 = \frac{2}{5}MR^2 = 0,002 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$$
$$L = 1 \text{ м}; M = 1 \text{ кг}$$

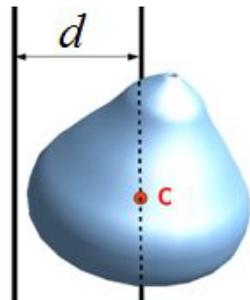
## Моменты инерции некоторых тел

Шар	Тонкостенная сфера	Однородный стержень	Диск	Диск
 $I = \frac{2}{5}mr^2$	 $I = \frac{2}{3}mr^2$	 $I = \frac{1}{12}ml^2$	 $I = \frac{1}{2}mr^2$	 $I = \frac{1}{4}mr^2$
Однородная пластинка	Сплошной цилиндр	Толстостенный цилиндр	Тонкостенный цилиндр	Произвольное тело
 $I = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$	 $I = \frac{1}{2}mr^2$	 $I = \frac{1}{2}m(r_1^2 + r_2^2)$	 $I = mr^2$	 $I = \sum m_i r_i^2$

# Теорема Штейнера

---

- Теорема о переносе осей инерции (Штейнера): момент инерции твёрдого тела относительно произвольной оси  $I$  равен сумме момента инерции этого тела  $I_0$  относительно оси, проходящей через центр масс тела параллельно рассматриваемой оси, и произведения массы тела  $m$  на квадрат расстояния  $d$  между осями:
- Применение теоремы Штейнера.
- **Задание.** Определить момент инерции однородного стержня длиной  $l$  относительно оси, проходящей через один из его концов перпендикулярно стержню.
- **Решение.** Центр масс однородного стержня расположен посередине, поэтому момент инерции стержня относительно оси, проходящей через один из его концов, равен



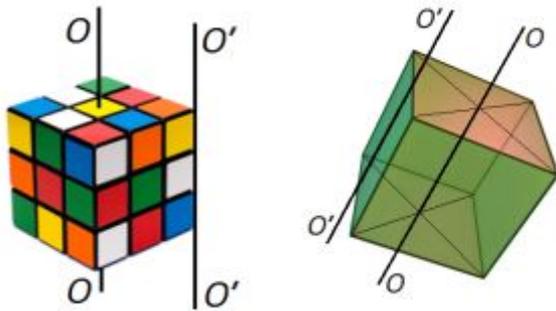
$$I = I_0 + md^2$$

$$I = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ml^2.$$

# Вопросы для обсуждения

---

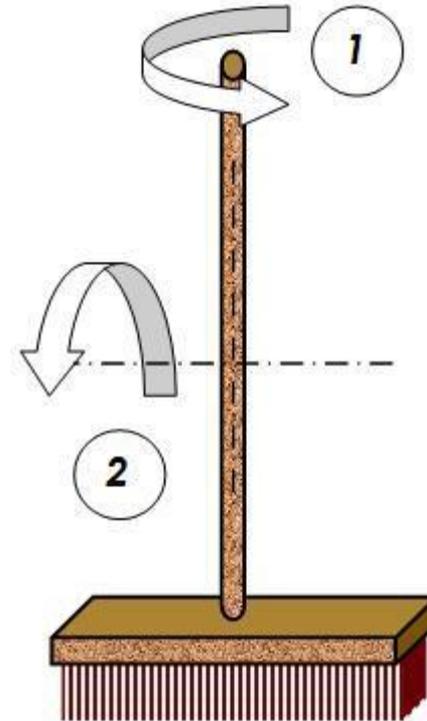
- Как отличаются моменты инерции кубов относительно осей  $OO$  и  $O'O'$  ?



- Сравните угловые ускорения двух тел, изображённых на рисунке, при одинаковом действии на них  $M$



- Какие из этих изменений является более трудными? Почему?



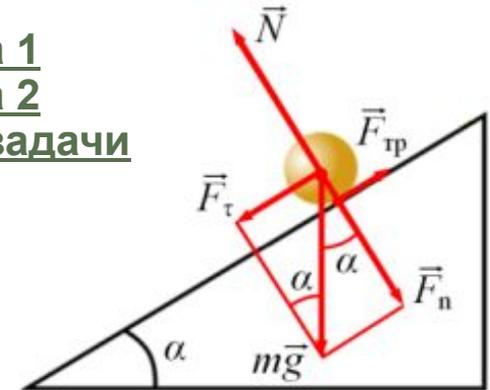
# Пример решения задачи

- **Задача:** По гладкой наклонной плоскости скатываются шар и сплошной цилиндр одинаковой массы. Какое из этих тел скатится быстрее?

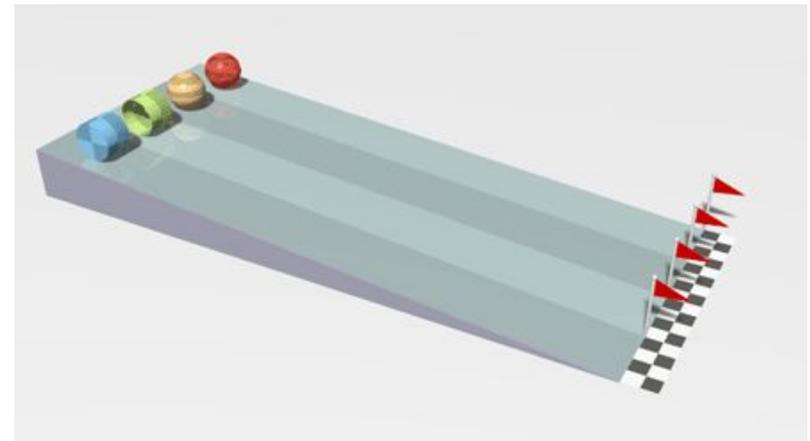


- **Замечание:** Уравнение динамики вращательного движения тела можно записывать не только относительно неподвижной или равномерно движущейся оси, но и относительно оси, движущейся с ускорением, при условии, что она проходит через центр масс тела и её направление в пространстве остаётся неизменным.

- Подсказка 1
- Подсказка 2
- Решение задачи



- Давайте обсудим:

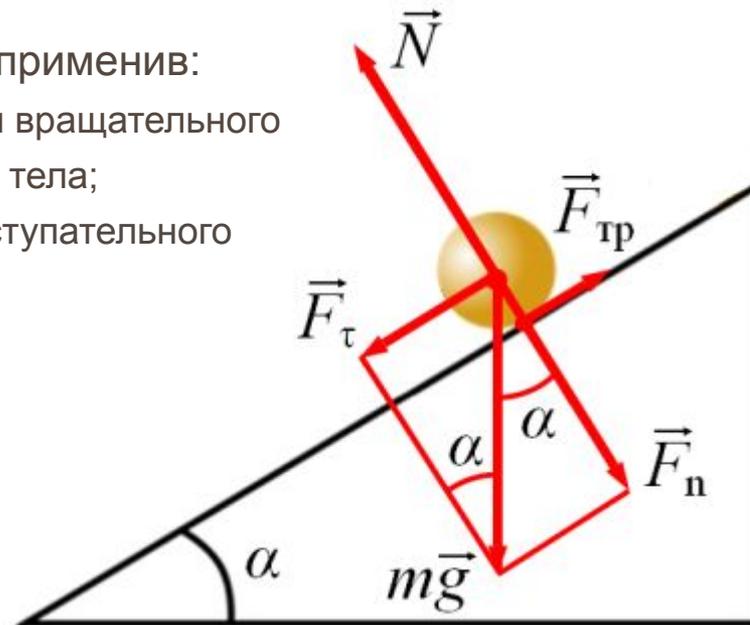


## Подсказка 2

---

Задача о качении симметричного тела по наклонной плоскости.

- Относительно оси вращения, проходящей через центр масс тела, моменты сил тяжести и реакции опоры равны нулю, момент силы трения равен  $M = F_{\text{тр}} r$ .
- Составьте систему уравнений, применив:
  - основное уравнение динамики вращательного движения для скатывающегося тела;
  - второй закон Ньютона для поступательного движения центра масс.



# Решение задачи

---

- Момент инерции шара и сплошного цилиндра соответственно равны

$$I_{\text{ш}} = 0,4mr^2, \quad I_{\text{ц}} = 0,5mr^2.$$

- Уравнение вращательного движения:

$$I\varepsilon = M, \Rightarrow \quad I \frac{a}{r} = F_{\text{тр}} r$$

- Уравнение второго закона Ньютона для поступательного движения центра масс

$$ma = mg \sin \alpha - F_{\text{тр}}$$

- Ускорение шара и цилиндра при скатывании с наклонной плоскости соответственно равны:

$$a_{\text{ш}} = \frac{mg \sin \alpha}{\frac{0,4mr^2}{r^2} + m} = \frac{5}{7} g \sin \alpha.$$

$$a_{\text{ц}} = \frac{mg \sin \alpha}{\frac{0,5mr^2}{r^2} + m} = \frac{2}{3} g \sin \alpha.$$

- $a_{\text{ш}} > a_{\text{ц}}$ , следовательно, шар будет скатываться быстрее цилиндра.
- Обобщая полученный результат на случай скатывания симметричных тел с наклонной плоскости, получим, что быстрее будет скатываться тело, обладающее меньшим моментом инерции.





# ДИНАМИКА ПРОИЗВОЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ



# Динамика произвольного движения

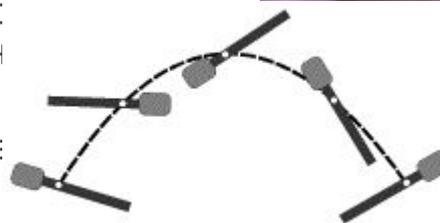
---

Произвольное движение твёрдого тела можно разложить на поступательное движение, в котором все точки тела движутся со скоростью центра масс тела, и вращение вокруг центра масс.

**Теорема о движении центра масс:** центр масс механической системы движется как материальная точка массой, равной массе всей системы, к которой приложены все внешние силы действующие на систему.

**Следствия:**

- Если вектор внешних сил системы равен нулю, то центр масс системы либо движется с постоянной по величине и направлению скоростью, либо находится в состоянии покоя.
- Если сумма проекций внешних сил на какую-либо ось равна нулю, то проекция вектора скорости движения центра системы на эту ось либо постоянна, либо равна нулю.
- Внутренние силы не влияют на движение центра масс.



# Иллюстрация теоремы

---

Режим последовательной съёмки позволяет проиллюстрировать теорему о движении центра масс системы: при спуске затвора за одну секунду можно запечатлеть несколько изображений. При объединении такой серии спортсмены, выполняющие трюки, и животные в движении превращаются в плотную очередь близнецов.



# Изучение движения центра масс системы

## Виртуальный эксперимент с моделью «Теорема о движении центра масс»

- **Цель эксперимента:** изучить движение центра масс системы из двух осколков снаряда под действием силы тяжести.
- Убедиться в правомерности применения теоремы о движении центра масс к описанию произвольных движений на примере баллистического движения, изменяя его параметры: угол выстрела, начальную скорость снаряда и отношение масс осколков.



«... аналогия является специфическим случаем симметрии, особым видом единства сохранения и изменения. Следовательно, использовать в анализе метод аналогии, — значит действовать в соответствии с принципом симметрии. Аналогия не только допустима, но и необходима в познании природы вещей....»

Овчинников Н. Ф. Принципы сохранения

# ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ





# ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА



# Аналогия математического описания

---

## Поступательное движение

- Из основного уравнения динамики поступательного движения

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t}$$

$$\vec{F}\Delta t = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \Delta(m\vec{v}) = \Delta\vec{p}$$

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (\vec{p} \uparrow \uparrow \vec{v}), \quad [p] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$$

- Произведение массы тела на скорость его движения - импульс тела.
- В отсутствие действия сил импульс тела сохраняется:

$$0 = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \Delta\vec{p}, \Rightarrow \vec{p} = \text{const}$$

## Вращательное движение

- Из основного уравнения динамики вращательного движения

$$\vec{M} = I\vec{\varepsilon} = I \frac{\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1}{\Delta t}$$

$$\vec{M}\Delta t = I\vec{\omega}_2 - I\vec{\omega}_1 = \Delta(I\vec{\omega}) = \Delta\vec{L}$$

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \quad (\vec{L} \uparrow \uparrow \vec{\omega}), \quad [L] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}}$$

- Произведение момента инерции тела на угловую скорость его вращения - момент импульса.
- При равенстве нулю суммарного момента сил

$$0 = I\vec{\omega}_2 - I\vec{\omega}_1 = \Delta\vec{L}, \Rightarrow \vec{L} = \text{const}$$

# Фундаментальный закон природы

---

- Закон сохранения момента импульса - **один из важнейших фундаментальных законов природы** - является следствием изотропности пространства (симметрии относительно поворотов в пространстве).
  - Закон сохранения момента импульса не является следствием законов Ньютона. Предложенный подход к выводу закона носит частный характер.
  - При сходной алгебраической форме записи законы сохранения импульса и момента импульса в применении к одному телу имеют разный смысл: в отличие от скорости поступательного движения угловая скорость вращения тела может меняться за счёт изменения момента инерции тела  $I$  внутренними силами.
  - Закон сохранения момента импульса выполняется для любых физических систем и процессов, не только механических.



# Закон сохранения момента импульса

---

- Момент импульса системы тел сохраняется неизменным при любых взаимодействиях внутри системы, если результирующий момент внешних сил, действующих на неё, равен нулю.

$$\text{При } \vec{M} = 0 \quad \vec{L} = I\vec{\omega} = \text{const}$$

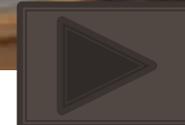
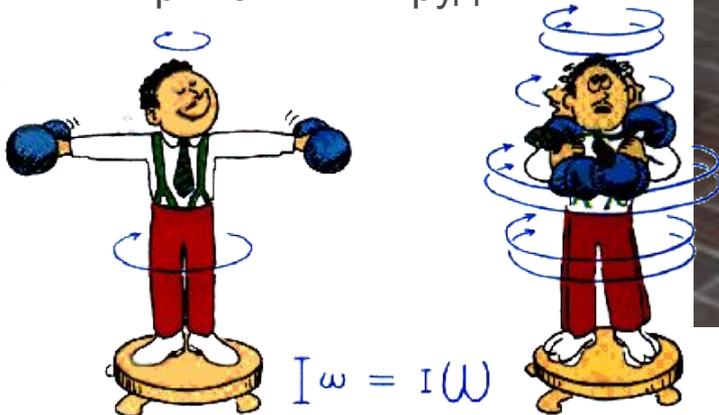


- Следствия из закона сохранения момента импульса
  - в случае изменения скорости вращения одной части системы другая также изменит скорость вращения, но в противоположную сторону таким образом, что момент импульса системы не изменится;
  - если момент инерции замкнутой системы в процессе вращения изменяется, то изменяется и её угловая скорость таким образом, что момент импульса системы останется тем же самым
  - в случае, когда сумма моментов внешних сил относительно некоторой оси равняется нулю, момент импульса системы относительно этой же оси остается постоянным.
- Экспериментальная проверка. Опыты со скамьёй Жуковского
- Границы применимости. Закон сохранения момента импульса выполняется в инерциальных системах отсчёта.

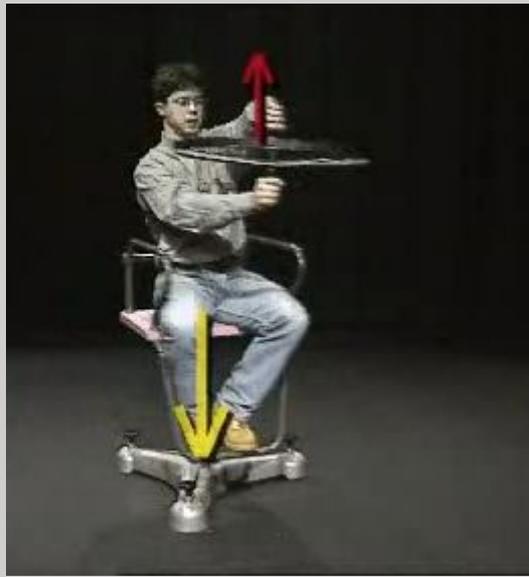
# Скамья Жуковского

Скамья Жуковского состоит станины с опорным шариковым подшипником, в котором вращается круглая горизонтальная платформа.

Скамью с человеком приводят во вращение, предложив ему развести руки с гантелями в стороны, а затем резко прижать их к груди.



## Опыты со скамьей Жуковского



Экспериментатор сидит на неподвижной скамье, ему подадут вращающееся колесо, вектор момента импульса которого направлен вверх. Человек со скамьей начинает вращаться в противоположном направлении, при этом вектор его момента импульса направлен по оси вращения вниз.



Экспериментатор поворачивает колесо так, что вектор момента импульса направлен горизонтально. Скамья и человек остаются в покое, т.к. проекция момента импульса колеса на вертикальную ось равна нулю.



Экспериментатор поворачивает ось колеса на  $90^\circ$  так, что вектор момента импульса направлен вниз. Скамья начинает вращаться в противоположную сторону, как в опыте 1.

**Сделайте вывод о выполнимости закона сохранения момента импульса**



# Особенности применения

---

## **Закон сохранения момента импульса**

выполняется, если:

1. сумма моментов внешних сил равна нулю (силы при этом могут не уравниваться);
2. тело движется в центральном силовом поле (при отсутствии других внешних сил; относительно центра поля)

## **Закон сохранения момента импульса**

применяют:

1. когда характер изменения со временем сил взаимодействия между частями системы сложен или неизвестен;
2. относительно одной и той же оси для всех моментов импульса и сил;
3. как к полностью, так и частично изолированным системам.

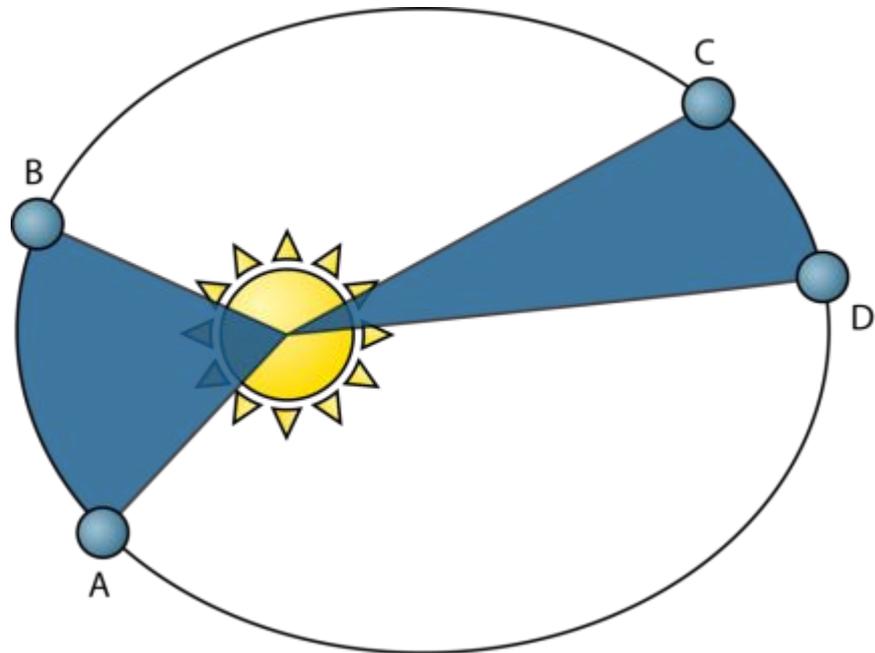


# Примеры проявления закона

---

- Замечательной особенностью вращательного движения является **свойство вращающихся тел при отсутствии взаимодействий с другими телами сохранять неизменными не только момент импульса, но и направление оси вращения в пространстве.**

1. Суточное вращение Земли.
2. Гироскопы
3. Вертолёт
4. Цирковые аттракционы
5. Балет
6. Фигурное катание
7. Гимнастика (сальто)
8. Прыжки в воду
9. Игровые виды спорта



# Пример 1. Суточное вращение Земли

---

Неизменным ориентиром для путешественников на поверхности Земли служит Полярная звезда в созвездии Большой Медведицы. Примерно на эту звезду направлена ось вращения Земли, и кажущаяся неподвижность Полярной звезды на протяжении столетий наглядно доказывает, что на протяжении этого времени направление оси вращения Земли в пространстве остается неизменным.

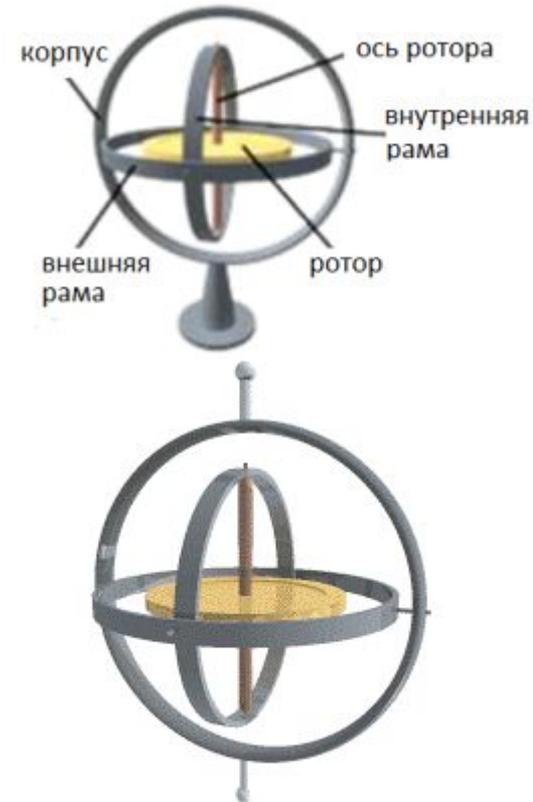
Вращение Земли вызывает у наблюдателя иллюзию вращения небесной сферы вокруг Полярной звезды.



## Пример 2. Гироскопы

---

- Гироскопом называется любое тяжелое симметричное тело, вращающееся вокруг оси симметрии с большой угловой скоростью.
- **Примеры:** велосипедное колесо; турбина гидростанции; пропеллер.
- **Свойства свободного гироскопа:**
  - сохраняет положение оси вращения в пространстве;
  - устойчив к ударным воздействиям;
  - безынерционен;
  - обладает необычной реакцией на действие внешней силы: если сила стремится повернуть гироскоп относительно одной оси, то он поворачивается во вторую, ей перпендикулярную – прецессирует.
- **Имеет обширную область применений.**



## Области применения гироскопов



Отрицательные последствия гироскопических эффектов

Навигационные приборы (авиагоризонт, гироскомпас, датчики курса, поворота и т. п.)

Стабилизация движения ракет, самолётов (автопилот), морских судов (авторулевой), торпед

Системы ориентации и стабилизации космических аппаратов

Высокоточные гироскопы в системах наведения стратегических ракет большой дальности

Обнаружение полезных ископаемых, предсказание землетрясений, сверхточное измерение положений железнодорожных путей и нефтепроводов, медицинская диагностика и др.

Гироскопические игрушки (волчок (юла), йо-йо, вертолёт), спортивные тренажёры Powerball и др.

Разрушение механических конструкций, содержащих массивные вращающиеся детали (турбины, колеса автомобилей, пропеллеры самолетов и др.)



# Пример 3. Вертолёт

---

- Многие особенности поведения вертолёта в воздухе диктуются **гироскопическим эффектом**. Тело, раскрученное по оси, стремится сохранить неизменным направление этой оси.
- Гироскопическими свойствами обладают валы турбин, велосипедные колеса, и даже элементарные частицы, например, электроны в атоме.

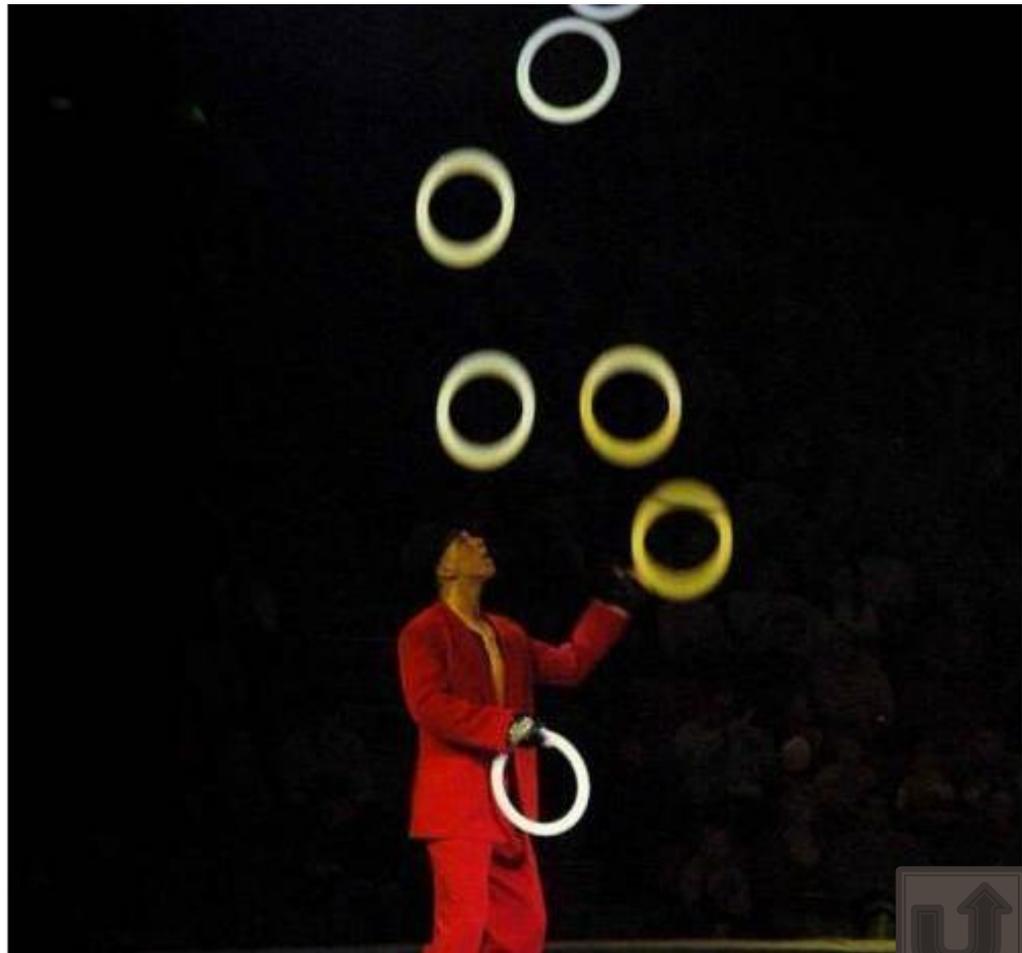


## Пример 4. Цирковые аттракционы

---

Если внимательно наблюдать за работой жонглёра, то можно заметить, что, подбрасывая предметы, он придаёт им вращение, сообщая определённым образом направленный момент импульса.

Только в этом случае булавы, тарелки, шляпы и др. возвращаются ему в руки в том же положении, которое им было придано.



# Пример 5. Балет

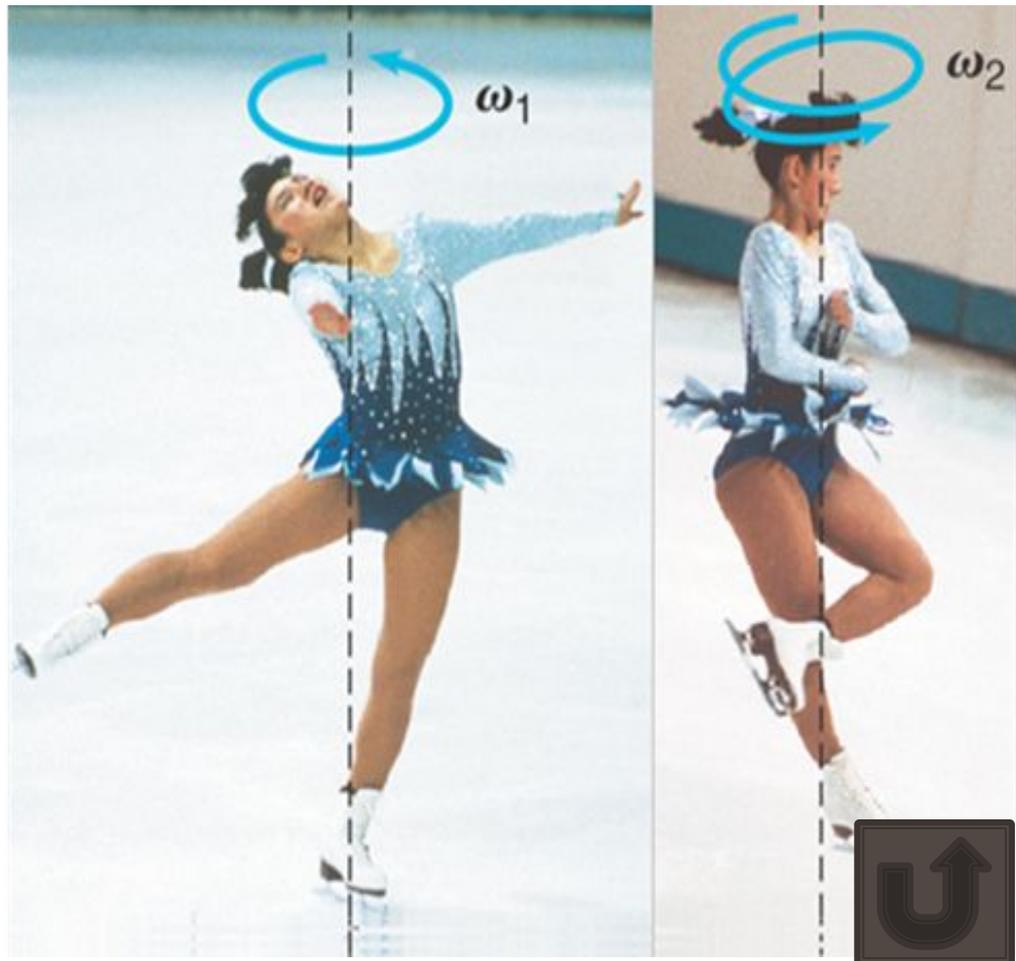
---

Свойством угловой скорости вращения тела изменяться за счёт действия внутренних сил пользуются спортсмены и артисты балета: когда под действием внутренних сил человек изменяет позу, прижимая руки к туловищу или разводя их в стороны, он изменяет момент импульса своего тела, при этом момент импульса сохраняется как по величине, так и по направлению, поэтому угловая скорость вращения также меняется.



# Пример 6. Фигурное катание

Фигурист, совершающий вращение вокруг вертикальной оси, в начале вращения приближает руки к корпусу, тем самым уменьшая момент инерции и увеличивая угловую скорость. В конце вращения происходит обратный процесс: при разведении рук увеличивается момент инерции и уменьшается угловая скорость, что позволяет легко остановить вращение и приступить к выполнению другого элемента.



# Пример 7. Гимнастика

---

Гимнаст, выполняющий сальто, в начальной фазе сгибает колени и прижимает их к груди, уменьшая тем самым момент инерции и увеличивая угловую скорость вращения вокруг горизонтальной оси. В конце прыжка тело выпрямляется, момент инерции возрастает, а угловая скорость уменьшается.

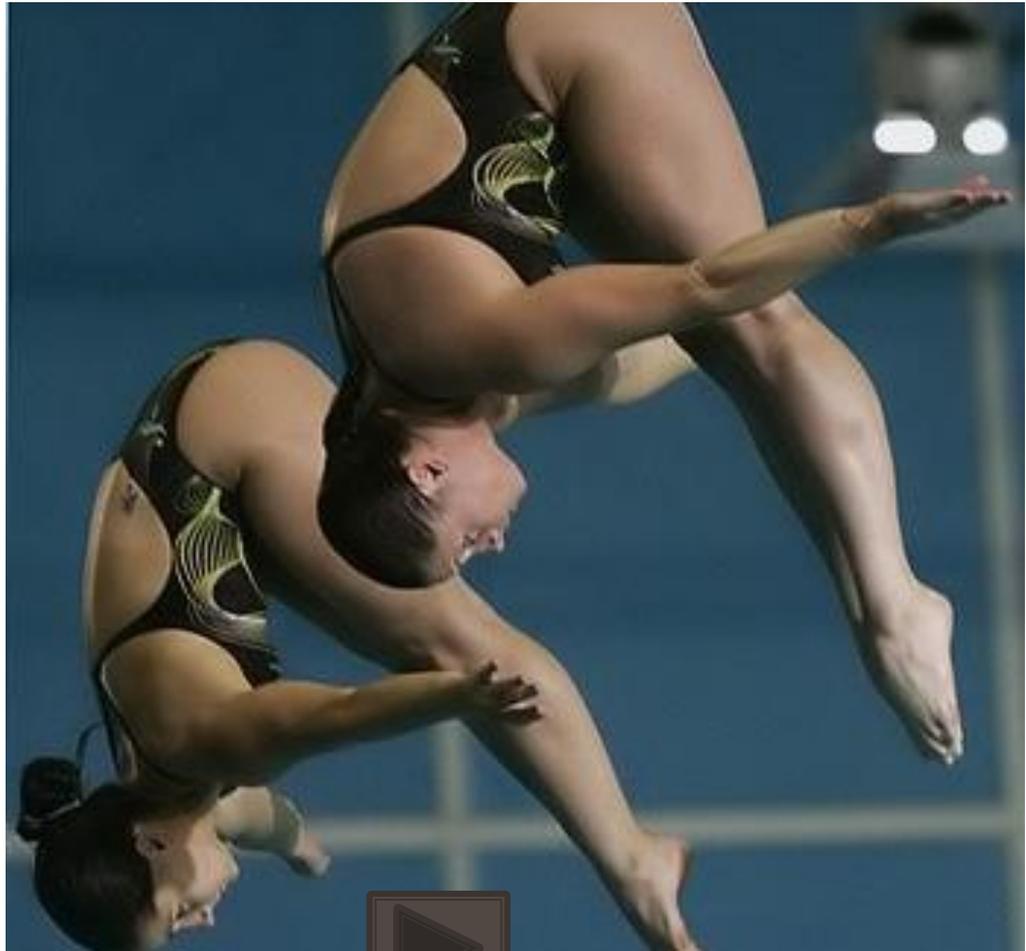


# Пример 8. Прыжки в воду

---

Толчок, испытываемый прыгуном в воду, в момент отрыва от гибкой доски, «закручивает» его, сообщая начальный запас момента импульса относительно центра масс.

Перед входом в воду, совершив один или несколько оборотов с большой угловой скоростью, спортсмен вытягивает руки, увеличивая тем самым свой момент инерции и, следовательно, снижая свою угловую скорость.



# Проблема устойчивости вращения

---

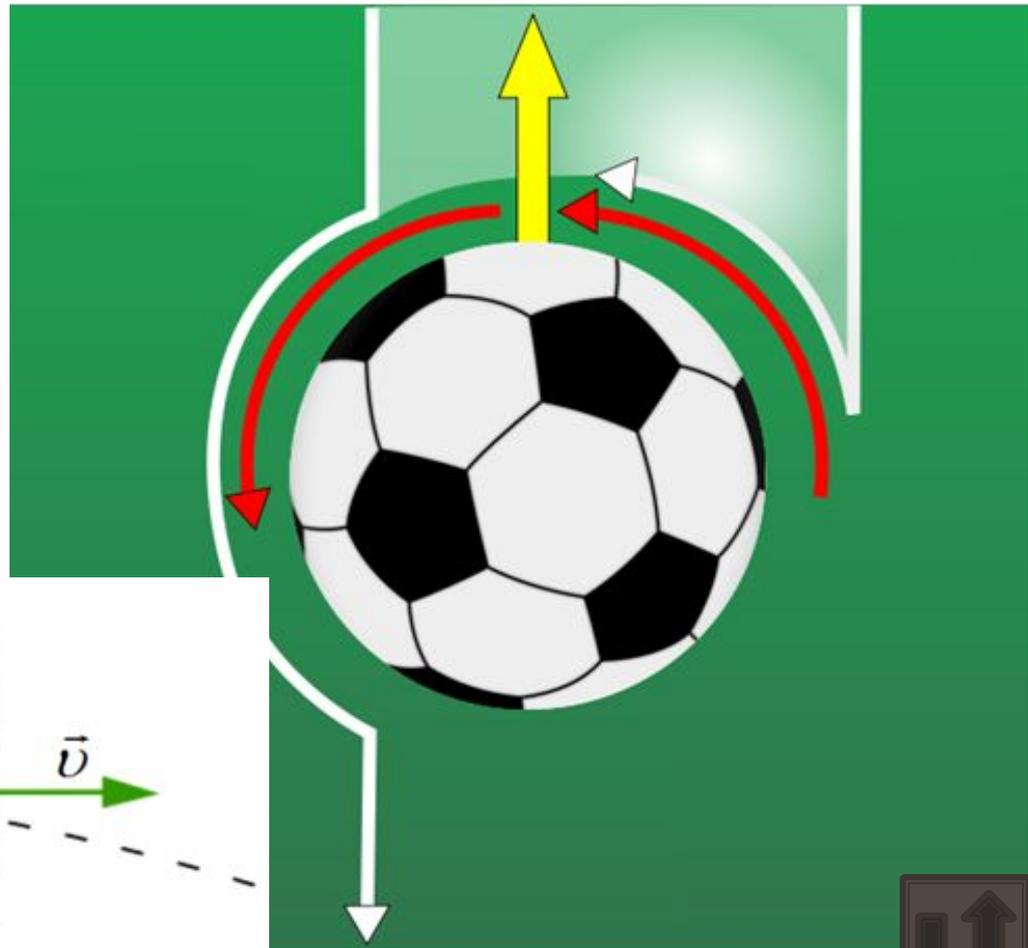
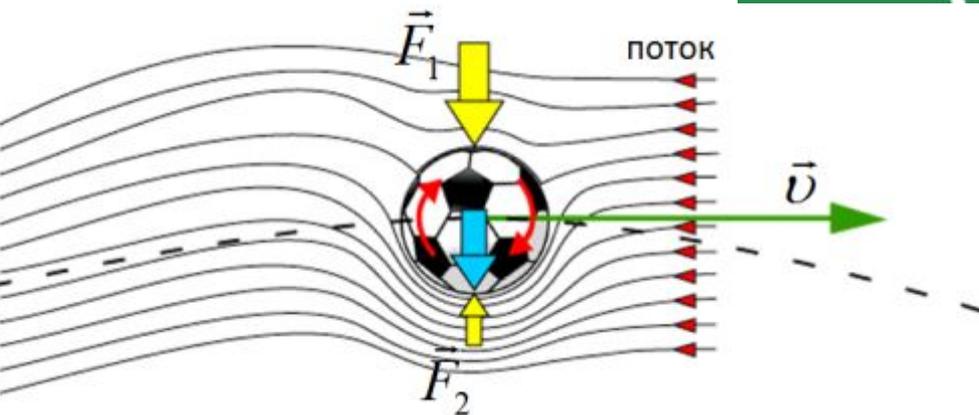
Вращение устойчиво относительно главных осей инерции, совпадающих с осями симметрии тел.

Если в начальный момент угловая скорость немного отклоняется по направлению от оси, которой соответствует промежуточное значение момента инерции, то в дальнейшем угол отклонения стремительно нарастает, и вместо простого равномерного вращения вокруг неизменного направления тело начинает совершать беспорядочное на вид кувыркание.



## Пример 9. Игровые виды спорта.

Вращение играет важную роль в игровых видах спорта: теннисе, бильярде, бейсболе. Удивительный удар «сухой лист» в футболе характеризуется особой траекторией полёта вращающегося мяча из-за возникновения подъёмной силы в набегающем потоке воздуха (эффект Магнуса).



# Вопросы для обсуждения

---

Космический телескоп Хаббл свободно плавает в пространстве. Как можно изменить его ориентацию так, чтобы нацелить на важные для астрономов объекты?



# Вопросы для обсуждения

---

1. Почему кошка при падении всегда приземляется на лапы?
2. Почему трудно удерживать равновесие на неподвижном двухколёсном велосипеде и совсем нетрудно, когда велосипед движется?
3. Как поведёт себя кабина вертолётa, находящегося в полёте, если по каким-либо причинам хвостовой винт перестанет работать?





# КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ТЕЛА



# Кинетическая энергия вращающегося тела

---

- Кинетическая энергия вращающегося тела равна сумме кинетических энергий отдельных его частей:

$$E_k = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \dots + \frac{m_n v_n^2}{2}.$$

- Поскольку угловые скорости всех точек вращающегося тела одинаковы, то, используя связь линейной и угловой скоростей, получим:

$$E_k = \frac{m_1 \omega^2 r_1^2}{2} + \frac{m_2 \omega^2 r_2^2}{2} + \dots + \frac{m_n \omega^2 r_n^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_n r_n^2).$$

- Величина, стоящая в скобках, представляет собой момент инерции тела относительно оси вращения:

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_n r_n^2.$$

- Формула кинетической энергии вращающегося тела:

$$E_k = \frac{I \omega^2}{2}$$

# Кинетическая энергия в плоскопараллельном движении

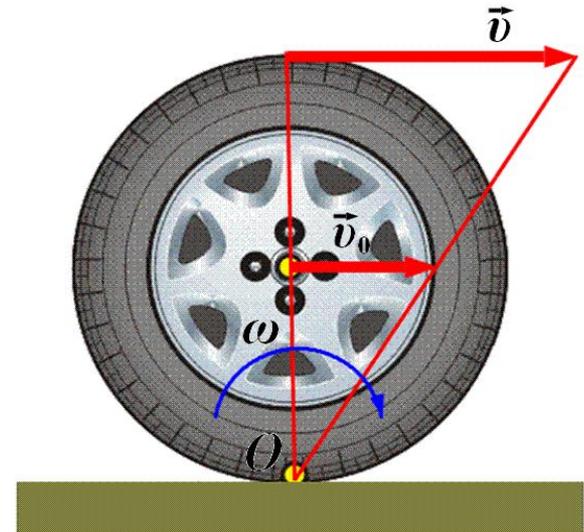
---

- При плоском движении кинетическая энергия твёрдого тела равна сумме кинетической энергии вращения вокруг оси, проходящей через центр масс, и кинетической энергии поступательного движения центра масс:

$$E_k = \frac{I\omega^2}{2} + \frac{mv^2}{2}.$$

- Это же тело может иметь еще и потенциальную энергию  $E_p$ , если оно взаимодействует с другими телами. Тогда полная энергия равна:

$$E = \frac{I\omega^2}{2} + \frac{mv^2}{2} + E_p.$$



Доказательство

# Доказательство

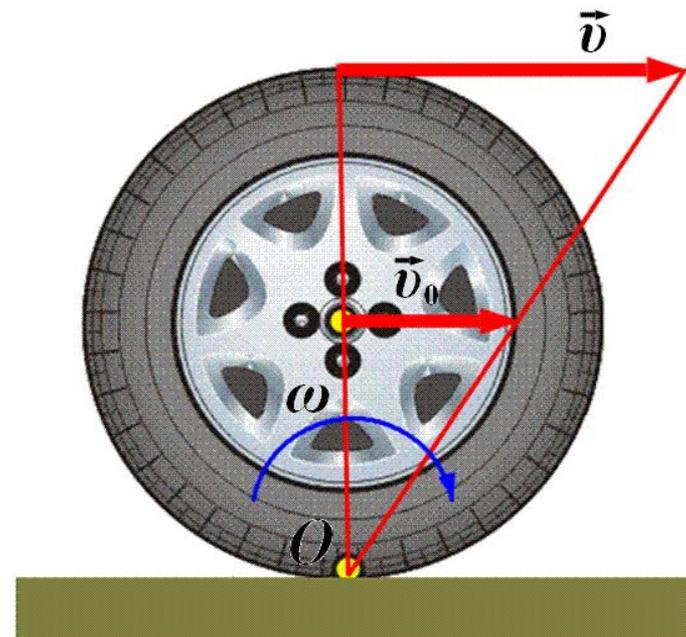
- Кинетическая энергия относительно точки  $O$  равна:

$$E_k = \frac{I\omega^2}{2},$$

где  $I$  – момент инерции цилиндра относительно точки  $O$ . По теореме Штейнера  $I = I_0 + mR^2$ , следовательно,

$$E_k = \frac{I_0\omega^2}{2} + \frac{m}{2}\omega^2 R^2 = \frac{I_0\omega^2}{2} + \frac{mv^2}{2},$$

так как  $v_0 = \omega R$ .



# Теорема Кёнига

---

**Кинетическая энергия любой системы материальных точек равна сумме кинетической энергии всей массы системы, мысленно сосредоточенной в ее центре масс и движущейся вместе с ним, и кинетической энергии всех материальных точек той же системы в их относительном движении по отношению к поступательно движущейся системе координат с началом в центре масс.**





# ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ



# Закон сохранения энергии

---

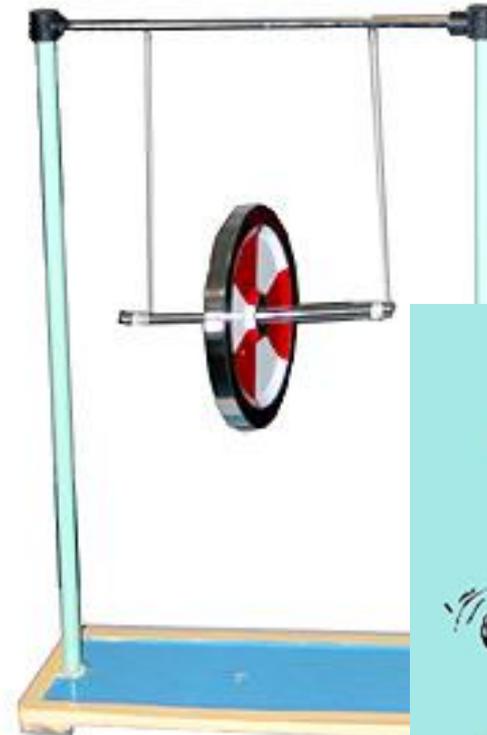
- Превращение одного вида механической энергии в другой на примере маятника Максвелла:

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$$

- Движение маятника периодическое. Подобным образом движется игрушка «йо-йо».
- Вследствие трения маятник через некоторое время остановится:

$$E_1 = E_2 + Q$$

Пример 1. Маятник Максвелла



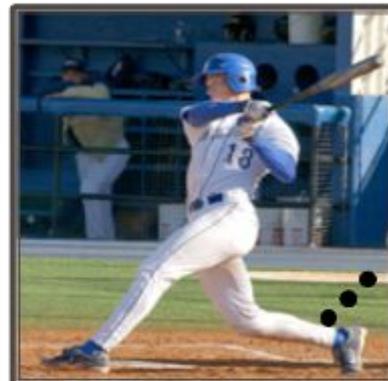
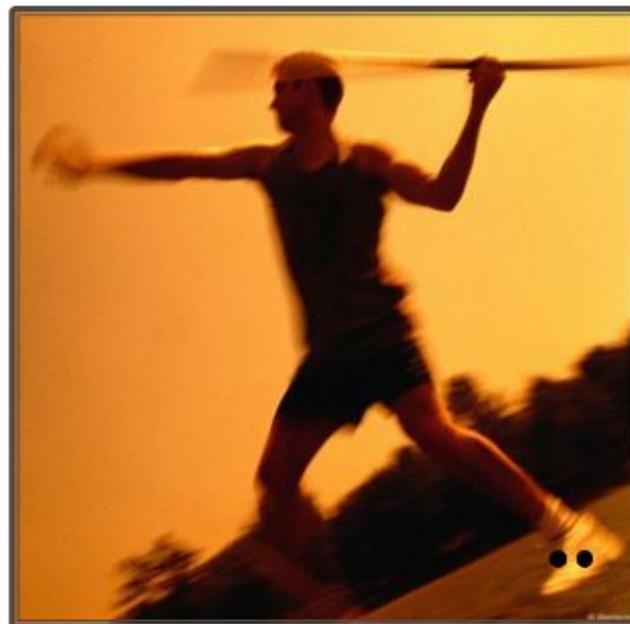
Пример 2. Йо-йо.

# Использование кинетической энергии вращения

---

- Толкание ядра, метание молота, диска и других спортивных снарядов требуют предварительного разгона для увеличения дальности полёта.
- Увеличение скорости снаряда при отрыве от рук метателя (вылете), достигается за счёт дополнительного вращения перед броском.





• Бросок лассо •• метание копья •• лапта •• метание диска •• гольф

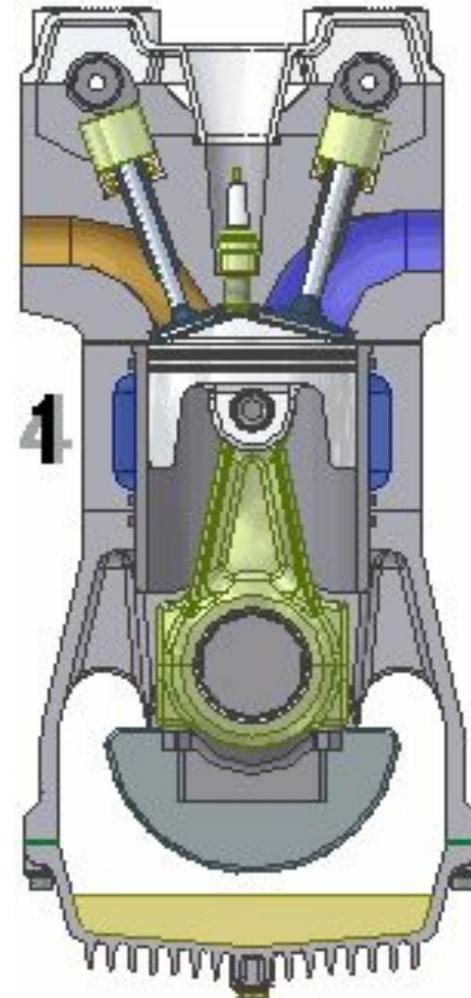
# Инерционные накопители энергии

---

- Зависимость кинетической энергии вращения от момента инерции тел используют в инерционных аккумуляторах.
- Работа, совершаемая за счёт кинетической энергии вращения, равна:

$$A = \frac{I\omega^2}{2} - \frac{I\omega_0^2}{2}.$$

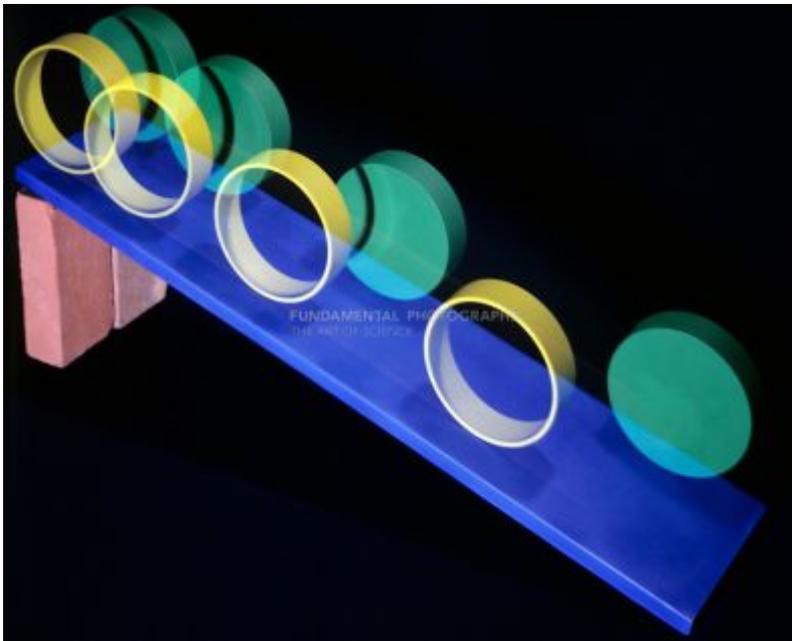
- Примеры: гончарные круги, массивные колёса водяных мельниц, маховики в двигателях внутреннего сгорания. Маховики, применяемые в прокатных станах, имеют диаметр свыше трёх метров и массу более сорока тонн.



# Ещё раз о скатывании

---

- По наклонной плоскости катятся без проскальзывания кольцо и диск, имеющие одинаковую массу и диаметр. Почему кольцо и диск достигают конца плоскости не одновременно? Ответ обоснуйте.



## Задачи для самостоятельного решения

- Шар скатывается с наклонной плоскости высотой  $h = 90$  см. Какую линейную скорость будет иметь центр шара в тот момент, когда шар скатится с наклонной плоскости? Решите задачу динамическим и энергетическим способами.
- Однородный шар массы  $m$  и радиуса  $R$  скатывается без скольжения по наклонной плоскости, составляющей угол  $\alpha$  с горизонтом. Найдите:
  - значения коэффициента трения, при которых скольжения не будет;
  - кинетическую энергию шара через  $t$  секунд после начала движения.

«В физике часто случалось, что существенный успех был достигнут проведением последовательной аналогии между не связанными по виду явлениями».

Альберт Эйнштейн

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ



## «Ищите и обряцете»

---

- «Так уж повелось издавна, что в конденсаторе, этом хранителе зарядов, существует электрическое поле, а в катушке с током - магнитное. Но повесить конденсатор в магнитном поле - такое могло прийти в голову только очень Любопытному ребенку. И не зря - он узнал нечто новое... Оказывается, - сказал себе Любопытный ребенок, - *электромагнитное поле обладает атрибутами механики: плотностью импульса и момента импульса!*» (Стасенко А.Л. Зачем быть конденсатору в магнитном поле? Квант, 1998, № 5).
- «А что между ними — реками, тайфунами, молекулами — общего?...» (Стасенко А.Л. Вращение: реки, тайфуны, молекулы. Квант, 1997, № 5).

**Для того, чтобы что-то найти, необходимо искать;  
для того, чтобы чего то достичь, необходимо действовать!**

# Читайте дополнительно

---

**Читайте книги:** Орир Д. Популярная физика. М.: Мир, 1964, или Купер Л. Физика для всех. М.: Мир, 1973. Т. 1. Из них вы узнаете много интересного о движении планет, колёс, волчков, вращении гимнаста на перекладине и... почему кошка всегда падает на лапы.

## Читайте в «Кванте»:

- Воробьев И. Необычное путешествие. (№2, 1974)
- Давыдов В. Как индейцы бросают томагавк? (№ 11, 1989)
- Джоунс Д., Почему устойчив велосипед (№12, 1970)
- Кикоин А. Вращательное движение тел (№1, 1971)
- Кривошлыков С. Механика вращающегося волчка. (№ 10, 1971 год)
- Ланге В. Почему кувырывается книга (N3,2000)
- Томсон Дж. Дж. О динамике мяча для игры в гольф. (№8, 1990)

## Используйте образовательные ресурсы сети Интернет:

- <http://physics.nad.ru/Physics/Cyrillic/mech.htm>
- <http://howitworks.iknowit.ru/paper1113.html>
- [http://class-fizika.narod.ru/9\\_posmotri.htm](http://class-fizika.narod.ru/9_posmotri.htm)

и др.



# Проведите опыты, наблюдения, моделирование

---

- Изучите закономерности вращательного движения с помощью моделирующей программы (Java-апплета)
  - СВОБОДНОЕ ВРАЩЕНИЕ СИММЕТРИЧНОГО ВОЛЧКА
  - СВОБОДНОЕ ВРАЩЕНИЕ ОДНОРОДНОГО ЦИЛИНДРА (СИММЕТРИЧНОГО ВОЛЧКА)
  - ВЫНУЖДЕННАЯ ПРЕЦЕССИЯ ГИРОСКОПА
- Определите собственный момент инерции методом физического маятника, используя образовательные ресурсы сети Интернет.
- Выполните экспериментальное исследование «Определение положения центра масс и моментов инерции тела человека относительно анатомических осей».

Будьте наблюдательны!

# Рефлексивный экран

- сегодня я узнал(а)...
- я выполнял(а) задания...
- было интересно...
- было трудно...
- у меня возникли учебные проблемы...
- я продолжу работу...

Спасибо за  
работу!

# Использованные информационные материалы

---

- Учебник для 10 класса с углублённым изучением физики под редакцией А. А. Пинского, О. Ф. Кабардина. М. : «Просвещение», 2005.
- Факультативный курс физики. О. Ф. Кабардин, В. А. Орлов, А. В. Пономарева. М. : «Просвещение», 1977 г.
- Ремизов А. Н. Курс физики: Учеб. для вузов / А. Н. Ремизов, А. Я. Потапенко. М.: Дрофа, 2004.
- Трофимова Т. И. Курс физики: Учеб. пособие для вузов. М.: Высшая школа, 1990.
- <http://ru.wikipedia.org/wiki/>
- <http://elementy.ru/trefil/21152>
- <http://www.physics.ru/courses/op25part1/content/chapter1/section/paragraph23/theory.html>
- Physclips . Мультимедийное введение в физику.  
<http://www.animations.physics.unsw.edu.au/jw/rotation.htm> и др.
- В оформлении в учебных целях использованы иллюстративные материалы сети Интернет.

