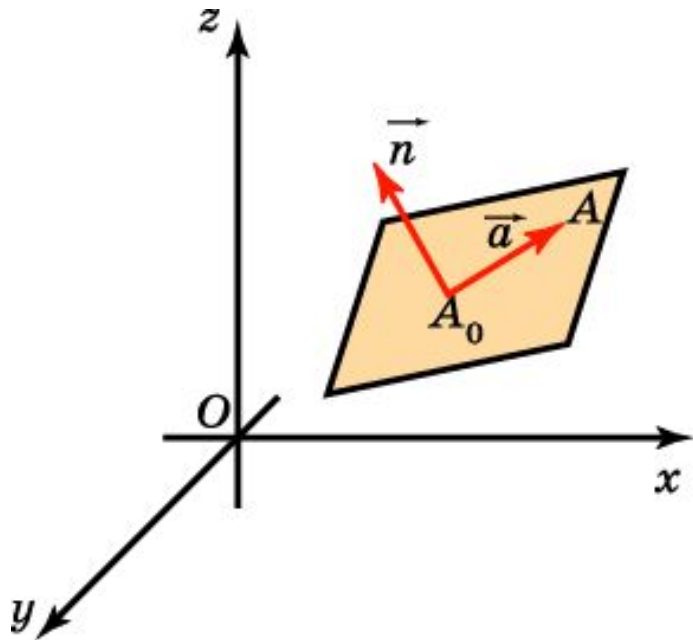


Уравнение плоскости в пространстве

Теорема. Плоскость в пространстве задается уравнением

$$ax + by + cz + d = 0,$$

где a, b, c, d - действительные числа, причем a, b, c одновременно не равны нулю и составляют координаты вектора $\vec{n}$, перпендикулярного этой плоскости и называемого **вектором нормали**.



Угол между двумя пересекающимися плоскостями, заданными уравнениями $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ можно найти, используя формулу

$$\cos \varphi = \frac{\vec{n}_1' \cdot \vec{n}_2'}{|\vec{n}_1'| \cdot |\vec{n}_2'|}.$$

Упражнение 1

Дана плоскость: а) $5x - y - 1 = 0$; б) $3x + 18z - 6 = 0$; в) $15x + y - 8z + 14 = 0$; г) $x - 3y + 15z = 0$. Назовите координаты вектора нормали.

Ответ: а) $(5, -1, 0)$; б) $(3, 0, 18)$; в) $(15, 1, -8)$; г) $(1, -3, 15)$.

Упражнение 2

Найдите уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-1, 2, 1)$, с вектором нормали, имеющим координаты: а) $(0, -5, 2)$; б) $(6, -1, 3)$; в) $(-4, -2, -1)$; г) $(-3, -8, 0)$.

Ответ: а) $-5y+2z+8=0$;

б) $6x-y+3z+5=0$;

в) $-4x-2y-z+1=0$;

г) $-3x-8y+13=0$.

Упражнение 3

В каком случае два уравнения $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ задают: а) одну плоскость; б) две параллельные плоскости?

Ответ: а) Если для некоторого числа t выполняются равенства $a_2=ta_1$, $b_2=tb_1$, $c_2=tc_1$, $d_2=td_1$;
б) Если для некоторого числа t выполняются равенства $a_2=ta_1$, $b_2=tb_1$, $c_2=tc_1$ и неравенство $d_2 \neq td_1$;

Упражнение 4

В каком случае две плоскости, заданными уравнениями $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$, перпендикулярны?

Ответ: Если выполняется равенство $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$.

Упражнение 5

Найдите уравнения координатных плоскостей Oxy , Oxz , Oyz .

Ответ: $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$.

Упражнение 6

Дана плоскость $x + 2y - 3z - 1 = 0$. Найдите ее точки пересечения с осями координат.

Ответ: $x = 1, y = \frac{1}{2}, z = -\frac{1}{3}$.

Упражнение 7

Точка $H(-2, 4, -1)$ является основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость. Напишите уравнение этой плоскости.

Ответ: $2x - 4y + z + 21 = 0$.

Упражнение 8

Напишите уравнение плоскости, которая: а) проходит через точку $M(1, -2, 4)$ и параллельна координатной плоскости Oxz ; б) проходит через точку $M(0, 2, 0)$ и перпендикулярна оси ординат; в) проходит через точки $A(3, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$ и параллельна оси аппликат.

Ответ: а) $y = -2$; б) $y = 2$; в) $x + y = 3$.

Упражнение 9

Определите, какие из перечисленных ниже пар плоскостей параллельны между собой:

а) $x + y + z - 1 = 0$, $x + y + z + 1 = 0$;

б) $x + y + z - 1 = 0$, $x + y - z - 1 = 0$;

в) $-7x + y + 2z = 0$, $7x - y - 2z - 5 = 0$;

г) $2x + 4y + 6z - 8 = 0$, $-x - 2y - 3z + 4 = 0$.

Ответ: а), в).

Упражнение 10

Как расположены относительно друг друга следующие плоскости: а) $5x - y + 7z - 8 = 0$ и $5x - 2y + 14z - 16 = 0$; б) $x - y + z = 0$ и $-6x + 12y - 24z = 0$; в) $15x + 9y - 30z + 12 = 0$ и $-10x - 6y + 20z - 8 = 0$; г) $-2x - 2y + 4z + 14 = 0$ и $3x + 3y - 6z + 21 = 0$?

Ответ: а) Пересекаются; б) пересекаются;
в) совпадают; г) параллельны.

Упражнение 11

Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1,3,-1)$ параллельно плоскости: а) $3x + y - z + 5 = 0$; б) $x - y + 5z - 4 = 0$.

Ответ: а) $3x + y - z - 7 = 0$; б) $x - y + 5z + 7 = 0$.

Упражнение 12

Перпендикулярны ли плоскости: а) $2x - 5y + z + 4 = 0$ и $3x + 2y + 4z - 1 = 0$; б) $7x - y + 9 = 0$ и $y + 2z - 3 = 0$?

Ответ: а) Да; б) нет.

Упражнение 13

Найдите угол φ между плоскостями, заданными уравнениями:

а) $x + y + z + 1 = 0$, $x + y - z - 1 = 0$; б) $2x + 3y + 6z - 5 = 0$, $4x + 4y + 2z - 7 = 0$.

Ответ: а) $\cos \varphi = \frac{1}{3}$; б) $\cos \varphi = \frac{16}{21}$.

Упражнение 14

Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки: а) $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ и $C(0,0,1)$; б) $M(3,-1,2)$, $N(4,1,-1)$ и $K(2,0,1)$.

Ответ: а) $x+y+z-1=0$; б) $x+4y+3z-5=0$.

Упражнение 15

Плоскость задана уравнением $ax + by + cz + d = 0$. Напишите уравнение плоскости, симметричной данной относительно: а) координатных плоскостей; б) координатных прямых; в) начала координат.

Ответ: а) $ax + by - cz + d = 0$, $ax - by + cz + d = 0$, $-ax + by + cz + d = 0$;

б) $ax - by - cz + d = 0$, $-ax + by - cz + d = 0$, $-ax - by + cz + d = 0$; в) $-ax - by - cz + d = 0$.

Упражнение 16

Вычислите расстояние от начала координат до плоскости: а) $2x - 2y + z - 6 = 0$; б) $2x + 3y - 6z + 14 = 0$.

Ответ: а) 2; б) 2.

Упражнение 17

Составьте уравнение плоскости, касающейся сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ в точке с координатами: а) $(0,3,0)$; б) $(2,-2,1)$.

Ответ: а) $y=3$;

б) $2x-2y+z-9=0$.