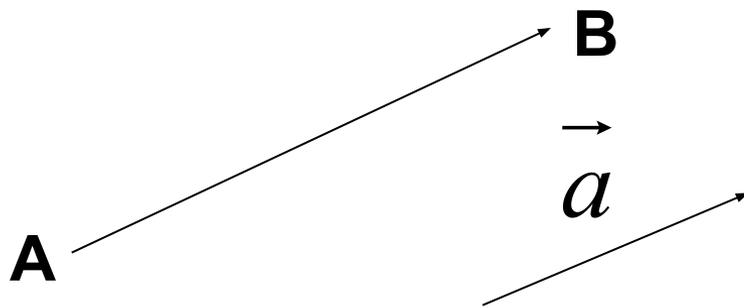


Векторы. Основные понятия.

Вектором называется направленный отрезок.

Обозначают векторы символами \vec{a} или \overline{AB} , где A- начало, а B-конец направленного отрезка .



- *Нулевым вектором* (обозначается $\vec{0}$) называется вектор, начало и конец которого совпадают.
- Расстояние между началом и концом вектора называется его *длиной*, или модулем или абсолютной величиной.
- Векторы называются *коллинеарными*, если они расположены на одной прямой или на параллельных прямых

- Векторы называются *компланарными*, если они параллельны одной плоскости.
- Векторы называются *равными*, если они сонаправлены и имеют равные длины.
- Два вектора, имеющие равные длины, коллинеарные и противоположно направленные, наз. *противоположными*.

- Вектор, длина которого равна 1, называется *единичным* вектором или *ортом*.

- Ортом вектора \vec{a} называется сонаправленный ему вектор и обозначается

$$\vec{a}_0$$

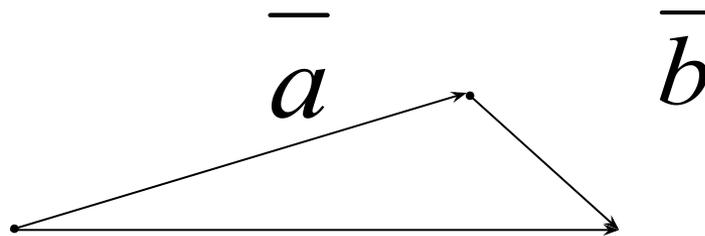
Линейные операции над векторами

Линейными операциями называют операции сложения и вычитания векторов и умножения вектора на число.

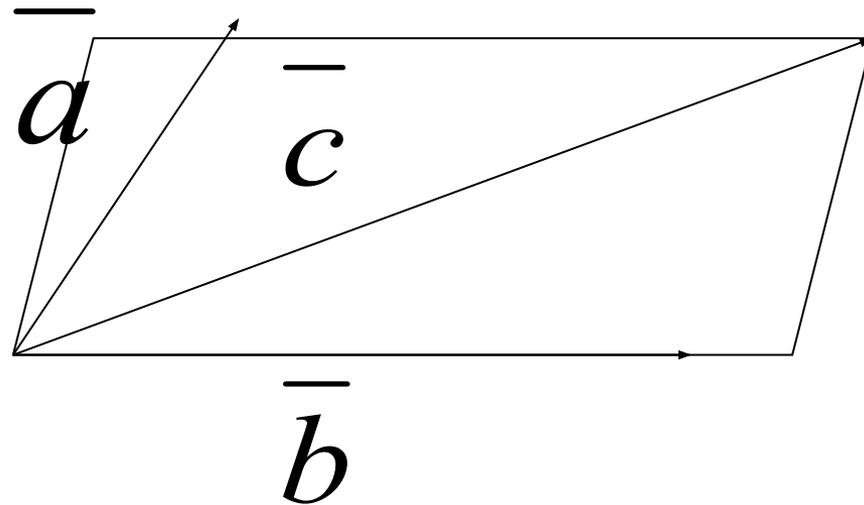
Сложение векторов

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

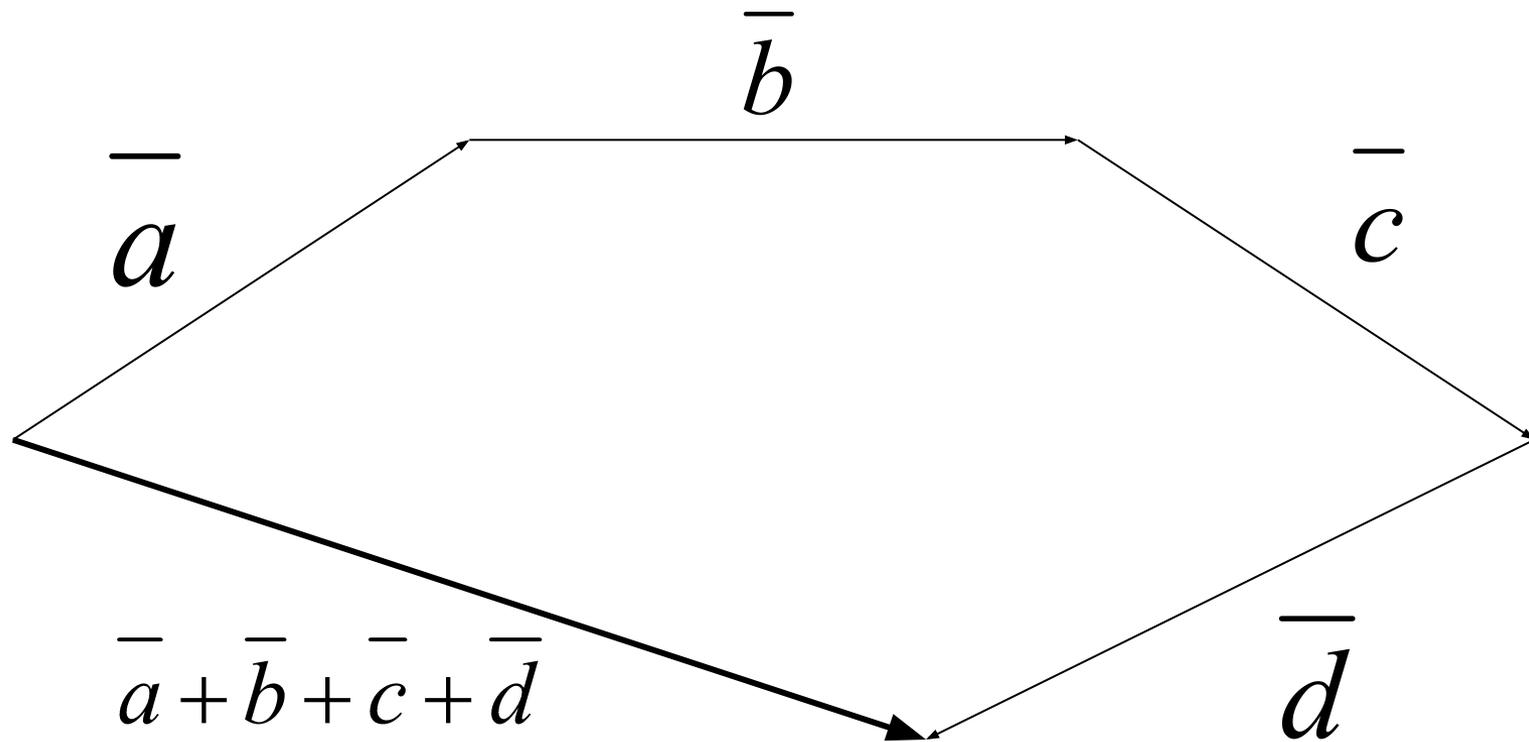
Правило треугольника.



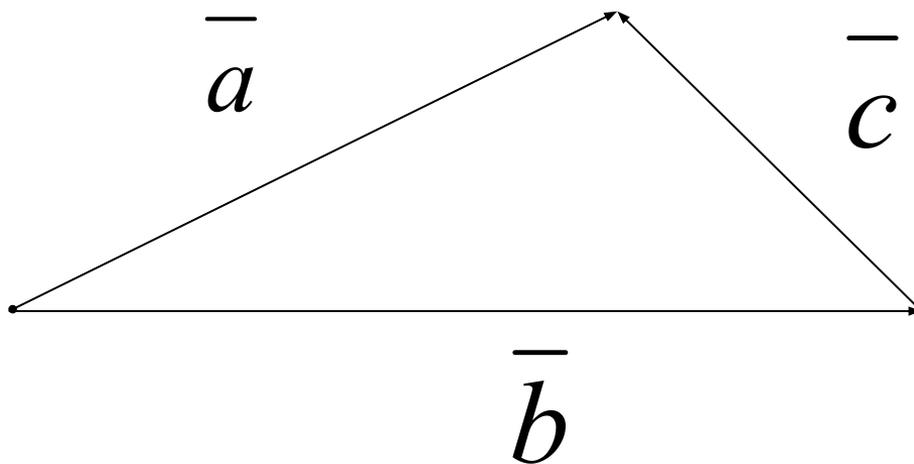
Правило параллелограмма



Сумма нескольких векторов



Вычитание векторов



$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$$

Свойства

$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$$

$$\overline{a} + \overline{0} = \overline{a}$$

$$\overline{a} + (\overline{b} + \overline{c}) = (\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c}$$

$$\overline{a} + (-\overline{a}) = \overline{0}$$

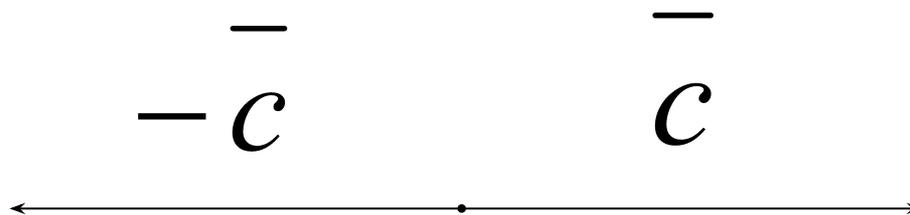
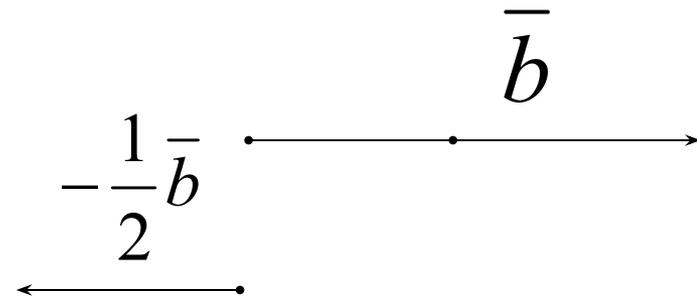
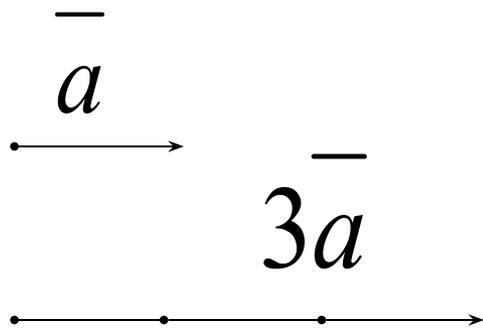
Умножение вектора на число

Произведением вектора \vec{a} на действительное число α называется вектор \vec{b} (обозначают $\vec{b} = \alpha \vec{a}$), определяемый следующими условиями:

$$1. |\vec{b}| = |\alpha| \cdot |\vec{a}| ,$$

$$2. \vec{b} \uparrow \uparrow \vec{a} \text{ при } \alpha > 0 \text{ и } \vec{b} \uparrow \downarrow \vec{a} \text{ при } \alpha < 0 .$$

Умножение вектора на число



Свойства

$$(\alpha\beta)\bar{a} = \alpha(\beta\bar{a}) = \beta(\alpha\bar{a})$$

$$(\alpha + \beta)\bar{a} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{a}$$

$$\alpha(\bar{a} + \bar{b}) = \alpha\bar{a} + \alpha\bar{b}$$

$$1 \cdot \bar{a} = \bar{a}$$

$$(-1) \cdot \bar{a} = -\bar{a}$$

- Отсюда вытекает условие коллинеарности векторов: два ненулевых вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда имеет место равенство

$$\vec{b} = \alpha \cdot \vec{a}, \quad \alpha \neq 0.$$

- Если \vec{a}_0 орт вектора \vec{a} , то

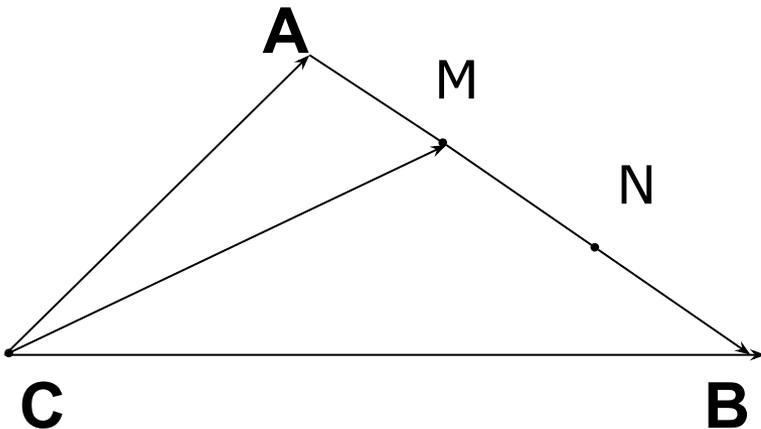
$$\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{a}_0 \quad \text{и тогда} \quad \vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}$$

Пример

В треугольнике ABC сторона AB разделена на три равные части точками M и N.

Пусть $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$, выразить вектор \overrightarrow{CM} через \vec{a} и \vec{b} .

Решение



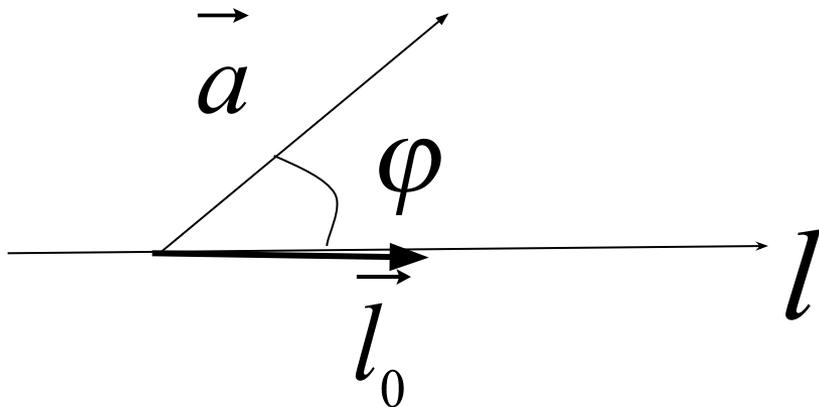
$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB},$$

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a},$$

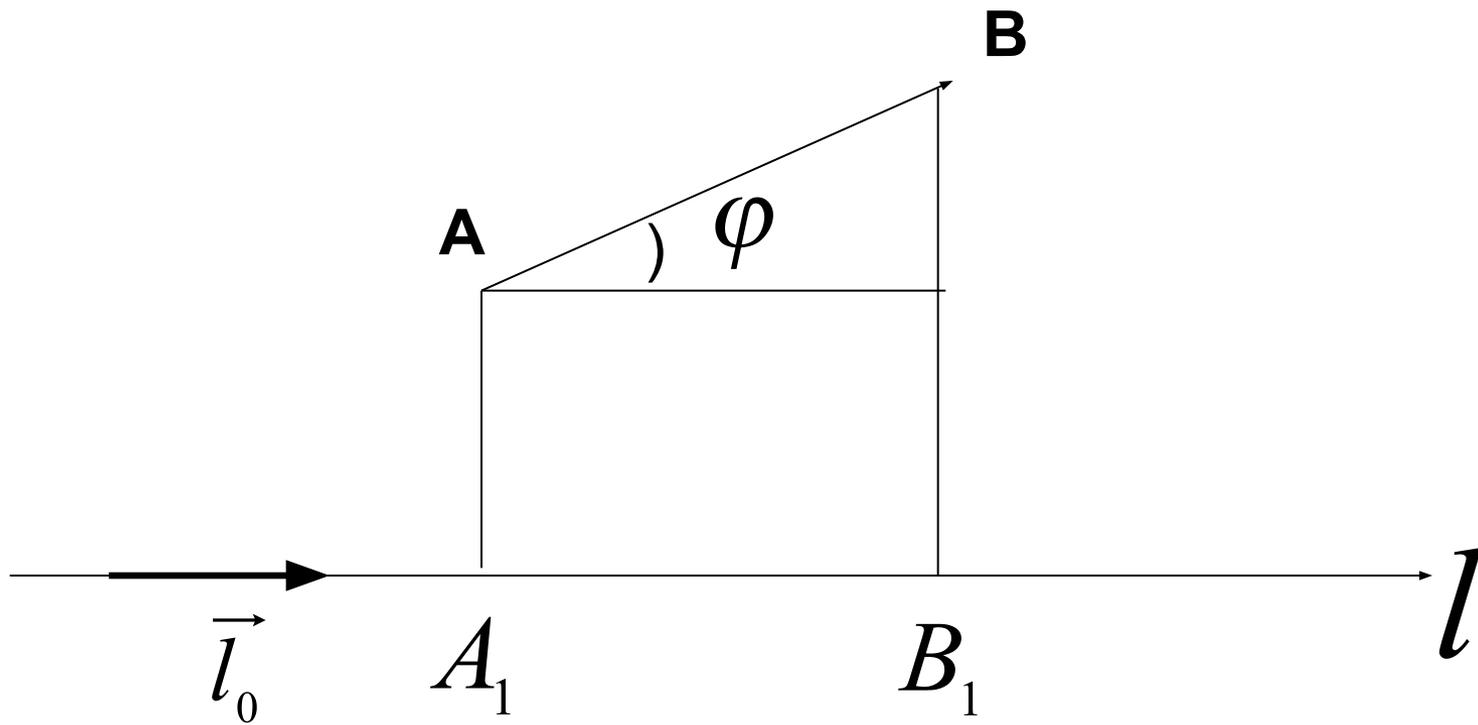
$$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} = \vec{a} + \frac{1}{3}(\vec{b} - \vec{a}).$$

Угол между двумя векторами

- Углом между векторами наз-ся наименьший угол φ ($0 \leq \varphi \leq \pi$), на который надо повернуть один из векторов до его совпадения со вторым.
- Под углом между вектором и осью понимают угол между вектором и единичным вектором, расположенным на оси



Проекция вектора на ось



$$np_l \overline{AB} = |\overline{AB}| \cos(\overline{AB}, l)$$

Линейная зависимость векторов



• Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ наз-ся линейно

зависимыми, если существуют числа

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ не все равные 0, для

которых имеет место равенство

$$\lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{a}_n = \vec{0}$$

- Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ наз-ся

линейно независимыми, если равенство

$$\lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{a}_n = 0$$

выполняется только при

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$$

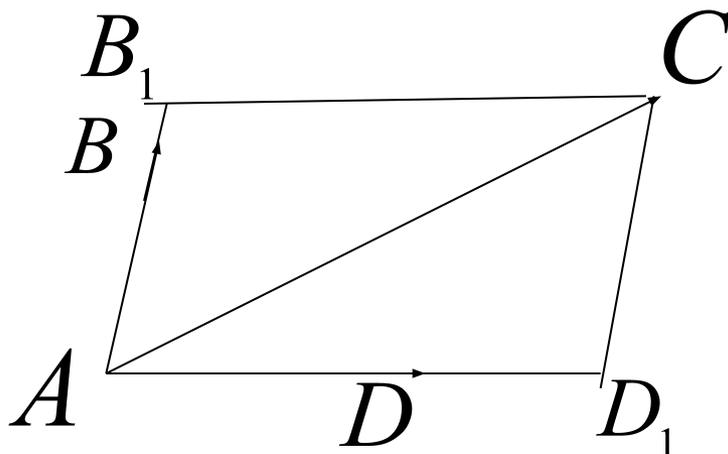
$$\vec{a}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \vec{a}_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \vec{a}_3 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \vec{a}_n$$

$$\vec{a}_1 = \mu_2 \vec{a}_2 + \mu_3 \vec{a}_3 + \dots + \mu_n \vec{a}_n$$

$\mu_2 \vec{a}_2 + \mu_3 \vec{a}_3 + \dots + \mu_n \vec{a}_n$ — *линейная комбинация векторов*

- Для того чтобы векторы были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один из этих векторов можно было представить в виде линейной комбинации остальных.
- Всякие три вектора на плоскости линейно зависимы.

- Рассмотрим три вектора на плоскости



$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{AD_1}$$

$$\overrightarrow{AB_1} = \lambda_1 \cdot \overrightarrow{AB} \quad \overrightarrow{AD_1} = \lambda_2 \cdot \overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{AC} = \lambda_1 \cdot \overrightarrow{AB} + \lambda_2 \cdot \overrightarrow{AD}$$

- Для того чтобы два вектора были линейно независимы, необходимо и достаточно, чтобы они были неколлинеарны.
- Для того чтобы три вектора в пространстве были линейно независимы, необходимо и достаточно, чтобы они были некопланарны.

- Максимальное число линейно независимых векторов на плоскости равно двум.
- Максимальное число линейно независимых векторов в пространстве равно трём.

Базис на плоскости и в пространстве

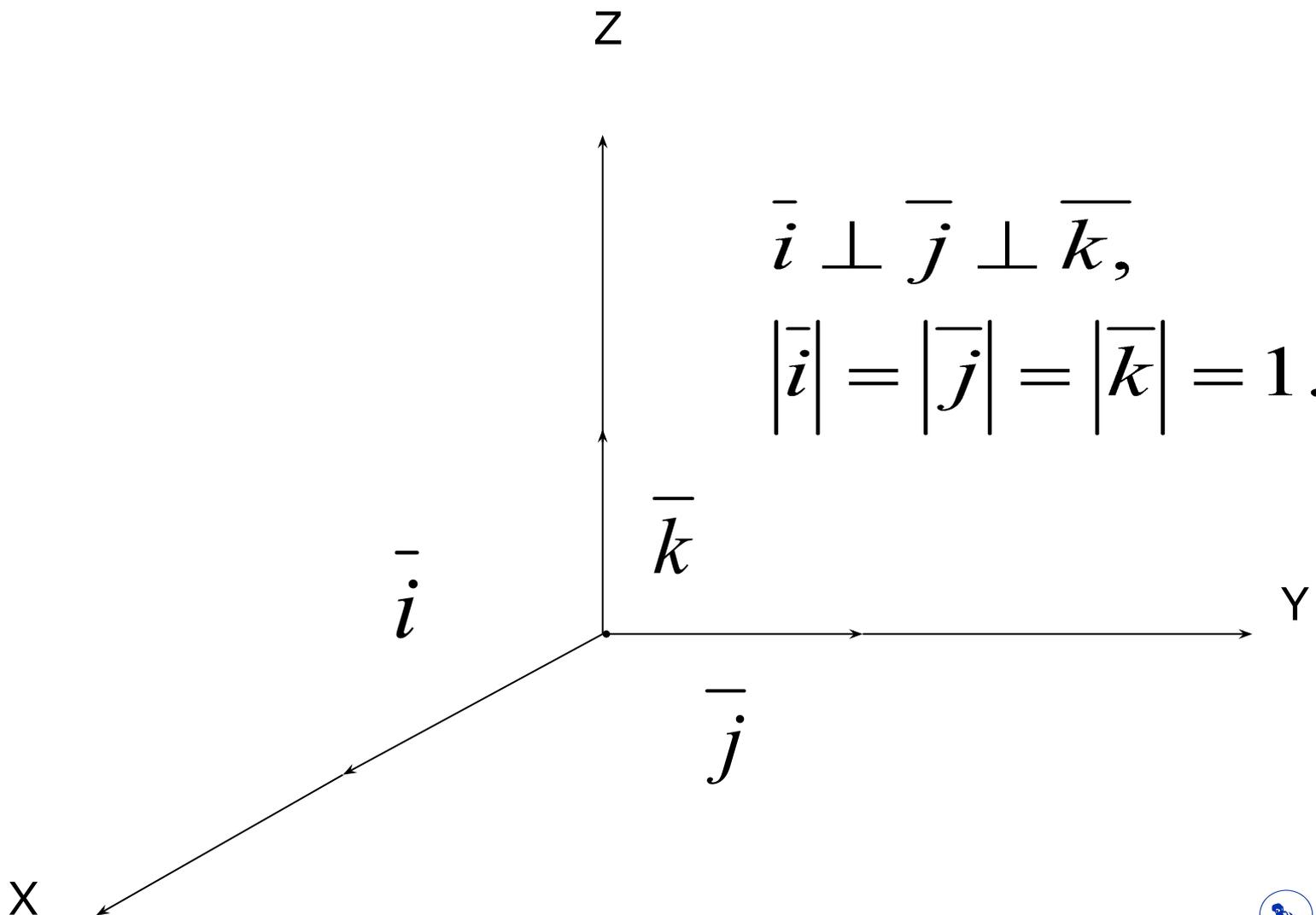
- Базисом на плоскости называют два любых линейно независимых вектора.

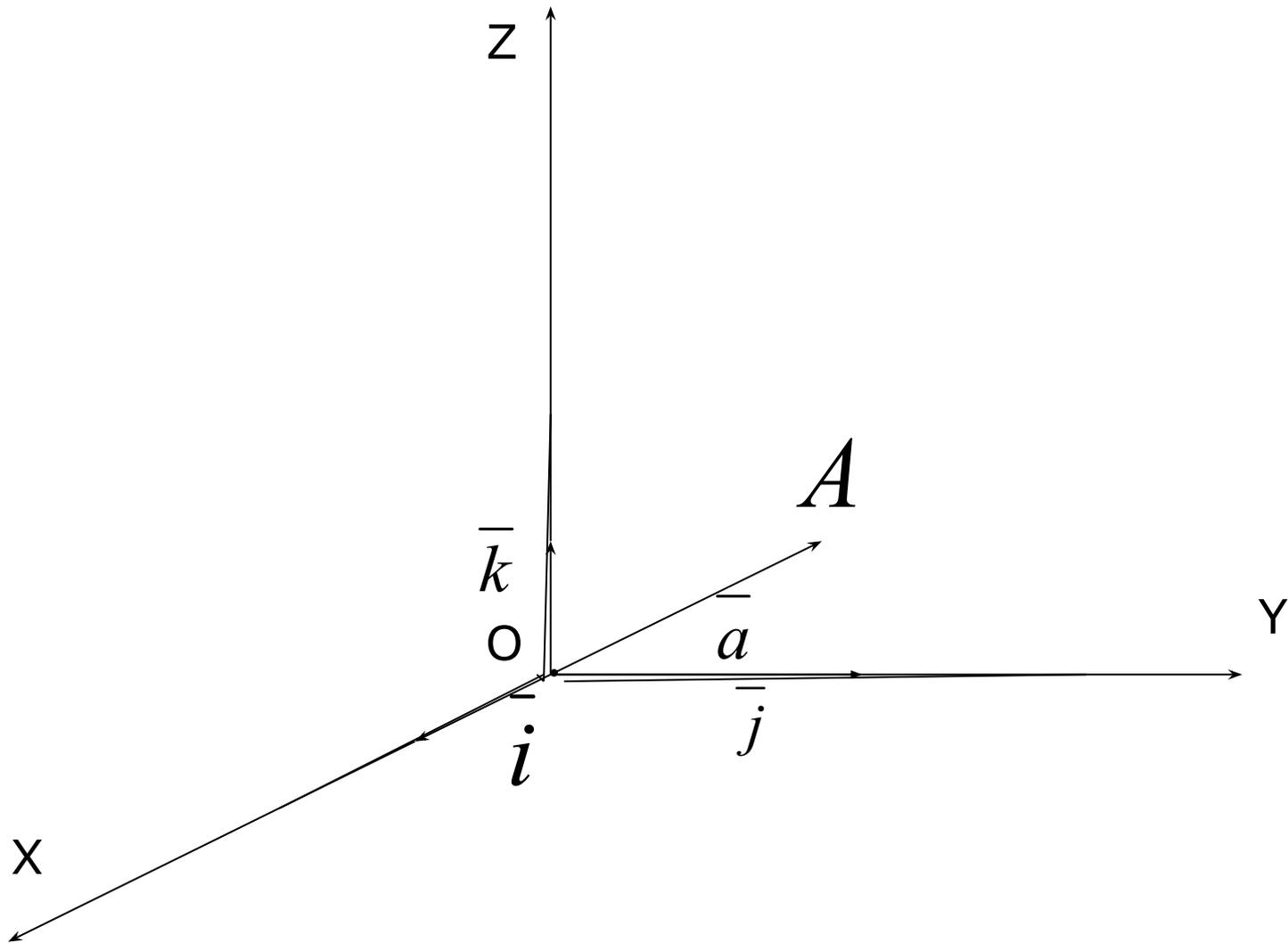
Т. Разложение любого вектора \vec{a}
на плоскости по базису \vec{b}, \vec{c}
является единственным

- Базисом в пространстве называют три любых линейно независимых вектора.

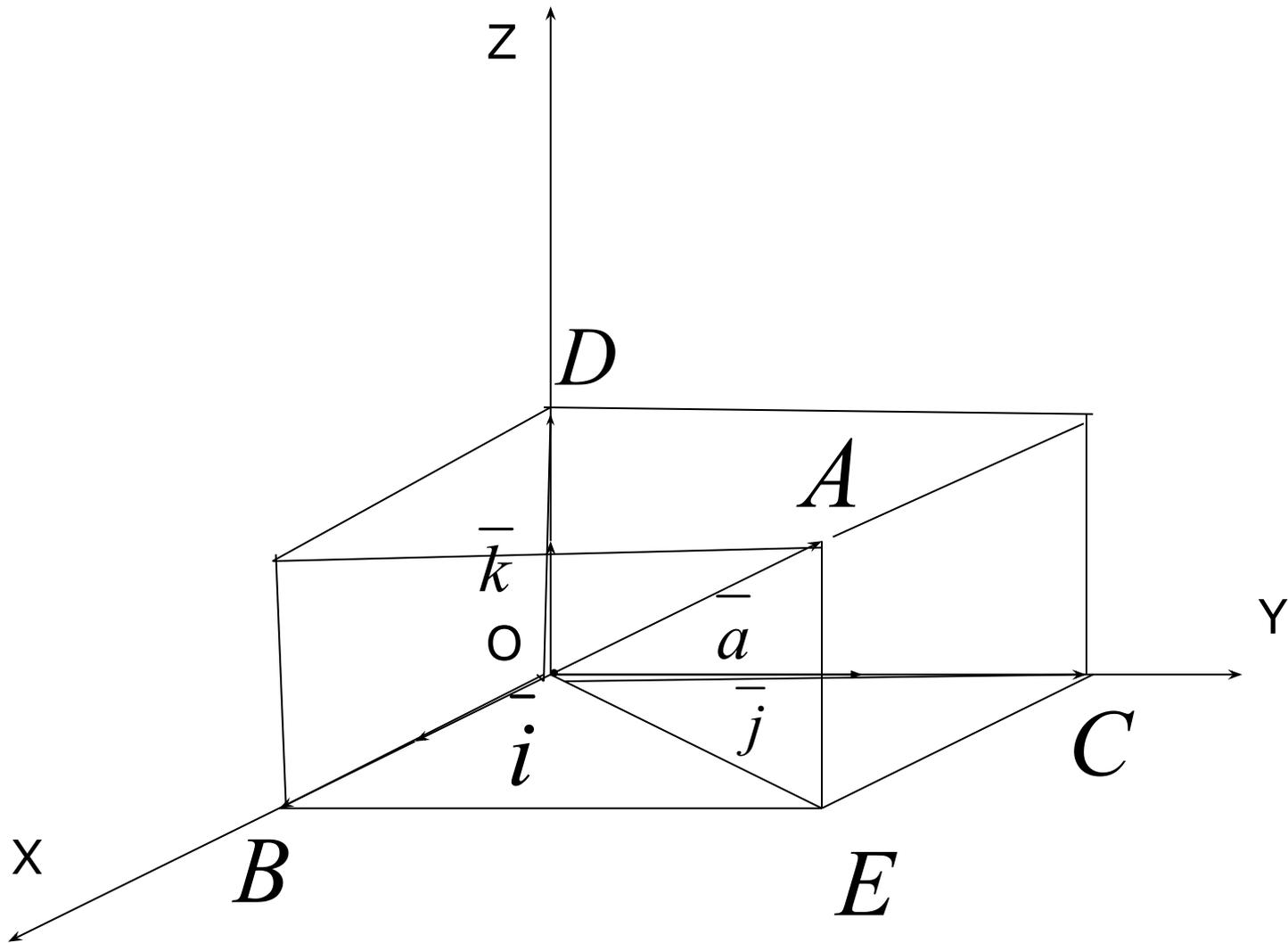
Т. Разложение любого вектора \vec{a} в пространстве по базису $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ является единственным

Прямоугольный декартовый базис





O



O

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EA}$$

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{OB} = np_{ox} \vec{a} \cdot \vec{i} \qquad np_{ox} \vec{a} = a_x$$

$$\overrightarrow{OC} = np_{oy} \vec{a} \cdot \vec{j} \qquad np_{oy} \vec{a} = a_y$$

$$\overrightarrow{OD} = np_{oz} \vec{a} \cdot \vec{k} \qquad np_{oz} \vec{a} = a_z$$

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$$

Линейные операции над векторами в координатной форме

• Пусть $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$
 $\vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}$

тогда:

1) $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x) \cdot \vec{i} + (a_y \pm b_y) \cdot \vec{j} + (a_z \pm b_z) \cdot \vec{k}$

2) $\vec{\lambda a} = \lambda a_x \cdot \vec{i} + \lambda a_y \cdot \vec{j} + \lambda a_z \cdot \vec{k}$

3) $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = \lambda$

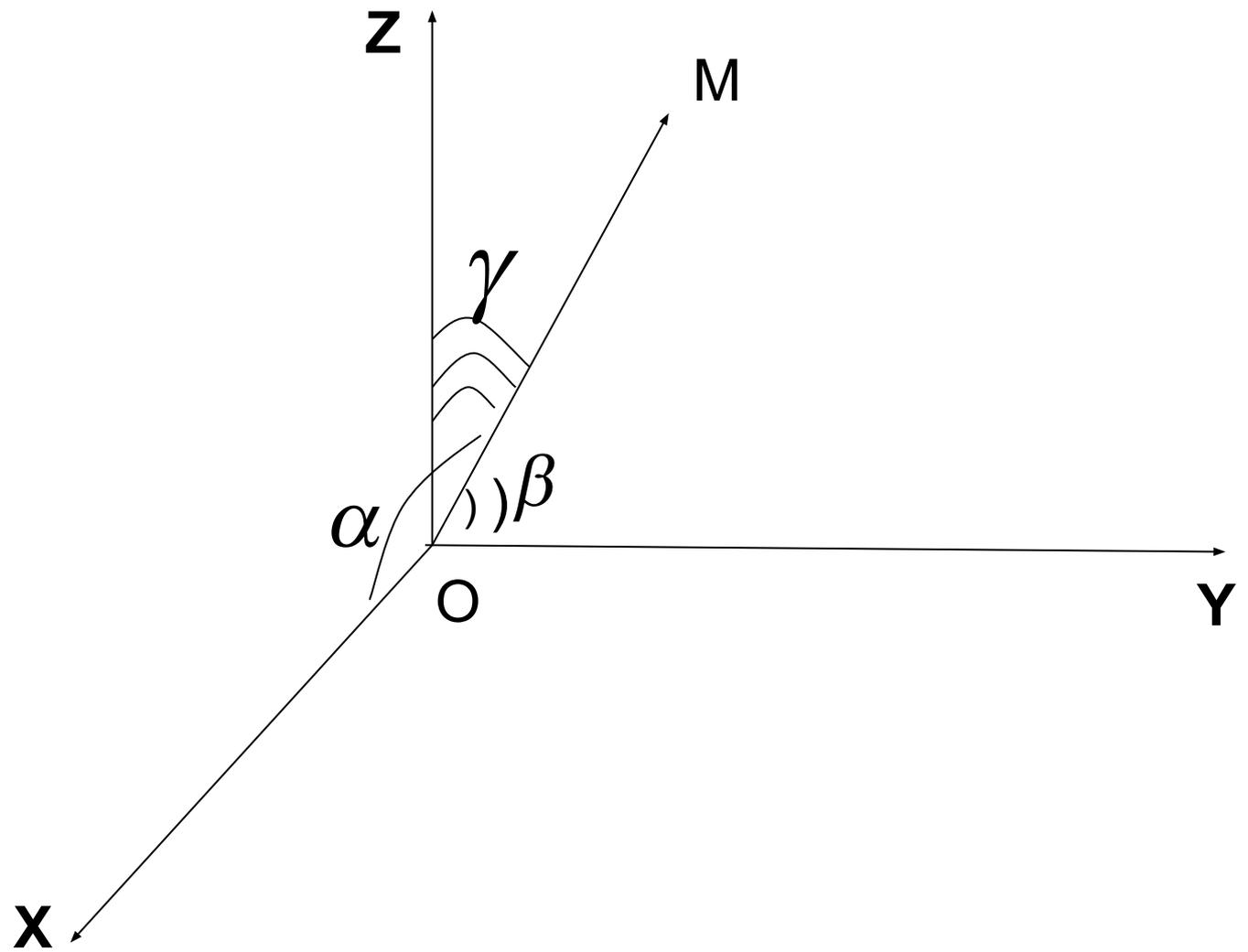
4) $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

$$A(x_1; y_1; z_1) \quad B(x_2; y_2; z_2)$$

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Направляющие косинусы



- Пусть дан вектор

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$$

$$a_x = np_{ox} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \alpha$$

$$a_y = np_{oy} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \beta$$

$$a_z = np_{oz} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \gamma$$

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|a|}$$

$$\cos \beta = \frac{a_y}{|a|}$$

$$\cos \gamma = \frac{a_z}{|a|}$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

Координаты единичного вектора

$$\bar{a}_0 = \{ \cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma \},$$

Пример

Найти косинусы углов, которые, вектор \overline{AB} составляет с осями координат, если $A(1,2,3)$ и $B(2,4,5)$.

Решение.

$$\overline{AB} = \{2 - 1; 4 - 2; 5 - 3\} = \{1; 2; 2\},$$

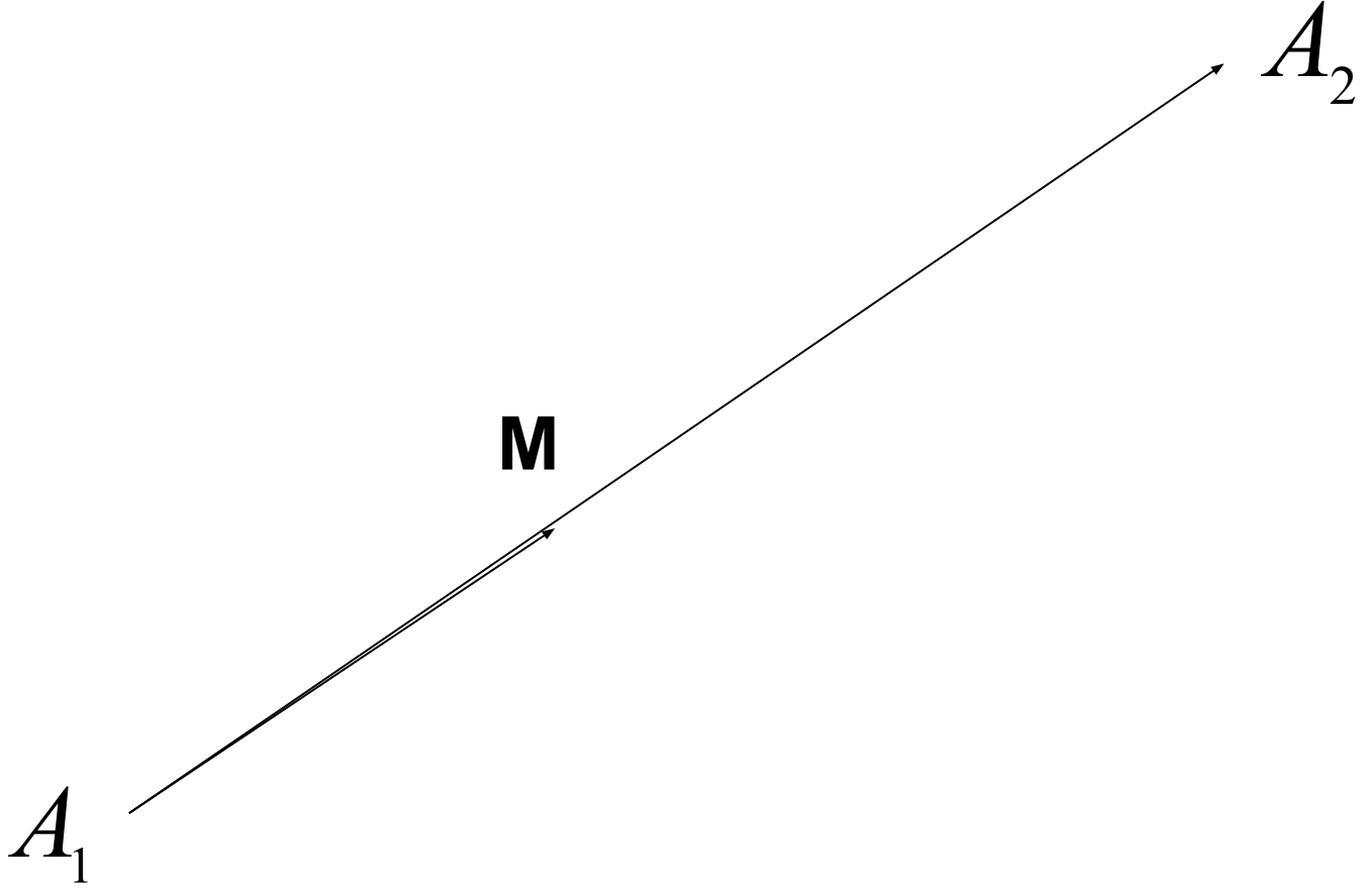
$$|\overline{AB}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3,$$

тогда

$$\cos \alpha = \frac{1}{3}, \cos \beta = \frac{2}{3}, \cos \gamma = \frac{2}{3}$$



Деление отрезка в данном отношении



$$\begin{array}{l} A_1(x_1; y_1; z_1) \\ A_2(x_2; y_2; z_2) \end{array} \quad M(x; y; z)$$

$$\frac{|A_1 M|}{|M A_2|} = \lambda$$

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$$

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

$$z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$$

- Если $\lambda = 1$, т.е. $|A_1M| = |MA_2|$, то

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением векторов называется произведение их модулей на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot np_{\vec{a}} \vec{b}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{b}| \cdot np_{\vec{b}} \vec{a}$$

Проекция вектора на вектор

$$\text{пр}_b \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$$

Угол между векторами

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Физический смысл скалярного произведения

Работа постоянной силы на прямолинейном участке пути равна скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения.

Физический смысл скалярного произведения



Свойства скалярного произведения

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a}$$

$$\lambda(\overline{a} \cdot \overline{b}) = (\lambda \overline{a}) \cdot \overline{b} = \overline{a} \cdot (\lambda \overline{b})$$

Свойства скалярного произведения (продолжение)

$$-a^2 = |\overline{a}|^2$$

$$|\overline{a}| = \sqrt{-a^2}$$

- Пусть даны два вектора

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$$

$$\vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}$$

Найдем скалярное произведение этих векторов

$$\begin{aligned} & (a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}) (b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}) = \\ & = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \end{aligned}$$

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{i}^2 = |\vec{i}|^2 = 1$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$$

$$\vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{j}^2 = |\vec{j}|^2 = 1$$

$$\vec{j} \cdot \vec{k} = 0$$

$$\vec{k} \cdot \vec{k} = \vec{k}^2 = |\vec{k}|^2 = 1$$

$$\vec{i} \cdot \vec{k} = 0$$

Пример

Дан вектор $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$, причем $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 5$,
угол φ между векторами \vec{a} и \vec{b} равен 60° .

Найти модуль вектора \vec{c} .

Решение

$$|\vec{c}| = \sqrt{c^2} = \sqrt{(2\vec{a} + 3\vec{b})^2} = \sqrt{4\vec{a}^2 + 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 9\vec{b}^2}.$$

Так как $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = 4^2 = 16$ и $\vec{b}^2 = |\vec{b}|^2 = 5^2 = 25$,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \varphi = 4 \cdot 5 \cos 60^\circ = 10,$$

то

$$|\vec{c}| = \sqrt{4 \cdot 16 + 12 \cdot 10 + 9 \cdot 25} = \sqrt{409}.$$



Векторное произведение векторов

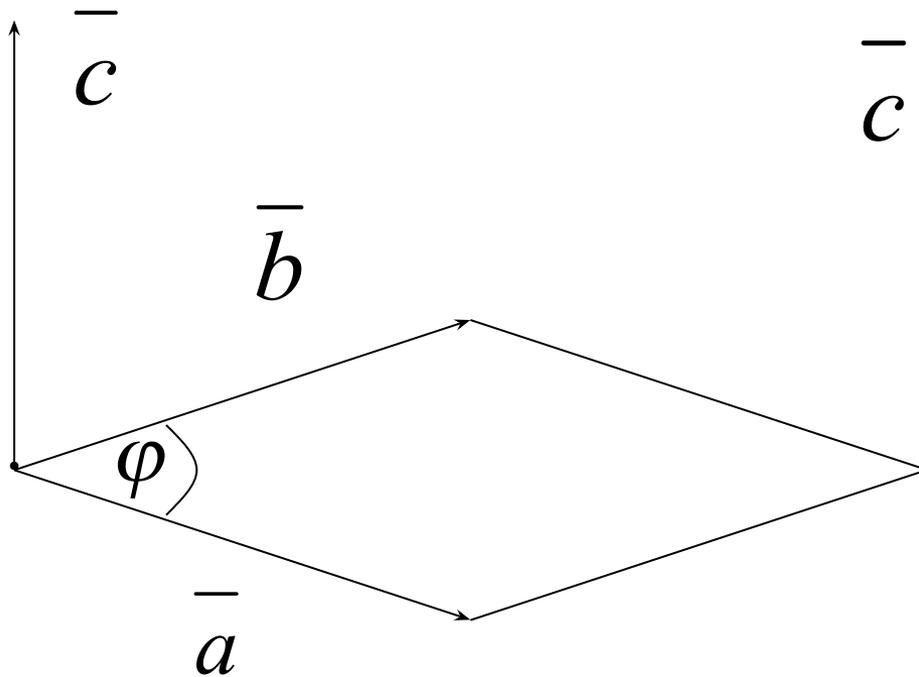
• Векторным произведением вектора \vec{a} на вектор \vec{b} наз. вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, удовлетворяющий следующим условиям:

$$1) \quad |\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$$

$$2) \quad \vec{c} \perp \vec{a} \quad \vec{c} \perp \vec{b}$$

3) векторы образуют правую тройку

Обозначение векторного произведения векторов

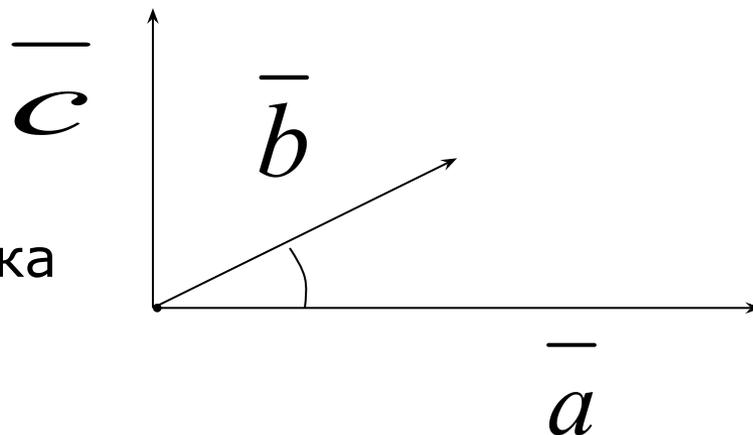


$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

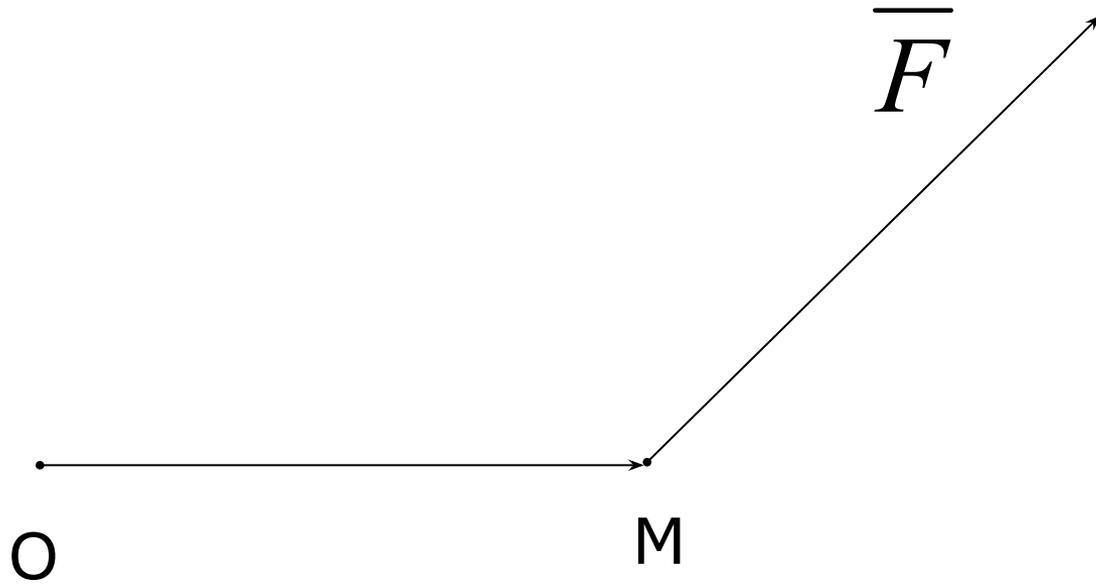
Понятие «правой» тройки векторов

Тройку векторов \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} называют *правой*, если направление вектора \vec{c} таково, что, смотря из его конца вдоль вектора, кратчайший поворот от вектора \vec{a} к вектору \vec{b} будет виден против движения часовой стрелки.

\vec{a} , \vec{b} , \vec{c} - правая тройка



Физический смысл векторного произведения



Физический смысл векторного произведения

Если \vec{F} – сила, приложенная к точке M , то момент этой силы относительно точки O равен векторному произведению векторов \vec{F} и \vec{OM} .

Пример

Найти векторное произведение векторов

$$\bar{a} = 2\bar{i} + 3\bar{j} - \bar{k},$$

$$\bar{b} = 3\bar{i} - \bar{j} - 4\bar{k}.$$

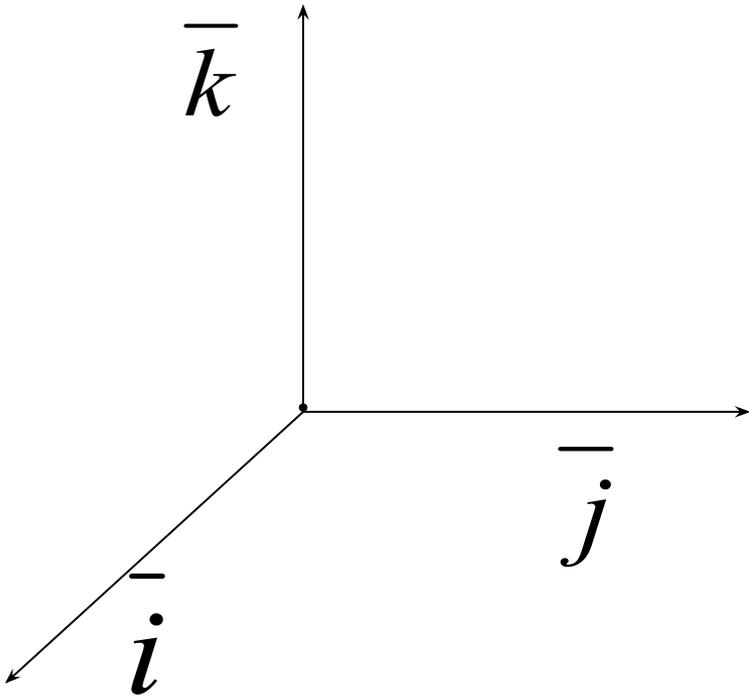
Решение

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} \cdot \bar{i} -$$

$$-\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} \cdot \bar{j} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \cdot \bar{k} = -13\bar{i} + 5\bar{j} - 11\bar{k}.$$



Векторные произведения координатных векторов



$$\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k},$$

$$\bar{j} \times \bar{i} = -\bar{k},$$

$$\bar{k} \times \bar{i} = \bar{j},$$

$$\bar{i} \times \bar{k} = -\bar{j},$$

$$\bar{j} \times \bar{k} = \bar{i}.$$

$$\bar{k} \times \bar{j} = -\bar{i}.$$

Векторное произведение в координатной форме

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Площадь параллелограмма

$$S_{\text{пар}} = \left| \vec{a} \times \vec{b} \right|$$

Площадь треугольника

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$$

Свойства векторного произведения

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0} \text{ или } \vec{b} = \vec{0} \text{ или } \vec{a} \parallel \vec{b}$$

$$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$$

Свойства векторного произведения

$$(\bar{a} + \bar{b}) \times \bar{c} = \bar{a} \times \bar{c} + \bar{b} \times \bar{c}$$

$$\lambda(\bar{a} \times \bar{b}) = (\lambda\bar{a}) \times \bar{b} = \bar{a} \times (\lambda\bar{b})$$

Пример

Найти $\left| (2\bar{a} + 3\bar{b}) \times (\bar{a} - 2\bar{b}) \right|$, если $|\bar{a}| = 2, |\bar{b}| = 1, \varphi = 90^\circ$.

Решение

$$\begin{aligned} & \left| (2\bar{a} + 3\bar{b}) \times (\bar{a} - 2\bar{b}) \right| = \\ & = \left| 2(\bar{a} \times \bar{a}) + 3(\bar{b} \times \bar{a}) - 4(\bar{a} \times \bar{b}) - 6(\bar{b} \times \bar{b}) \right| = \\ & = 7|\bar{b} \times \bar{a}| = 7|\bar{b}| \cdot |\bar{a}| \sin \varphi = \\ & = 7 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \sin 90^\circ = 14. \end{aligned}$$

Смешанное произведение

Смешанным произведением трёх векторов называется произведение

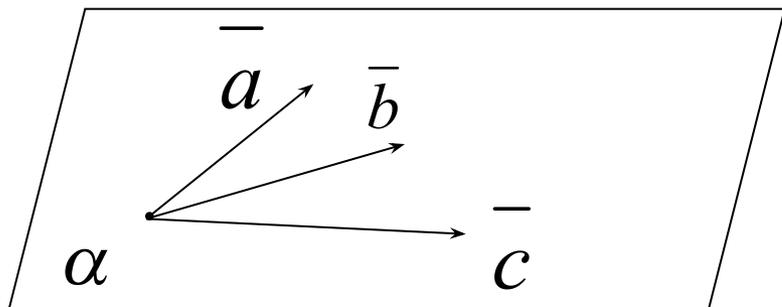
вида : $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

Смешанное произведение

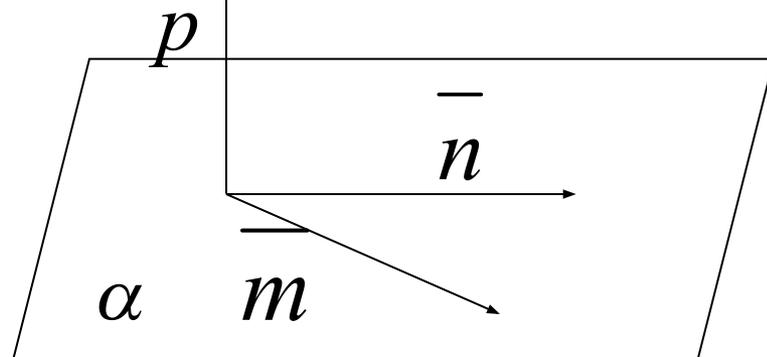
$$\overline{abc} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Компланарные векторы

Три вектора называются компланарными, если они лежат в одной или параллельных плоскостях.



$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – компланарны,



$\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$ – некопланарны.

Условие компланарности трёх векторов

Если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны, то
$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0.$$

Элементами определителя являются координаты векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

Объём параллелепипеда

$$V = \left| \overline{abc} \right|$$

Объём тетраэдра

$$V_{тет} = \frac{1}{6} \left| \overline{abcd} \right|$$