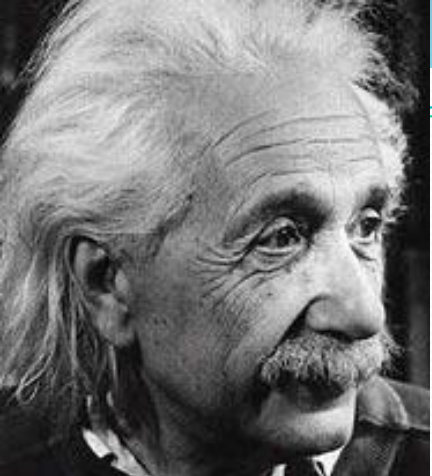


ВИДЫ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И СПОСОБЫ ИХ РЕШЕНИЯ



Умные мысли

Мне приходится делить время между политикой и уравнениями.

*Однако уравнения, по-моему, гораздо важнее.
Политика существует для данного момента, а уравнения будут существовать вечно.*

Считаем устно

1) Представить в виде степени:

$$\sqrt[3]{6^2};$$



$$6^{\frac{2}{3}}$$

$$3^{-4} \cdot 81;$$



$$3^0$$

$$2^{-2} \cdot 16;$$



$$2^2$$

$$\left(\frac{7}{5}\right)^3 \cdot \frac{25}{49}$$



$$\left(\frac{7}{5}\right)^1$$

Решите уравнения

$$3^{2x} = 3^4;$$



$$x = 2$$

$$\left(\frac{1}{7}\right)^x = -49;$$



Корней
нет

$$5^{x+1} = 0;$$



Корней
нет

$$2^{3-x} = 1;$$



$$x = 3$$

- 
- Методы решения ПУ
 - Вынесение общего множителя за скобки
 - Метод логарифмирования
 - Метод введения новой переменной
 - Метод уравнивания показателей
 - Графический метод
 - Метод составления отношений
 - Метод использования однородности

Метод уравнивания показателей

$$1) 5^x = 125$$

$$2) 2^{3x-6} = 2$$

$$3) 3^{x-1} = -3$$

$$4) 5^{\sin x} = 5$$

$$5) 8^{|x|} = 8$$

$$6) 11^{5x-8} = 7^0$$

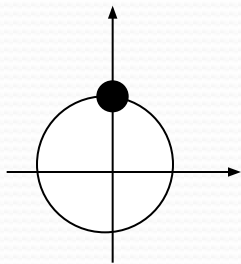
$$1) 5^x = 5^3, x = 3$$

$$2) 2^{3x-6} = 2^1, 3x-6=1, x=2\frac{1}{3}$$

3) Корней нет

$$4) 5^{\sin x} = 5^1, \sin x = 1,$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$



$$5) 8^{|x|} = 8^1, |x| = 1, x = \pm 1$$

$$6) 11^{5x-8} = 11^0, 5x-8=0, x=1,6$$

Вынесение общего множителя за скобки

$$3^{x+2} - 3^x = 72$$

$$3^x(3^2 - 1) = 72;$$

$$3^x = \frac{72}{8};$$

$$3^x = 9;$$

$$3^x = 3^2;$$

$$x = 2$$

Ответ: 2

Вынесение общего множителя за скобки

$$2^x - 2^{x-4} = 15$$

$$2^{x-4}(2^4 - 1) = 15;$$

$$2^{x-4} = \frac{15}{15};$$

$$2^{x-4} = 1;$$

$$2^{x-4} = 2^0;$$

$$x = 4$$

Ответ: 4

Вынесение общего множителя за скобки

$$3^{12x-1} - 9^{6x-1} - 27^{4x-1} + 81^{3x+1} = 2192$$

$$3^{12x-1} - 3^{12x-2} - 3^{12x-3} + 3^{12x+4} = 2192$$

$$3^{12x-3}(3^2 - 3^1 - 1 + 3^7) = 2192;$$

$$3^{12x-3}(9 - 3 - 1 + 2187) = 2192;$$

$$3^{12x-3}2192 = 2192;$$

$$3^{12x-3} = 1;$$

$$x = \frac{1}{4}$$

Ответ: 0,25

Метод составления отношений

$$2 \cdot 3^{x-1} - 3^{x-2} = 5^{x-2} + 4 \cdot 5^{x-3}$$

$$3^{x-2}(2 \cdot 3 - 1) = 5^{x-3}(5 + 4);$$

$$5 \cdot 3^{x-2} = 5^{x-3} \cdot 3^2;$$

$$3^{x-4} = 5^{x-4};$$

$$\begin{cases} 3^{x-4} \\ 5^{x-4} \end{cases} = 1;$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{x-4} = \left(\frac{3}{5}\right)^0$$

$$x = 4$$

Ответ: 4

Метод составления отношений

$$5^{2x-1} + 4^x = 5^{2x} - 4^{x+1}$$

$$5^{2x-1}(1 - 5) = 2^{2x}(-2^2 - 1);$$

$$- 5^{2x-1} \cdot 4 = -2^{2x} \cdot 5;$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{2x-1} = \frac{5}{2};$$

$$2x - 1 = 1;$$

$$x = 1$$

Ответ: 1

Метод составления отношений

$$2^{x^2-1} - 3^{x^2} = 3^{x^2-1} - 2^{x^2+2}$$

$$2^{x^2-1}(1+2^3) = 3^{x^2-1}(1+3);$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$x^2 - 1 = 2;$$

$$x = \pm\sqrt{3};$$

Ответ: $\pm\sqrt{3}$

$$1) \quad 4^{\frac{2}{x}} - 5 \cdot 4^{\frac{1}{x}} + 4 = 0$$

ОДЗ : $x \neq 0$

$$(4^{\frac{1}{x}})^2 - 5 \cdot 4^{\frac{1}{x}} + 4 = 0;$$

Пусть $4^{\frac{1}{x}} = t, t > 0.$

$$t^2 - 5t + 4 = 0;$$

$$D = 25 - 16 = 9;$$

$$t_1 = 4, t_2 = 1.$$

Вернемся к
замене:

$$\begin{cases} 4^{\frac{1}{x}} = 4 \\ 4^{\frac{1}{x}} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = 1 \\ \frac{1}{x} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ \text{решений нет} \end{cases}$$

Ответ: 1

$$2) \quad 5^{2x-1} + 5^{x+1} = 250 \quad 3) \quad 9^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0$$

$$5^{2(x+1)} \cdot 5^{-3} + 5^{x+1} = 250; \quad 3^{2(x^2-1)} - 9 \cdot 4 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0;$$

Пусть $5^{x+1} = t, t > 0.$

$$\frac{1}{125} t^2 + t - 250 = 0;$$

$$D = 9;$$

$$t_1 = -250 < 0,$$

$$t_2 = 125,$$

Вернемся к
замене:

$$5^{x+1} = 125;$$

$$5^{x+1} = 5^3;$$

$$x = 2;$$

Ответ: 2

$$3^{2(x^2-1)} - 4 \cdot 3^{(x^2-1)} + 3 = 0$$

Пусть $3^{x^2-1} = t, t > 0.$

$$t^2 - 4t + 3 = 0;$$

$$D = 16 - 12 = 4;$$

$$t_1 = 3, t_2 = 1.$$

Вернемся к
замене:

$$\begin{cases} 3^{x^2-1} = 3 \\ 3^{x^2-1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 1 \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 = 0 \\ x^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases} \end{cases}$$

Ответ: 0, 1, -1

Метод введения новой переменной

$$4^{\frac{2}{x}} - 5 \cdot 4^{\frac{1}{x}} + 4 = 0 \quad \text{ОДЗ : } x \neq 0$$

$$(4^{\frac{1}{x}})^2 - 5 \cdot 4^{\frac{1}{x}} + 4 = 0;$$

Пусть $4^{\frac{1}{x}} = t, t > 0$.

$$t^2 - 5t + 4 = 0;$$

$$D = 25 - 16 = 9;$$

$$t_1 = 4, t_2 = 1.$$

Вернемся к
замене:

$$\begin{cases} 4^{\frac{1}{x}} = 4 \\ 4^{\frac{1}{x}} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = 1 \\ \frac{1}{x} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ \text{решений нет} \end{cases}$$

Ответ: 1

Метод введения новой переменной

$$5^{2x-1} + 5^{x+1} = 250$$

$$5^{2(x+1)} \cdot 5^{-3} + 5^{x+1} = 250;$$

Пусть $5^{x+1} = t, t > 0$.

$$\frac{1}{125}t^2 + t - 250 = 0;$$

$$t_1 = -250 < 0,$$

$$t_2 = 125,$$

Вернемся к
замене:

$$5^{x+1} = 125;$$

$$5^{x+1} = 5^3;$$

$$x = 2;$$

Ответ: 2

Метод введения новой переменной

$$9^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0$$

$$3^{2(x^2-1)} - 9 \cdot 4 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0;$$

$$3^{2(x^2-1)} - 4 \cdot 3^{(x^2-1)} + 3 = 0;$$

Пусть $3^{x^2-1} = t, t > 0.$

$$t^2 - 4t + 3 = 0;$$

$$t_1 = 3, t_2 = 1.$$

Вернемся к
замене:

$$\begin{cases} 3^{x^2-1} = 3 \\ 3^{x^2-1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 1 \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 = 0 \\ x^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases} \end{cases}$$

Ответ: 0, 1, -1

Использование однородности

$$64 \cdot 9^x - 84 \cdot 12^x + 27 \cdot 16^x = 0$$

$$64 \cdot 3^{2x} - 84 \cdot 3^x \cdot 4^x + 27 \cdot 4^{2x} = 0$$

Разделив обе части
уравнения на 4^{2x} ,
получим:

$$64 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{2x} - 84 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^x + 27 = 0$$

Пусть $\left(\frac{3}{4}\right)^x = t, t > 0$.

$$64t^2 - 84t + 27 = 0;$$

$$t_1 = \frac{3}{4}, t_2 = \frac{9}{16}.$$

Вернемся к
замене:

$$\begin{cases} \left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{3}{4} \\ \left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{9}{16} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Ответ: 1 или 2

Использование однородности

$$9^{x+1} + 45 \cdot 6^x + 9 \cdot 2^{2x+2} = 0$$

$$3^{2x+2} + 45 \cdot 3^x 2^x + 9 \cdot 2^{2x+2} = 0;$$

$$3^{2x} \cdot 3^2 + 45 \cdot 3^x \cdot 2^x + 9 \cdot 2^{2x} \cdot 2^2 = 0;$$

Разделив обе части
уравнения на 2^{2x} ,
получим:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} \cdot 3^2 + 45\left(\frac{3}{2}\right)^x + 36 = 0$$

Пусть $\left(\frac{3}{2}\right)^x = t, t > 0$.

$$9t^2 + 45t + 36 = 0;$$

$$t^2 + 5t + 4 = 0;$$

$$t_1 = -1 < 0,$$

$$t_1 = -4 < 0,$$

Ответ: нет
решения

Использование однородности

$$10^{\frac{2}{x}} + 25^{\frac{1}{x}} = 4,25 \cdot 50^{\frac{1}{x}}$$

ОДЗ : $x \neq 0$

$$5^{\frac{2}{x}} \cdot 2^{\frac{2}{x}} + 5^{\frac{2}{x}} = 4,25 \cdot 5^{\frac{2}{x}} \cdot 2^{\frac{2}{x}}$$

Разделив обе части
уравнения на $5^{\frac{2}{x}}$,
получим:

$$2^{\frac{2}{x}} + 1 = 4,25 \cdot 2^{\frac{1}{x}}$$

Пусть $2^{\frac{1}{x}} = t, t > 0$.

$$t^2 - 4,25t + 1 = 0;$$

$$t_1 = 4, t_2 = \frac{1}{4}.$$

Вернемся к
замене:

$$\begin{cases} 2^{\frac{1}{x}} = 4 \\ 2^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{\frac{1}{x}} = 2^2 \\ 2^{\frac{1}{x}} = 2^{-2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0,5 \\ x = -0,5 \end{cases}$$

Ответ: 0,5 или -0,5

Уравнение вида: $A \cdot a^{2x} + B \cdot a^x b^x + C b^{2x} = 0$.

И решаются они с использованием однородности. Все члены этого уравнения содержат степени с разными основаниями, но показатели степеней в крайних членах уравнения вдвое больше, чем показатели степеней среднего члена. Это уравнение легко можно привести к виду уравнения на слайде 9, разделив его на $b^{2x} \neq 0$, получим квадратное уравнение:

$$A\left(\frac{a}{b}\right)^{2x} + B \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^x + C = 0.$$

С помощью подстановки $\left(\frac{a}{b}\right)^x = y$, уравнение принимает вид:

$$Ay^2 + B \cdot y + C = 0,$$

который мы уже разобрали.

Использование монотонности функции

$$3^x + 4^x = 5^x$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1$$

Т.к функция

$$f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x$$

является убывающей, то горизонтальная прямая $y=1$ пересекает график функции f не более, чем в одной точке. Следовательно, уравнение имеет не более одного корня. Методом перебора находим, что $x=2$

Ответ: 2

$$3^{x-1} + 5^{x-1} = 34$$

Т.к функция

$$f(x)3^{x-1} + 5^{x-1}$$

является возрастающей, то горизонтальная прямая $y=34$ пересекает график функции f не более, чем в одной точке. Следовательно, уравнение имеет не более одного корня. Методом перебора находим, что $x=3$

Ответ: 3