Уравнения с параметрами

Что значит решить уравнение с параметрами?

Пусть дано равенство с параметрами x; a; f(x;a)=0 и поставлена задача: для каждого действительного значения a решить это уравнение относительно x, то уравнение f(x;a)=0 называется уравнением с переменной x и параметром a.

Решить это уравнение с параметром a – это значит для каждого значения a найти значения x, удовлетворяющее этому уравнению

С4. Найти все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $\sqrt{x-8} = -ax + 3a + 2$ имеет единственное решение.

Пусть $\sqrt{x-8} = t$, t ≥ 0, тогда x – 8 = t^2 ; x = t^2 + 8 и уравнение примет вид:

t = -a t^2 - 8a +3a+2

at^2 + t +5a – 2 = 0

1) Если а = 0, то уравнение имеет единственный корень

t – 2 = 0; t =2; x = 4 + 8 = 12

2) Если а ≠ 0 и а > 0

D= 1 – 4a(5a – 2) = 1 – 20 a^2+ 8a;

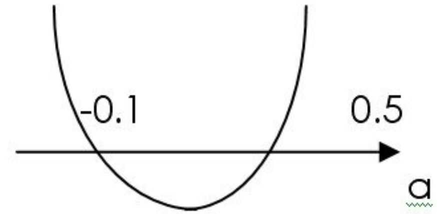
-20a^2+ 8a + 1 > 0

20 a^2 8a – 1 < 0

1) Ветви вверх

2) Нули функции

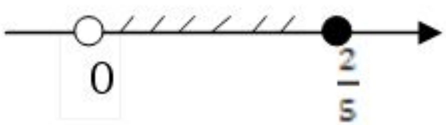
$20a^2 - 8a - 1 = 0$



D= 16 + 20 = 36

$$a_1 = \frac{4+6}{20} = 0,5 \qquad a_2 = \frac{4-6}{20} = -0,1$$

Т.к. $t \geq 0$, то единственное неотрицательное решение будет, если $t_2 = \frac{5a-2}{a}$



$$a \in (0; \frac{2}{5}]$$

3. Если $a \neq 0$ и $D = 0$

$D = 0$ если:

$a = -0.5$ или $a = 0.5$

$-0.1t^2 + t + 2.5 = 0$

$0.5t^2 + t + 0.5 = 0$

$t^2 - 10t + 25 = 0$

$t^2 + 2t + 1 = 0$

$t = 5$

$t = -1$ (неуд. $T \geq 0$)

Ответ: [0; 0,4]; -0.1

Прежде всего при решении уравнения с параметрами надо сделать то, что делается при решении любого уравнения – привести заданное уравнение к более простому виду, то есть разложить на множители, избавиться от модулей, логарифмов и т. д

Как решить задачи с параметром?

При решении задач с параметром иногда удобно, а иногда просто необходимо строить графики. Эскиз графиков иногда помогают увидеть «ход решения». Необходимо в первую очередь рассмотреть решение при тех значениях параметра, при которых обращается в ноль коэффициент при старшей степени x, тем самым понизив степень многочлена.

С2 Найти все значения параметра а, при которых уравнение

$x^2 + 2(a^2+1)|x| + a = 0$ имеет 2 различных корня.

Т.к. $\left|x^2\right| = x^2$, то сделаем замену переменных

$\left|x\right| = t, t \geq 0$ и уравнение примет вид: $t^2 + 2(a^2+1)t + a = 0$

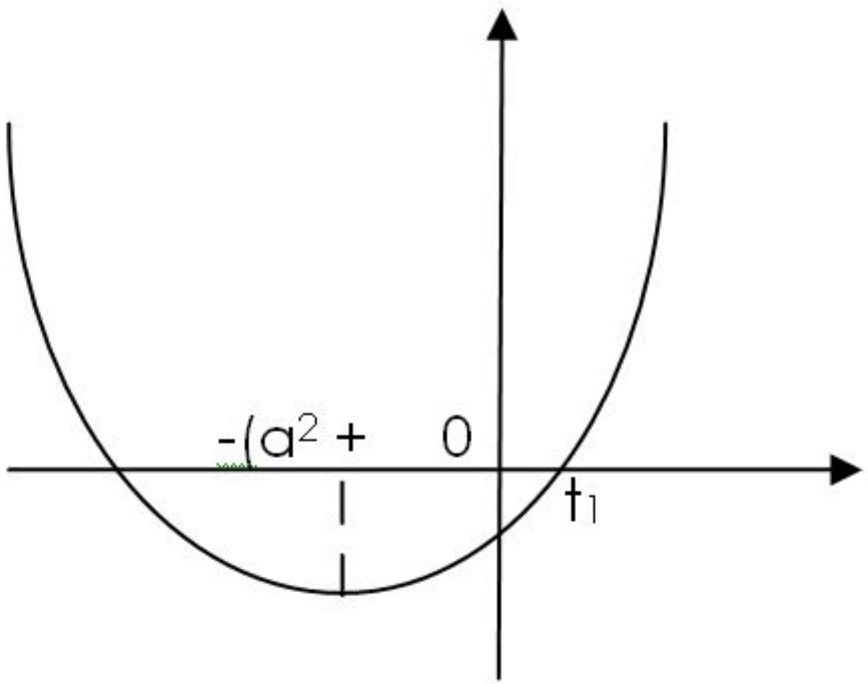
итак, надо найти те значения a, при которых квадратное уравнение имеет один положительный корень t (тогда x = ±t).

Рассмотрим функцию $y = t^2 + 2(a^2+1)t + a$

График функции – парабола, ветви – вверх.

$$t_0 = \frac{(a^2+1)2}{(-1)2} = -(a^2+1)$$

Иллюстрируем схематически



Квадратное уравнение будет иметь один положительный корень, если y(0) < 0

y(0) = 0 + 2(a2 +1)*0 + a

y(0) = a, значит a < 0