БАЛТИЙСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИМЕНИ ИММАНУИЛА КАНТА

ИНСТИТУТ ИНФОРМАТИКИ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

[МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ]

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Функции нескольких переменных

ЛЕКЦИЯ 3 ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ.

Пример 1.

$$f(x) = f(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2) = \mathrm{x}_1^2 - \mathrm{x}_1\mathrm{x}_2 + \mathrm{x}_2^2 - 2\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 \rightarrow \text{extr.}$$

Необходимое условие экстремума 1-го порядка:

$$f'(\hat{x}) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f\ (x)}{\partial x_1} = \frac{\partial f\ (x)}{\partial x_2} = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2 = 0; \\ -x_1 + 2x_1 + 1 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим единственную стационарную точку $\hat{\mathrm{x}} = (1{,}0)$. *Матрица вторых производных*

$$\left(\frac{\partial^2 f\ \hat{x}}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j=1}^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

по критерию Сильвестера положительно определена. По достаточному условию локального экстремума функции нескольких переменных точка (1,0) Є locmin f. Поскольку функционал является квадратичным, то (1,0) Є absmin f, а $S_{max} = +\infty$.

Пример 2.

$$f(x) = f(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2) = \mathrm{x}_1^4 + \mathrm{x}_2^4 - \mathrm{x}_1^2 - 2\,\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_2^2 \quad \to \text{extr}$$

Необходимое условие экстремума 1-го порядка:

$$f'(\hat{x}) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f\ (x)}{\partial x_1} = \frac{\partial f\ (x)}{\partial x_2} = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 4\mathrm{x}_1^3 - 2x_1 - 2x_2 = 0; \\ 4\mathrm{x}_1^3 - 2x_1 - 2x_2 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, находим стационарные точки:

$$\hat{\mathrm{x}}^1 = (\hat{\mathrm{x}}_1, \hat{\mathrm{x}}_2) = (1{,}1), \qquad \hat{\mathrm{x}}^2 = (-1,-1), \qquad \hat{\mathrm{x}}^3 = (0{,}0),$$

Для проверки условий 2-го порядка матрицу вторых производных:

$$A = \left(\frac{\partial^2 f\ (\hat{x})}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j=1}^{2} = \begin{pmatrix} 12\hat{x}_1^2 - 2 & -2 \\ -2 & 12\hat{x}_2^2 - 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A|(1{,}1) = A|(-1,-1) = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix},$$

$$A|(0{,}0) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Матрица $\begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$ *по критерию Сильвестра положительно определена. По достаточному условию локального экстремума функции нескольких переменных точки* $(1,1)$ *и* $(-1,-1)$ *доставляют локальный минимум функции* f.

Матрица $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ *по критерию Сильвестра не является ни положительно, ни отрицательно определенной. Она является неположительно определенной матрицей* $(A \le 0)$ *и не является неотрицательно определенной матрицей.*

Следовательно, не выполняется необходимое условие локального минимума. Поэтому $\hat{x}^3 = (0,0) \notin locmin\, f$. *Поскольку* $f\,(h,-h) = 2\,h^4 > 0 = f\,(\hat{x}^3)$ *при малых* $h \neq 0$, *то* $\hat{x}^3 \notin locmax\, f$. *Очевидно, что* $S_{max} = +\infty$.

Пример 3.

Найти экстремумы неявно заданной функции двух переменных $x_3 = f(x_1, x_2)$, если

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 10 = 0$$

Решение. Частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x_1} = \dfrac{\partial x_3}{\partial x_1}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial x_2} = \dfrac{\partial x_3}{\partial x_2}$ находим из уравнений:

$$\begin{cases} F_{x_1} := \dfrac{\partial F}{\partial x_1} + \dfrac{\partial F}{\partial x_3} \cdot \dfrac{\partial x_3}{\partial x_1} = 0, \\ F_{x_2} := \dfrac{\partial F}{\partial x_2} + \dfrac{\partial F}{\partial x_3} \cdot \dfrac{\partial x_3}{\partial x_2} = 0, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - 2 + (2x_3 - 4)\dfrac{\partial x_3}{\partial x_1} = 0, \\ 2x_2 - 2 + (2x_3 - 4)\dfrac{\partial x_3}{\partial x_2} = 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Функции нескольких переменных

Необходимое условие экстремума 1-го порядка:

$$\frac{\partial x_3(\hat{\mathrm{x}})}{\partial x_1} = \frac{\partial x_3(\hat{\mathrm{x}})}{\partial x_2} = 0 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2\hat{x}_1 - \ 2 = 0, \\ 2\hat{x}_2 + \ 2 = \ 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{x}_1 = 1 \ \ , \\ \hat{x}_2 = -1. \end{cases}$$

Подставляя найденную точку $(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (1, -1)$ в заданное уравнение $F(x_1, x_2, x_3) = 0$, находим две стационарные точки

$$\widehat{\mathrm{x}^1} = (\widehat{\mathrm{x}_1}, \widehat{\mathrm{x}_2}, \widehat{\mathrm{x}_3}) = (1, -1, -2) \text{ и } \widehat{\mathrm{x}^2} = (\widehat{\mathrm{x}_1}, \widehat{\mathrm{x}_2}, \widehat{\mathrm{x}_3}) = (1, -1{,}6)$$

Функции нескольких переменных

Для проверки условий 2-го порядка надо выписать матрицу вторых производных в каждой стационарной точке. Дифференцируя первое уравнение правой части системы уравнений (*) по x_1, x_2 с учётом условий $\frac{\partial x_3}{\partial x_1} = \frac{\partial x_3}{\partial x_2} = 0$, имеем

$$2 + (2\mathrm{x}_3 - 4)\frac{\partial^2 x_3}{\partial^2 x_1} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 x_3}{\partial^2 x_1}|\hat{\mathrm{x}}^1 = \frac{1}{4}, \frac{\partial^2 x_3}{\partial^2 x_1}|\hat{\mathrm{x}}^2 = -\frac{1}{4}$$

$$(2\mathrm{x}_3 - 4)\frac{\partial^2 x_3}{\partial \mathrm{x}_1 \partial \mathrm{x}_2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 x_3}{\partial \mathrm{x}_1 \partial \mathrm{x}_2}|\hat{\mathrm{x}}^1 = \frac{\partial^2 x_3}{\partial \mathrm{x}_1 \partial \mathrm{x}_2}|\hat{\mathrm{x}}^2 = 0$$

Аналогию, дифференцируя второе уравнение правой части системы (*)по x_1, x_2, получим

$$2 + (2\mathrm{x}_3 - 4)\frac{\partial^2 x_3}{\partial^2 x_1} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial^2 x_3}{\partial \mathrm{x}_1 \partial \mathrm{x}_2}|\hat{\mathrm{x}}^1 = \frac{1}{4},$$

$$\frac{\partial^2 x_3}{\partial \mathrm{x}_1 \partial \mathrm{x}_2}|\hat{\mathrm{x}}^2 = -\frac{1}{4}.$$

Функции нескольких переменных

Очевидно, что $\frac{\partial^2 x_3}{\partial \mathrm{x}_2 \partial \mathrm{x}_1} = \frac{\partial^2 x_3}{\partial \mathrm{x}_1 \partial \mathrm{x}_2}$. Таким образом,

$$\mathrm{A} = \left(\frac{\partial^2 \hat{x}_3}{\partial \mathrm{x}_i \partial \mathrm{x}_j}\right)^2_{i,j=1} \Rightarrow A|_{\hat{\mathrm{x}}^1} = \begin{pmatrix} 1\backslash 4 & 0 \\ 0 & 1\backslash 4 \end{pmatrix}, A|_{\hat{\mathrm{x}}^2} = \begin{pmatrix} -1\backslash 4 & 0 \\ 0 & -1\backslash 4 \end{pmatrix}.$$

Матрица $A|_{\hat{\mathrm{x}}^1}$ по критерию Сильвестра является положительно определенной, а матрица $A|_{\hat{\mathrm{x}}^2}$ отрицательно определенной.

Поэтому по достаточному условию второго порядка $S_{locmin} = -2$, $S_{locmin} = 6$. Можно показать, что это будет не только локальные экстремумы, но и глобальные.

Приведем несколько примеров различных свойств экстремумов в задаче без ограничений.

Пример 4.

Абсолютные минимумы и максимумы достигаются в бесконечном числе точек:

$$f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\qquad f(x)=\sin x$$

Пример 5.

Функция ограничена, абсолютные максимум достигается, минимум – нет:

$$f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\qquad f(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

Пример 6.

Функция ограничена, но абсолютные максимум и минимум не достигаются:

$$f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\qquad f(x)=\mathrm{arctgx}$$

Пример 7.

Функция ограничена, имеет стационарные точки, но абсолютные максимум и минимум не достигаются:

$$f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}, \qquad f(x) = (\operatorname{arctg} x)^3$$

Пример 8.

Функция ограничена, имеет локальные максимумы и минимумы, но абсолютные максимум и минимум не достигаются:

$$f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}, \qquad f(x) = \operatorname{arctg} x \ \sin x$$

Пример 9.

Ограничение функции, заданной на плоскости, на любую прямую, проходящую через начало координат, имеет в нуле локальный минимум, но вместе с тем начало координат не является точкой локального минимума:

$$f: \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}, \qquad f(x_1 x_2) = (x_1 - x_2^2)(x_1 - 3x_2^2).$$

Функции нескольких переменных

Действительно, на любой прямой $x_1 = \mathrm{a}x_2$, a ∈ R, функция вида $f(ax_2, x_2) = (ax_2 - x_2^2)(x_1 - 3x_2^2) = x_2^2(a - x_2)(a - 3x_2) = x_2^2(a^2 - 4ax_2 + 3x_2^2) \geq 0 = f(0)$ при малых x_2.

Значит, на любой прямой вида $x_1 = \mathrm{a}x_2$ функции f имеет локальный минимум в нуле.

Аналогично на прямой $x_2 = 0$ функция $f(x_1, 0) = x_1^2$ имеет минимум в нуле.

С другой стороны, на параболе $x_1 = 2x_2^2$ функция $f(2x_2^2, x_2) = -x_2^4 < 0$ в любой окрестности нуля.

То есть точка $\hat{x} = 0$ не является точкой локального минимума функции f.

Пример 10. Имеется единственный локальный экстремум, не являющийся абсолютным:

$$f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R},\ f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 + 2e^{-x_1^2}.$$

Необходимое условие экстремума I порядка в конечномерной задаче без ограничений:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = \frac{\partial f(X)}{\partial x_2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - 4x_1 e^{-x_1^2} = 0; \\ -2x_2 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = 0, 2\, e^{-x_1^2} = 1 \Leftrightarrow -\mathrm{x}_1^2 = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2 \Leftrightarrow \mathrm{x}_1 = \pm\sqrt{\ln 2}\ ; \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Функции нескольких переменных

Получаем в задаче три стационарные точки $\hat{x}^1 = 0$, $\hat{x}^2 = (\sqrt{\ln 2}, 0)$, $x^3 = (-\sqrt{\ln 2}, 0)$.

Для проверки условий 2-го порядка надо выписать матрицу вторых производных в каждой стационарной точке:

$$A = \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \, \partial x_j}\right)^2_{i,j=1} = \begin{pmatrix} 2 - 4\, e^{-x_1^2} + \; 8\, x_1^2 \; e^{-x_1^2} & 0 \\ 0 & -\,2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\mathrm{A}|_{\hat{x}^{1=(0,0)}} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathrm{A}|_{x^2} = A|_{x^3} = \begin{pmatrix} 4ln2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

Матрица вторых производных $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ по критерию Сильвестра является отрицательно определенной: $A_1 = -2 < 0, \quad A_2 = 4 > 0$. Поэтому по достаточному условию второго порядка стационарная точка $\hat{x}^1 \notin locmax$. Очевидно, что $\underset{abcmax}{S} = +\infty$

$$f(x_1, 0) \to +\infty \quad \text{при} \quad x_1 \to +\infty.$$

Функции нескольких переменных

Матрица вторых производных $\begin{pmatrix} 4ln2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ по критерию Сильвестра не является ни положительно, ни отрицательно определенной и более того не является ни неположительно определенной матрицей ($A \nleq 0$) и ни неотрицательно определенной матрицей ($\mathrm{A} \ngeq 0$).

Следовательно, не выполняется необходимое условие ни локального максимума, ни локального минимума. Поэтому стационарные точки $\hat{x}^2, \hat{x}^3 \notin locextr\, f$.

Очевидно, что$S_{abcmax} = +\infty$. Действительно, функция $f(x_1, 0) = x_1^2 + 2e^{-x_1^2} \to +\infty$ при $x_1 \underset{\to +\infty}{}$. Значит, у функции f имеется единственный локальный экстремум в точке $\hat{x} = (0{,}0)$, не являющийся абсолютным.

Пример 11.

Можно ли утверждать, что если функция одной переменной имеет в какой либо точке локальный минимум, то в некоторой достаточно малой окрестности этой точки слева от точки функция убывает, а справа возрастает?

Нет. Контрпример: $f(x) = \begin{cases} x^2\left(2 + sin\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Ясно, что $\hat{x} = 0 \in \text{absmin f}$. С другой стороны, в любой окрестности нуля и справа, и слева производная $f'(x) = 2x\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right) - \cos\frac{1}{x}$, $x \neq 0$, принимаем как положительные, так и отрицательные значения, т.е. функция f и возрастает, и убывает.

Пример 12.

Имеется бесконечное число локальных максимумов, но нет ни одного локального минимума:

$$f\colon\ R^2 \to R, \qquad f(x_1, x_2) = \sin x_2 - x_1^2$$

Необходимое условие экстремума 1-го порядка:

$$\frac{\partial f(x)}{f x_2} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 = 0; \\ \cos x_2 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0; \\ x_2 = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z. \end{cases}$$

Стационарные точки: $\quad \hat{x}^k = \left(0, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in Z$

Для проверки условий 2-го порядка надо выписать матрицу вторых производных в каждой стационарной точке:

$$A = \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i\, \partial x_j}\right)_{i,j=1}^{2} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -\sin x_2 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad A\Big|_{(0,\frac{\pi}{2}+2n\pi)} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A\Big|_{\left(0,\frac{\pi}{2}+(2n+1)\pi\right)} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ по критерию Сильвестра является отрицательно определённой: $A_1 = -2 < 0$, $A_2 = 2 > 0$.

Поэтому по достаточному условию второго порядка

$$(0, \frac{\pi}{2} + 2n\pi) \in locmax\, f \quad \forall\, n \in \boldsymbol{Z}.$$

Матрица $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ по критерию Сильвестра не является неотрицательно определенной матрицей $(A \ngeq 0)$. Следовательно, не выполняется необходимое условие локального минимума.

Поэтому точки $(0, \frac{\pi}{2} + (2n + 1)\pi)$ не доставляют локального минимума. Точки локального минимума могли быть только среди стационарных точек, но там их не оказалось. Следовательно, нет ни одного локального минимума.

Задачи, упражнения на дом

$$f\,(x_1, x_2) = x_1 x_2 + \frac{50}{x_1} + \frac{20}{x_2} \to extr.$$

$$f\,(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 - 4x_1 + 6x_2 \to extr.$$

$$f\,(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 4x_1 x_2 + x_2^2 - 16x_1 - 12x_2 \to extr.$$

$$f\,(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 - x_1 x_2 + x_1 - 2x_3 \to extr.$$

$$f\,(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 + x_1 x_2 + 2x_1 x_3 + 3x_2 x_3 - x_1 \to extr.$$

$$f\,(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1 x_2 \to extr.$$

$$f\,(x_1, x_2) = 3x_1 x_2 - x_1^2 x_2 - x_1 x_2^2 \to extr.$$

$$f\,(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 - (x_1 - x_2)^4 \to extr.$$

$$f\,(x_1, x_2) = 2x_1^4 + x_2^4 - x_1^2 - 2x_2^2 \to extr.$$

$$f\,(x_1, x_2) = x_1 x_2 \ln(x_1^2 + x_2^2) \to extr.$$

$$f\,(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^3 (6 - x_1 - x_2) \to extr.$$

Функции нескольких переменных

Задачи и упражнения на дом

$$f\,(x_1,x_2) = e^{2x_1+3x_2}(8x_1^2 - 6x_1x_2 + 3x_2^2) \to extr.$$

$$f\,(x_1,x_2) = e^{x_1^2-x_2}(5 - 2x_1 + x_2) \to extr.$$

$$f\,(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2^2x_3^3(7 - x_1 - 2x_2 - 3x_3) \to extr.$$

$$f\,(x_1,x_2) = \int_{-1}^{1}(t^2 + x_2\,t + x_1)^2 dt \to min$$

$$f\,(x_1,x_2,x_3) = \int_{-1}^{1}(t^3 + x_3t^2 + x_2t + x_1)^2 dt \to min.$$

Найти экстремумы неявно заданной функции двух переменных

$$x_3 = f(x_1,x_2), \qquad \text{если}$$

$$F(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_3 - x_2x_3 + 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2 = 0$$

СПАСИБО!