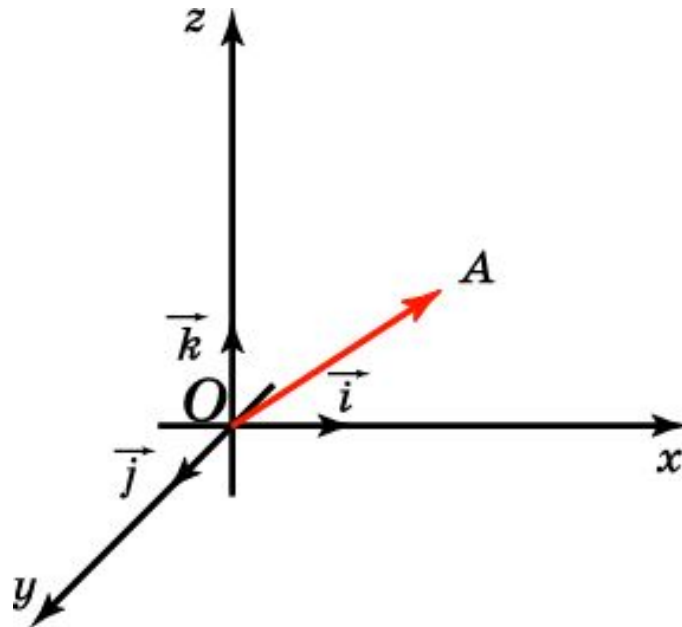


КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА

Отложим вектор так, чтобы его начало совпало с началом координат. Тогда координаты его конца называются **координатами вектора**. Обозначим i , j , k векторы с координатами $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ соответственно. Их длины равны единице, а направления совпадают с направлениями соответствующих осей координат. Будем изображать эти векторы, отложенными от начала координат и называть их **координатными векторами**.



КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА

Теорема. Вектор a имеет координаты (x, y, z) тогда и только тогда, когда он представим в виде $\vec{a} = xi + yj + zk$.

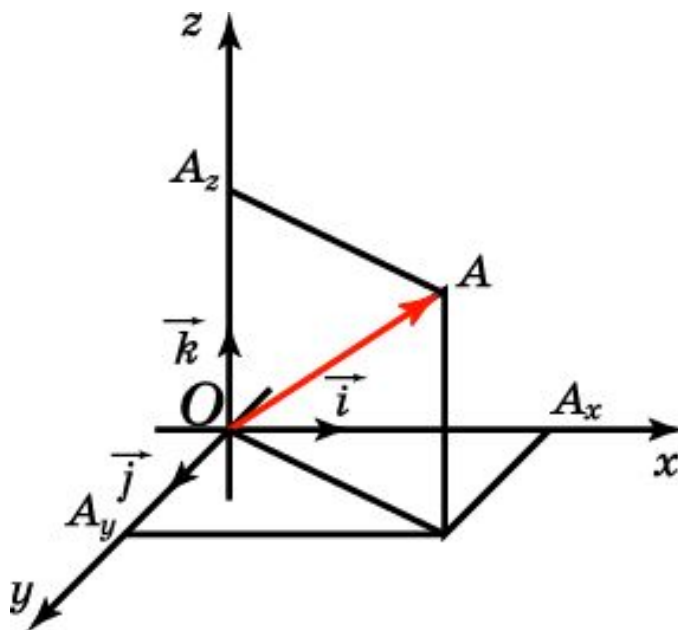
Доказательство. Отложим вектор a от начала координат и его конец обозначим через A . Имеет место равенство

$$\vec{OA} = \vec{OA_x} + \vec{OA_y} + \vec{OA_z}.$$

Точка A имеет координаты (x, y, z) тогда и только тогда, когда выполняются равенства

$$\vec{OA_x} = xi, \vec{OA_y} = yj, \vec{OA_z} = zk,$$

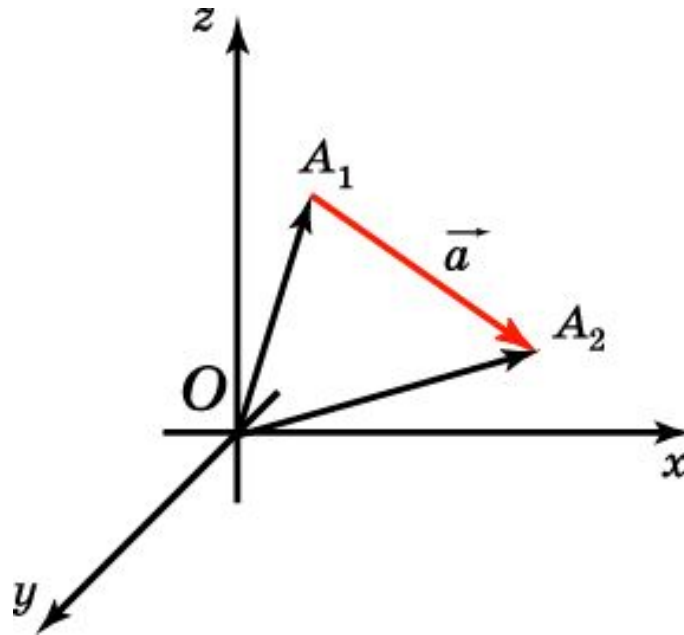
и, значит, $\vec{a} = xi + yj + zk$.



ДЛИНА ВЕКТОРА

Если вектор $\vec{a}$ задан координатами начальной и конечной точек, $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, то его длина выражается формулой

$$|\overrightarrow{A_1 A_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$



Упражнение 1

Найдите координаты векторов:

а) $\vec{a} = -2\vec{i} + 6\vec{j} + \vec{k}$;

б) $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j}$;

в) $\vec{c} = -3\vec{j} + 2\vec{k}$;

г) $\vec{d} = -5\vec{i} + 5\vec{k}$.

Ответ: а) (-2, 6, 1); б) (1, 3, 0); в) (0, -3, 2); г) (-5, 0, 5).

Упражнение 2

Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если: а) $A(2, -6, 9)$, $B(-5, 3, -7)$; б) $A(1, 3, -8)$, $B(6, -5, -10)$; в) $A(-3, 1, -20)$, $B(5, 1, -1)$.

Ответ: а) $(-7, 9, -16)$; б) $(5, -8, -2)$; в) $(8, 0, 19)$.

Упражнение 3

Вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты (a, b, c) . Найдите координаты вектора $\overrightarrow{BA}$.

Ответ: $(-a, -b, -c)$.

Упражнение 4

В прямоугольном параллелепипеде $OABCO_1A_1B_1C_1$ вершина O – начало координат, ребра OA , OC , OO_1 лежат на осях координат Ox , Oy и Oz соответственно и $OA=2$, $OC=3$, $OO_1=4$. Найдите координаты векторов:

а) $\overrightarrow{OA_1}$;

б) $\overrightarrow{OB_1}$;

в) $\overrightarrow{OO_1}$;

г) $\overrightarrow{OC}$.

Ответ: а) $(2, 0, 4)$;

б) $(2, 3, 4)$;

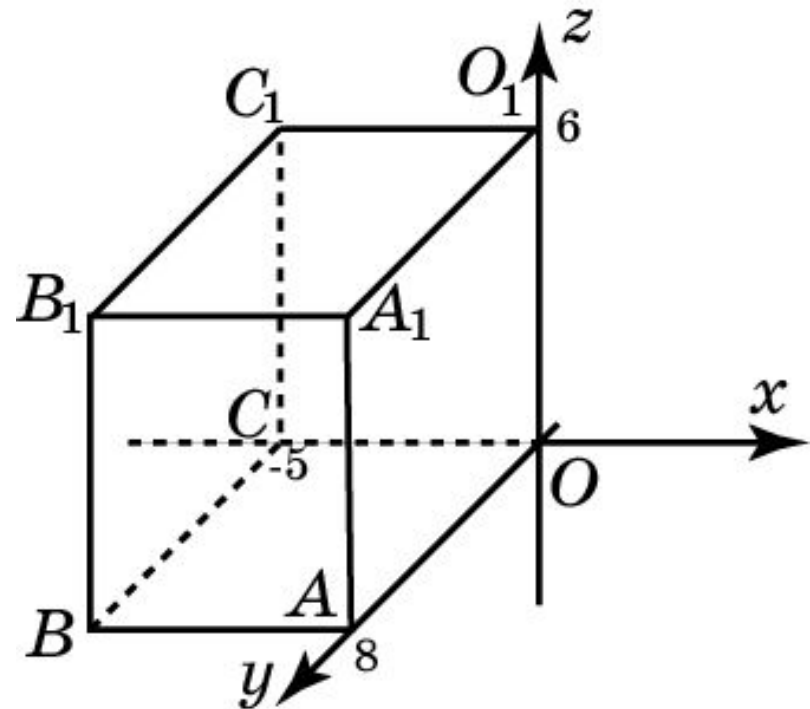
в) $(0, 0, 4)$;

г) $(0, 3, 0)$.

Упражнение 5

На рисунке изображен прямоугольный параллелепипед $OABCO_1A_1B_1C_1$, у которого вершина O совпадает с началом координат. Найдите координаты вектора: а) $\overrightarrow{OA}$; б) $\overrightarrow{OC}$; в) $\overrightarrow{OB}$; г) $\overrightarrow{OO_1}$; д) $\overrightarrow{BC_1}$; е) $\overrightarrow{B_1C_1}$; ж) $\overrightarrow{AA_1}$; з) $\overrightarrow{OB_1}$; и) $\overrightarrow{O_1B}$.

Ответ: а) $(0, 8, 0)$;
б) $(-5, 0, 0)$;
в) $(-5, 8, 0)$;
г) $(0, 0, 6)$;
д) $(0, -8, 6)$;
е) $(0, -8, 0)$;
ж) $(0, 0, 6)$;
з) $(-5, 8, 6)$;
и) $(-5, 8, -6)$.



Упражнение 6

Найдите координаты векторов $\vec{a} + b$ и $\vec{a} - b$, если $a(1, 0, 2)$, $b(0, 3, -4)$.

Ответ: $(1, 3, -2)$; $(1, -3, 6)$.

Упражнение 7

Даны векторы a $(-1, 2, 8)$ и b $(2, -4, 3)$. Найдите координаты векторов:

а) $3\vec{a} + 2b$;

б) $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b}$;

в) $-\vec{a} + 5b$.

Ответ: а) $(1, -2, 30)$;

б) $(-1, 2, 3\frac{1}{4})$;

в) $(11, -22, 7)$.

Упражнение 8

Найдите координаты точки N , если вектор $\overrightarrow{MN}$ имеет координаты $(4, -3, 0)$ и точка $M - (1, -3, -7)$.

Ответ: $(5, -6, -7)$.

Упражнение 9

Какому условию должны удовлетворять координаты вектора, чтобы он был: а) перпендикулярен координатной плоскости Oxy ; б) параллелен координатной прямой Ox ?

Ответ: а) Первая и вторая координаты равны нулю;
б) вторая и третья координаты равны нулю.

Упражнение 10

Найдите координаты конца единичного вектора с началом в точке $A(1, 2, 3)$ и: а) перпендикулярного плоскости Oxy ; б) параллельного прямой Ox .

Ответ: а) $(1, 2, 4)$, $(1, 2, 2)$;
б) $(2, 2, 3)$, $(0, 2, 3)$.

Упражнение 11

Найдите длину вектора:

а) $\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$;

б) $8\vec{i} + \vec{k}$;

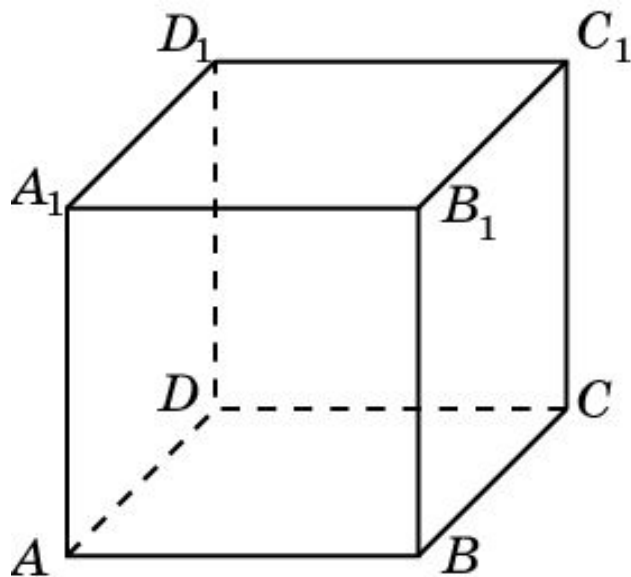
в) $-\vec{j} + 2\vec{k}$.

Ответ: а) $\sqrt{14}$; б) $\sqrt{65}$; в) $\sqrt{5}$.

Упражнение 12

В единичном кубе $A...D_1$ найдите длину вектора:

а) $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{BD_1}$.

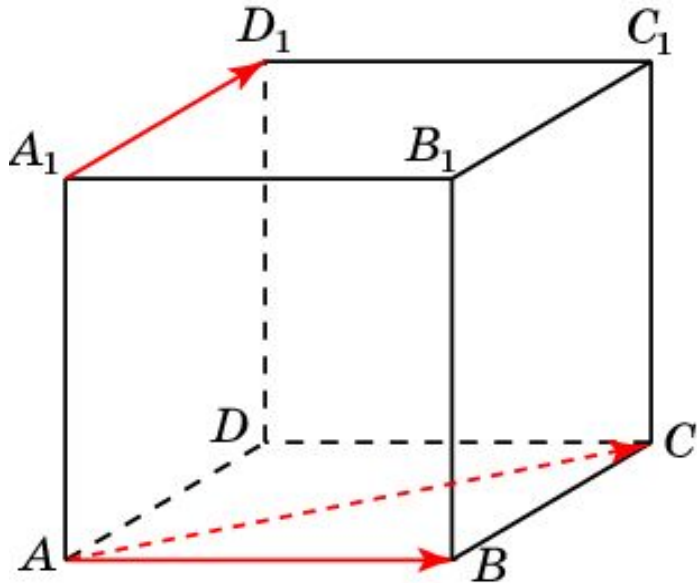


Ответ. а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{3}$.

Упражнение 13

В единичном кубе $A...D_1$ найдите длину вектора

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A_1D_1}.$$



Решение. Данная сумма векторов равна вектору $\overrightarrow{AC}$.

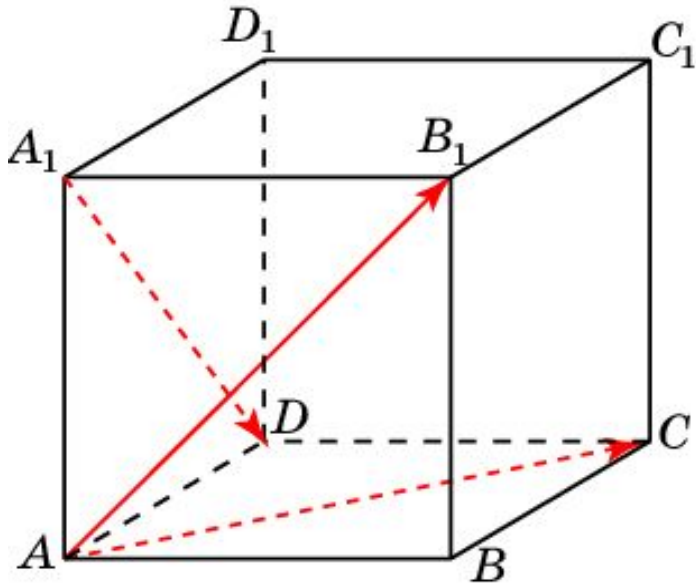
Его длина равна $\sqrt{2}$.

Ответ. $\sqrt{2}$.

Упражнение 14

В единичном кубе $A...D_1$ найдите длину вектора

$$\overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{A_1D}.$$



Решение. Данная сумма векторов равна вектору $\overrightarrow{AC}$.

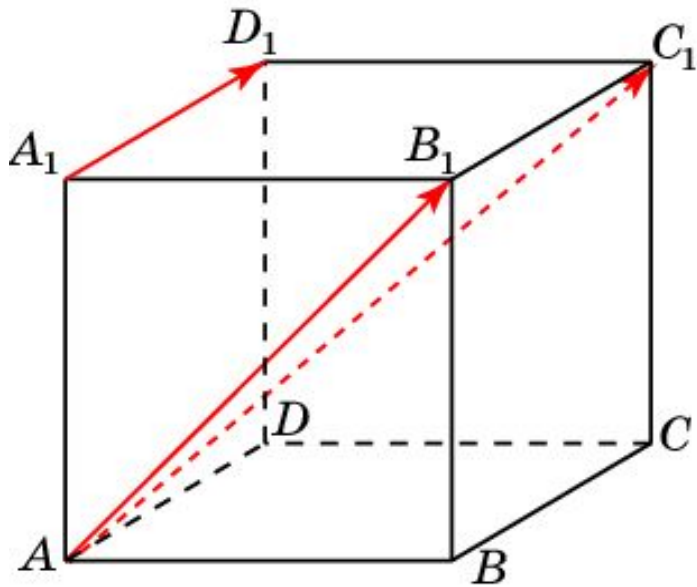
Его длина равна $\sqrt{2}$.

Ответ. $\sqrt{2}$.

Упражнение 15

В единичном кубе $A...D_1$ найдите длину вектора

$$\overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{A_1D_1}.$$



Решение. Данная сумма векторов равна вектору $\overrightarrow{AC_1}$.

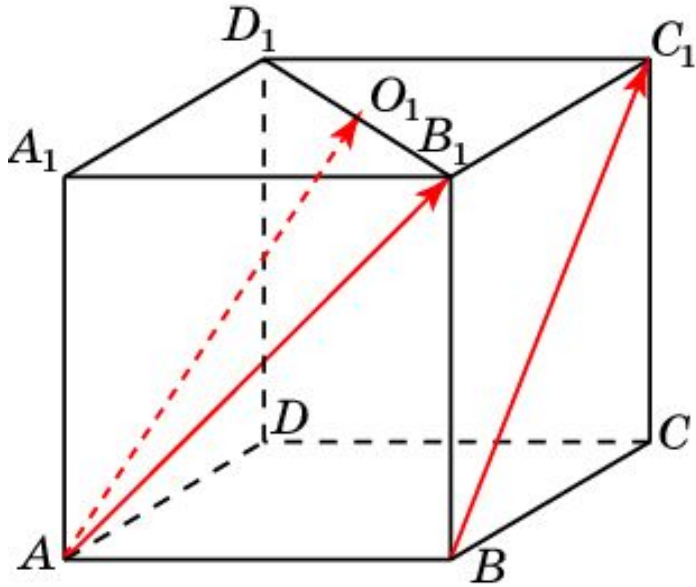
Его длина равна $\sqrt{3}$.

Ответ. $\sqrt{3}$.

Упражнение 16

В единичном кубе $A...D_1$ найдите длину вектора

$$\overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{BC_1}.$$



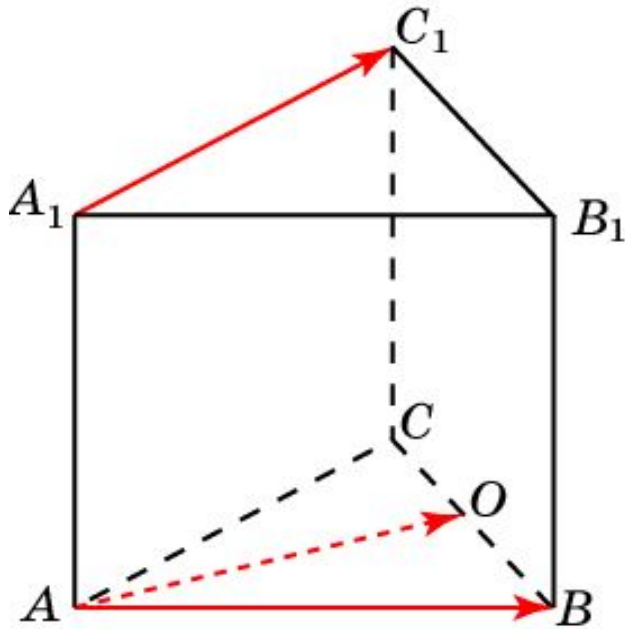
Решение. Данная сумма векторов равна удвоенному вектору $\overrightarrow{AO_1}$, где O_1 – середина отрезка B_1D_1 .

Его длина равна $\sqrt{7}$.

Ответ. $\sqrt{7}$.

Упражнение 17

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите длину вектора $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A_1C_1}$.



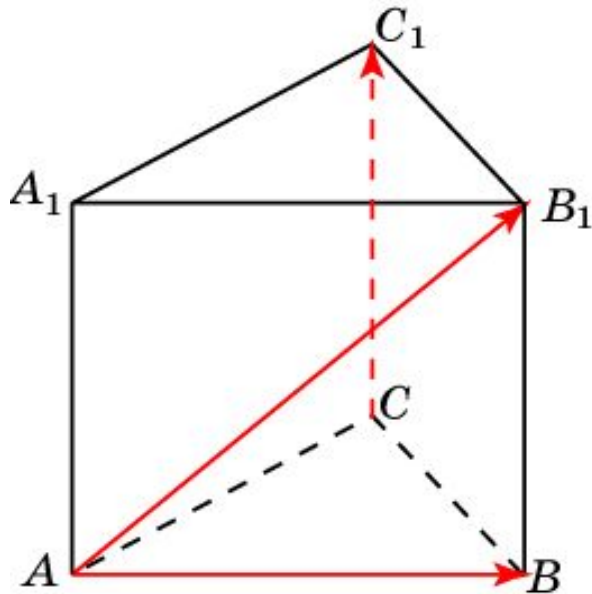
Решение. Длина данного вектора равна длине вектора удвоенного вектора $\overrightarrow{AO}$, где O – середина отрезка BC .

Его длина равна $\sqrt{3}$.

Ответ. $\sqrt{3}$.

Упражнение 18

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите длину вектора $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CC_1}$.

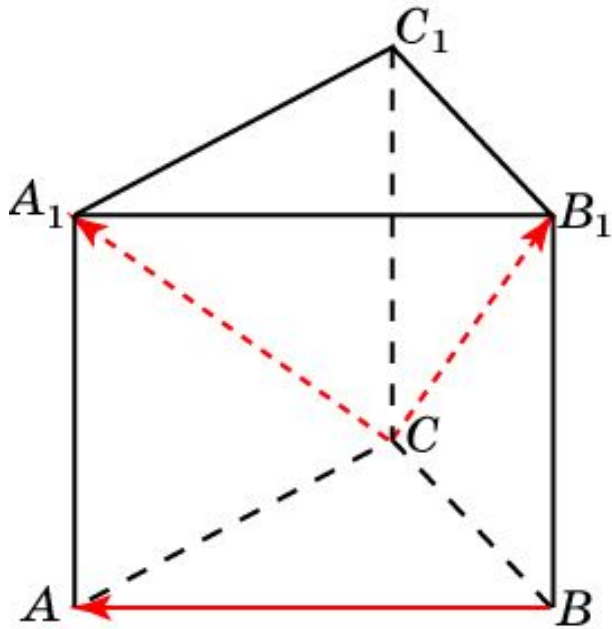


Решение. Длина данного вектора, равна длине вектора $\overrightarrow{AB_1}$, т.е. равна $\sqrt{2}$.

Ответ. $\sqrt{2}$.

Упражнение 19

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите длину вектора $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB_1}$.



Решение. Длина данного вектора равна длине вектора $\overrightarrow{CA_1}$, т.е. равна $\sqrt{2}$.

Ответ. $\sqrt{2}$.

Упражнение 20

В правильной шестиугольной призме $A \dots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите длину вектора:

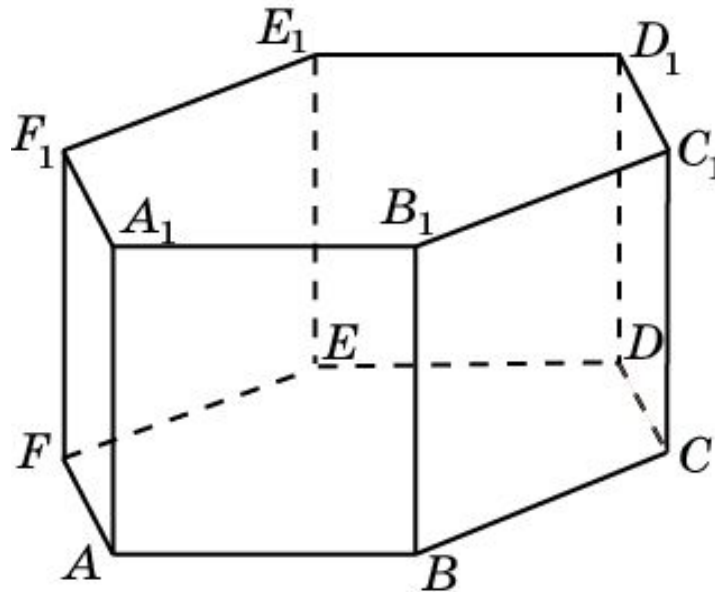
а) $\overrightarrow{AB_1}$;

б) $\overrightarrow{AC_1}$;

в) $\overrightarrow{AD_1}$;

г) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A_1E_1}$;

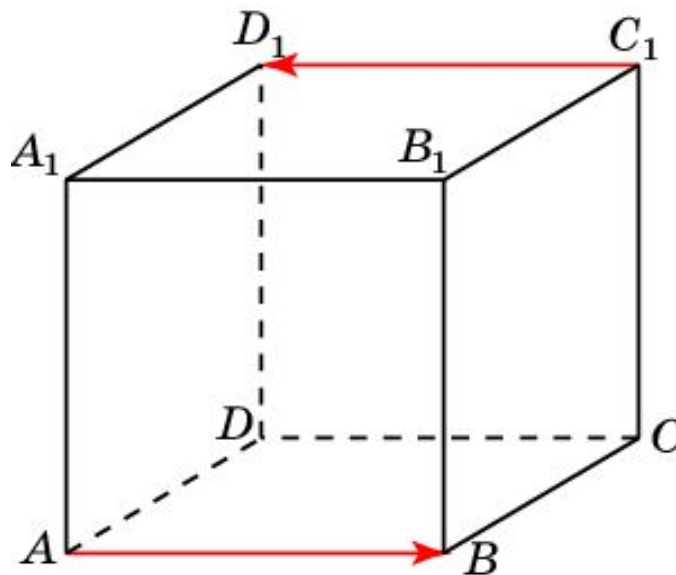
д) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A_1F_1}$.



Ответ. а) $\sqrt{2}$; б) 2; в) $\sqrt{5}$; г) $\sqrt{5}$; д) 1.

Упражнение 21

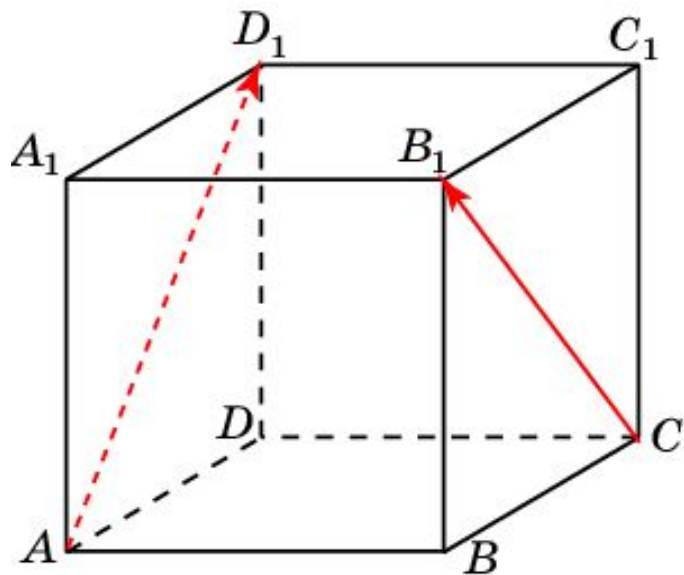
В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{C_1D_1}$.



Ответ. 180° .

Упражнение 22

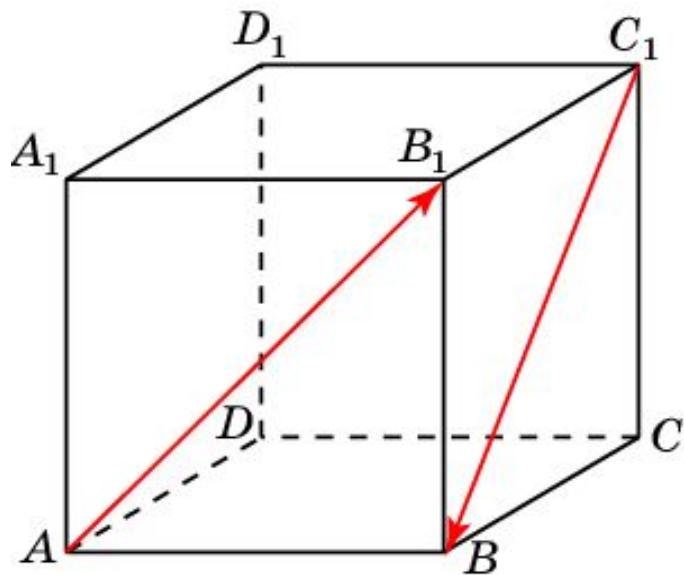
В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между векторами $\overrightarrow{AD_1}$ и $\overrightarrow{CB_1}$.



Ответ. 90° .

Упражнение 23

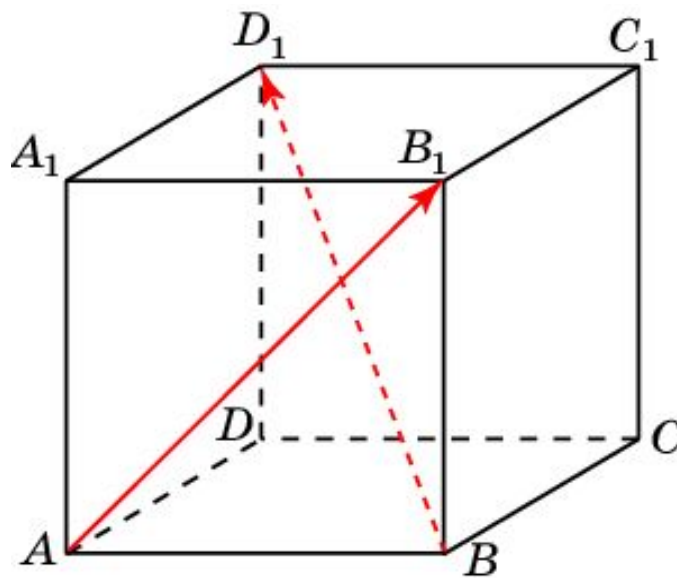
В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между векторами $\overrightarrow{AB_1}$ и $\overrightarrow{C_1B}$.



Ответ. 120° .

Упражнение 24

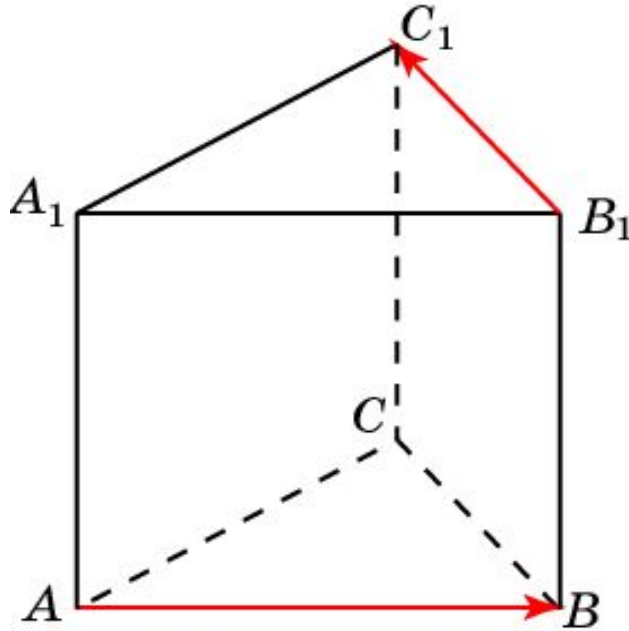
В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между векторами $\overrightarrow{AB_1}$ и $\overrightarrow{BD_1}$.



Ответ. 90° .

Упражнение 25

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{B_1C_1}$.



Ответ. 120° .

Упражнение 26

В правильной шестиугольной призме $A \dots F_1$ найдите угол между векторами:

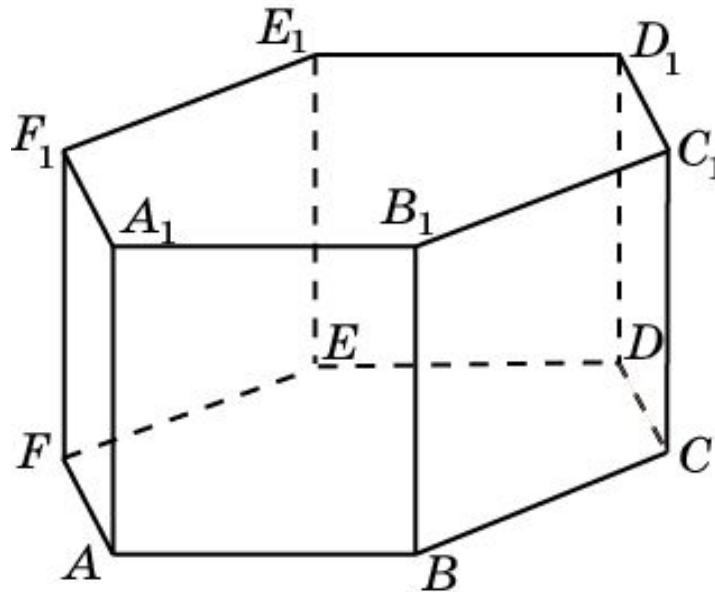
а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{B_1C_1}$;

б) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{C_1D_1}$;

в) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{B_1D_1}$;

г) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{B_1E_1}$;

д) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{C_1E_1}$.



Ответ. а) 60° ; б) 120° ; в) 90° ; г) 120° ; д) 150° .