

Уравнения с одной переменной.

Цель :выявить связь между теорией и практикой при решении уравнений с одной переменной.

Задачи:

- провести анализ полученной информации;
- определить способы решения уравнений;
- установить взаимосвязь теории с практикой.

$$4x \quad \text{и} \quad 5x+2$$

При $x=1$

$$4*1 = 5*1+2 \text{ — ложное}$$

При $x = -2$

$$4*(-2) = 5*(-2)+2 \text{ — истинное}$$

Определение: Пусть $f(x)$ и $g(x)$
- два выражения с переменной x
и областью определения X .
Тогда высказывательная форма
вида $f(x) = g(x)$ называется
уравнением с одной переменной.

Примеры.

- $4x = 5x + 2 \quad X \in \mathbb{R}$

только при $x = -2$ – истинное числовое равенство.

- $(x-1)(x+2)=0. \quad X \in \mathbb{R}$

при $x = 1$ и $x = -2$ – истинное числовое равенство.

- $(3x+1)^2=6x+2, \quad 6x+2=6x+2, \quad X \in \mathbb{R}$

Решением является множество действительных чисел.

Равносильность уравнений.

- **Определение:** Два уравнения называются равносильными, если их множества решений равны.
- **Теорема 1:** Пусть уравнение $f(x) = g(x)$ задано на множестве X и $h(x)$ - выражение, определенное на том же множестве. Тогда уравнение $f(x) = g(x)$ (1) $f(x) + h(x) = g(x) + h(x)$ (2) равносильны на множестве X

Доказательство:

- T_1 – множество решений уравнения (1), T_2 – множество решений уравнения (2).
- Пусть a – корень уравнения (1). Тогда $a \in T_1$.
- $f(a) = g(a) - \text{истинное.} \quad | \quad + h(a)$
- $f(a) + h(a) = g(a) + h(a) - \text{истинное.}$
- Значит a – является также и корнем уравнения (2).
Т.е. $T_1 \subset T_2$.
- Пусть теперь b – корень уравнения (2). Тогда $b \in T_2$.
- $f(b) + h(b) = g(b) + h(b) - \text{истинное.} \quad | \quad - h(b)$
- $f(b) = g(b) - \text{истинное.}$
- Значит b – является также и корнем уравнения (1).
Т.е. $T_2 \subset T_1$.

Следствия:

1. Если к обеим частям уравнения прибавить одно и то же число, то получим уравнение, равносильное данному.
2. Если какое-либо слагаемое перенести из одной части уравнения в другую, поменяв знак слагаемого на противоположный, то получим уравнение, равносильное данному.

Теорема 2: Пусть уравнение $f(x) = g(x)$ задано на множестве X и $h(x)$ - выражение, определенное на том же множестве и не обращающееся в нуль ни при каких значениях x из множества X . Тогда уравнение $f(x) = g(x)$ и $f(x) \cdot h(x) = g(x) \cdot h(x)$ равносильны на множестве X .

Следствие: Если обе части уравнения умножить (или разделить) на одно и то же число, отличное от нуля, то получим уравнение, равносильное исходному.

Пример 1:

$$1 - \frac{x}{3} = \frac{x}{6}$$

$$\frac{6 - 2x}{6} = \frac{x}{6}$$

$$6 - 2x = x$$

$$6 = x + 2x$$

$$6 = 3x$$

$$x = 2$$

Пример 2:

$$\blacksquare x(x-1) = 2x \quad | : x$$

$$x-1 = 2$$

$$x = 3$$

$$\blacksquare x = 0 \text{ — потерян.}$$

$$\blacksquare \text{Правильное решение:}$$

$$x(x-1)-2x=0$$

$$x(x-1-2)=0$$

$$x = 0 \text{ или } x-3=0$$

$$x = 3$$

Пример 3:

$$5x - 15$$

$$\frac{\quad}{(x+2)(x-3)} = 0$$

$$x + 2 \neq 0 \quad \text{и} \quad x - 3 \neq 0$$

$$5x - 15 = 0$$

$x = 3$ – посторонний корень.